

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

J. AUERHAN

DOMINIQUE LÉPINGLE

MARC YOR

Construction d'une martingale réelle continue de filtration naturelle donnée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 200-204

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__200_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION D'UNE MARTINGALE REELLE CONTINUE,
DE FILTRATION NATURELLE DONNEE.

J. AUERHAN, D. LEPINGLE ET M. YOR

Position du problème et résumé.

On construit à l'aide de différents procédés une martingale continue réelle dont la filtration naturelle est celle d'un nombre fini ou infini (mais dénombrable) de mouvements browniens réels indépendants.

1. Notations et préliminaires.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ est l'espace de probabilité filtré de référence. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifie les conditions habituelles, ainsi que toutes les filtrations utilisées dans la suite. \mathcal{P} est la tribu prévisible, sur $\Omega \times]0, \infty[$, associée à (\mathcal{F}_t) . Si $Z : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \leq \infty$) est un processus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ mesurable, on note $\mathcal{F}(Z)$ la filtration naturelle de Z , c'est à dire : $(\mathcal{F}_t^0(Z) = \sigma\{Z_s, s \leq t\}, t \geq 0)$ rendue (\mathcal{F}, P) complète, et continue à droite.

Si Z et Z' sont deux tels processus, on dit que :

- Z domine Z' (ou : Z' est dominé par Z) si $\mathcal{F}(Z') \subset \mathcal{F}(Z)$.
- Z équivaut à Z' (ou : Z et Z' sont équivalents) si $\mathcal{F}(Z') = \mathcal{F}(Z)$.

Rappelons, d'après un résultat classique d'approximation, que :

- Si M et N sont deux martingales continues, telles que M domine N , alors
(1) M domine également $\langle M, N \rangle$.

Le lemme suivant - qui joue un rôle fondamental au paragraphe 2 - est dû à Dellacherie et Stricker ([1], p. 366 et 367).

Lemme : Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ est séparable
- (ii) il existe une sous-tribu séparable \mathcal{H} de \mathcal{F}_∞ telle que tout ensemble de \mathcal{F}_∞ soit P p.s égal à un ensemble de \mathcal{H} à gauche
- (iii) il existe un processus strictement croissant, continu, borné par 1 et (\mathcal{F}_t) adapté, A , tel que tout ensemble de \mathcal{P} soit P -indistinguable d'un ensemble de $\sigma(A)$.

Remarque : Rappelons que pour tout $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et tout ensemble $\Gamma \in \mathcal{F}_{T-}$, il existe un processus (\mathcal{F}_t) prévisible Z tel que $1_\Gamma = Z_T$, P p.s sur (T, ∞) .

On en déduit immédiatement que, si l'assertion (iii) est vérifiée, l'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{G}(A)$ s'ensuit.

2. Une construction générale.

Le théorème suivant résout en particulier le problème posé en début d'article.

Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) Il existe une martingale locale continue M, dont la filtration naturelle est égale à \mathcal{F} , et telle que :
 $P(d\omega)$ p.s, $d\langle M, M \rangle_t(\omega)$ est équivalente à (dt) .
- 2) Il existe un (\mathcal{F}_t) mouvement brownien réel et $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ est séparable.

Démonstration : 1) \implies 2) :

- Si $\frac{d\langle M, M \rangle_t}{dt} = H_t$ ($H \in \mathcal{P}$), alors, d'après un théorème classique de Paul Lévy,

$\beta_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{H_s}} dM_s$ est un (\mathcal{F}_t) mouvement brownien réel.

- D'autre part, l'assertion (ii) du lemme est vérifiée avec $\mathcal{H} = \sigma\{M_u, u \in \mathbb{Q}_+\}$.

2) \implies 1). On note $(\beta_t)_{t \geq 0}$ un (\mathcal{F}_t) mouvement brownien.

D'après (1), appliqué avec $M=N$, la martingale $M_t = \int_0^t A_s d\beta_s$ satisfait à 1),

dès que A vérifie l'assertion (iii) du lemme.

