SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Les résultats de Jeulin sur le grossissement des tribus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 173-188

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__173_0>

LES RESULTATS DE JEULIN SUR LE GROSSISSEMENT DES TRIBUS

par P.A. Meyer

Soit $(\Omega,\underline{\underline{A}},P)$ un espace probabilisé complet, et soient $F=(\underline{\underline{F}}_t)$, $\underline{\underline{G}}=(\underline{\underline{G}}_t)$ deux filtrations sur Ω, satisfaisant aux conditions habituelles, telles que $\underline{\underline{F}}_t \subset \underline{\underline{G}}_t$ pour tout t (il n'y a aucun inconvénient à supposer que tous les ensembles P-négligeables de $\underline{\underline{A}}$ appartiennent à $\underline{\underline{F}}_0$, et nous ferons cette hypothèse dans la suite). Stricker a montré que toute semimartingale/$\underline{\underline{G}}$ adaptée à $\underline{\underline{F}}$ est une semimartingale/$\underline{\underline{F}}$; le problème du grossissement est le problème inverse : donner des conditions pour qu'une semimartingale donnée X de la filtration $\underline{\underline{F}}$ soit encore une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$ (et, autant que possible, donner une décomposition explicite de X par rapport à $\underline{\underline{G}}$). Le cas le plus connu, sur lequel des résultats remarquables ont été obtenus par Barlow et Yor , est celui où toute semimartingale/$\underline{\underline{F}}$ est encore une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$; cette propriété est connue sous le nom d'hypothèse H' (1). On consultera à ce sujet le volume XII du séminaire. Ce sont les travaux de Jeulin et de Yor (voir dans le volume XIII leurs articles sur les "faux-amis") qui ont montré combien le problème du grossissement peut être intéressant, dans des cas où l'hypothèse H' n'est pas satisfaite. Les travaux récents de Jeulin font avancer notre connaissance du problème du grossissement, de manière décisive, sur plusieurs points

- sous l'hypothèse H' : étude approfondie de la continuité de l'opérateur de grossissement, considéré sur divers espaces de semimartingales/$\underline{\underline{F}}$.
- En toute généralité, découverte de conditions suffisantes simples permettant de vérifier qu'une semimartingale/$\underline{\underline{F}}$ donnée est encore une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$, ou bien n'est plus une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$.
- Dans une série d'exemples appartenant à la théorie du mouvement brownien, et d'un intérêt extraordinaire, ces conditions suffisantes mènent à une solution complète du problème du grossissement : bien que l'hypothèse H' ne soit pas satisfaite, on peut caractériser entièrement les semimartingales/$\underline{\underline{F}}$ qui restent des semimartingales/$\underline{\underline{G}}$.

L'exposé qui suit donne un avant goût des points 2 et 3. Jeulin a entrepris lui même un exposé "pédagogique" de l'ensemble des résultats

---

1. L'hypothèse H de Brémaud-Yor, plus forte que H', signifie que toute martingale/$\underline{\underline{F}}$ est encore une martingale/$\underline{\underline{G}}$. Il nous semble que cette terminologie est mal choisie, mais nous n'essaierons pas de la changer.

actuellement connus sur le problème du grossissement, que je trouve excellent , et qui me dispense du souci d'être complet[1].

Grossissement initial et grossissement progressif. Les principaux exemples de Jeulin concernent le cas où la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$