Corollaire : Supposons que (\mathcal{F}_t) soit la filtration naturelle d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^p(p < \infty)$. Il existe une martingale continue réelle admettant (\mathcal{F}_t) pour filtration naturelle.

3. Construction explicite d'une martingale continue réelle, dont la filtration naturelle est celle d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n(n < \infty)$.

On se propose ici de décrire différentes solutions "élémentaires" au problème posé, ne faisant pas intervenir le processus croissant générique A (voir le lemme).

On note $B = (B^i)_{i \leq n(\infty)}$ le mouvement brownien donné.

Remarquons tout d'abord que l'on peut toujours supposer $B_0 = 0$. En effet, s'il n'en est pas ainsi, la tribu $\sigma(B_0)$ est séparable, et il existe donc une variable réelle bornée, soit m , qui l'engendre. Si $(M_t, t \geq 0)$ est une solution, nulle en 0, du problème posé avec $(B_t - B_0, t \geq 0)$, alors $(m + M_t, t \geq 0)$ est une solution du problème relatif à $(B_t, t \geq 0)$. On suppose donc, dans la suite, $B_0 = 0$.

1° n fini.

a) Première méthode. Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, une fonction continue, engendrant la tribu borélienne (par exemple : $\Phi(x) = 2 + \frac{x}{1+|x|}$).

On définit :

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= B^1. \\ M^{(2)} &= \int_0^\cdot \Phi(M_s^{(1)}) dB_s^2 \\ &\vdots \\ M^{(p+1)} &= \int_0^\cdot \Phi(M_s^{(p)}) dB_s^{p+1} \\ &\vdots \\ M^{(n)} &= \int_0^\cdot \Phi(M_s^{(n-1)}) dB_s^n. \end{aligned}$$

A l'aide de (1), appliqué successivement à $M = N = M^{(i)}$, on montre par itération que, pour tout i , $M^{(i)}$ équivaut à (B^1, \dots, B^i) . $M^{(n)}$ est donc une solution au problème.

b) Seconde méthode. Rappelons que si M est une martingale continue nulle en 0, et si l'on note $S = \sup_{s \leq \cdot} M_s$, le processus $Y = S - M$ équivaut à M .

(Utiliser l'identité : $S_t = \int_0^t 1_{(Y_s=0)} dY_s$). On définit encore une suite de martingales $(M^{(p)}, 1 \leq p \leq n)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= B^1, \text{ et si l'on note } S^{(p)} = \sup_{s \leq \cdot} M_s^{(p)}, \\ M^{(p+1)} &= \int_0^\cdot (S_s^{(p)} - M_s^{(p)}) dB_s^{p+1}. \end{aligned}$$

A l'aide du rappel précédent et de (1), on obtient l'équivalence pour tout $p \in [2, (n-1)]$ des processus $M^{(p+1)}$ et $(M^{(p)}, B^{p+1})$. Par itération, $M^{(n)}$ et B sont équivalents.

c) Troisième méthode. A toute composante B^i du mouvement brownien B , on associe : $\sigma^i = \sup_{s \leq \cdot} B_s^i$. L'identité suivante découle de la formule d'Ito, et de ce que la mesure aléatoire $d\sigma_s^i(\omega)$ est portée $\{s / \sigma_s^i(\omega) = B_s^i(\omega)\}$:

$$(2) \quad (\sigma_t^i - B_t^i)^2 = t - 2 \int_0^t (\sigma_s^i - B_s^i) dB_s^i.$$

Une légère modification (utilisant la formule (2)) de la démonstration du théorème 2 de (2), avec A matrice $n \times n$, diagonale, dont les éléments diagonaux sont n nombres réels distincts, non nuls, $(\lambda_i)_{i \leq n}$, permet de montrer que la martingale :

$$M_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^t (\sigma_s^i - B_s^i) dB_s^i$$

équivalent au processus $(\sigma^i - B^i, i \leq n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , et donc à B , d'après le rappel fait en b).

2° n infini.

On s'inspire beaucoup de la troisième méthode du cas : n fini. Remarquons tout d'abord que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la série : $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \int_0^t (\sigma_s^i - B_s^i) dB_s^i$ converge normalement dans L^1 : en effet, il résulte aisément de la formule (2) que la somme des normes dans L^1 de ces variables est majorée par $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} t < \infty$. Ainsi, d'après l'inégalité maximale de Doob, il existe une martingale continue $(M_t)_{t \geq 0}$ telle que, pour tout t :

$$M_t = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \int_0^t (\sigma_s^i - B_s^i) dB_s^i, \text{ p.p.s.}$$

Nous allons montrer que M est solution du problème posé.

Toujours d'après le raisonnement fait pour n fini, dans la démonstration du théorème 2 de (2), on obtient aisément, en posant $\lambda_i = 2^{-i}$, que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, les processus $Z_t^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n (\sigma_t^i - B_t^i)^2$ sont dominés par M .

En appliquant à $Y^i = \sigma^i - B^i$ la remarque faite au début de b), il nous reste à montrer que, pour tout i , $(\sigma^i - B^i)^2$ est dominé par M . Ce résultat découle des remarques suivantes :

Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres positifs tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i < \infty$

(on note toujours $\lambda_i = 2^{-i}$). Nous allons montrer que l'on peut exprimer la suite (x_i) mesurablement en fonction de la suite (f_n) définie par :

$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_i.$$

En effet, la fonction $\ell(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^i x_i$ est holomorphe pour $|z| < 1/2$, et donc :

$$x_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i \ell}{dz^i}(0)$$

Or, puisque $\lambda_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$, on a :

$$x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\lambda_n}, \quad x_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n - x_1 \lambda_n}{\lambda_n^2},$$

puis, de façon générale :

$$x_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^p} (f_n - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^n x_i), \text{ d'où le résultat cherché, par récurrence.}$$

4. En guise de conclusion.

Revenons à la situation générale étudiée dans les paragraphes 1 et 2.

Supposons maintenant qu'il existe un (\mathcal{F}_t) processus de Poisson

$(N_t)_{t \geq 0}$ et que, en outre, $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ soit séparable.

Si A désigne un processus continu, (\mathcal{F}_t) adapté, satisfaisant à la condition (iii) du lemme (paragraphe 1), il est immédiat que la martingale

$$M_t = \int_0^t A_s d(N_s - s) \text{ a pour filtration naturelle } (\mathcal{F}_t) \text{ (remarquer que :}$$

$$\int_0^t A_s dN_s = \sum_{(s \leq t)} \Delta M_s).$$

En rapprochant ce résultat du théorème du paragraphe 2, il est naturel de se poser la question suivante :

si (\mathcal{F}_t) est une filtration telle que $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ soit séparable, existe-t-il une martingale réelle (M_t) dont la filtration naturelle soit identique à (\mathcal{F}_t) ?

Ne sachant pas répondre en toute généralité à ce problème, signalons toutefois que son analogue "discret" admet une réponse positive :

en effet, si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration telle que $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ soit séparable, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, une variable $Z_n \in b(\mathcal{F}_n)$, qui engendre, aux ensembles négligeables près, la tribu \mathcal{F}_n .

La martingale $M_n = Z_0 + (Z_1 - E(Z_1/\mathcal{F}_0)) + \dots + (Z_n - E(Z_n/\mathcal{F}_{n-1}))$ est alors une solution au problème.

REFERENCES :

- [1] C. DELLACHERIE & C. STRICKER : Changements de temps et intégrales stochastiques. Sémin. Proba. Strasbourg XI. Lect. Notes in Maths. 581. Springer (1977).
- [2] M. YOR : Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans \mathbb{R}^n . Sémin. Proba. Strasbourg XIII. Lect. Notes in Maths. 721 Springer (1979).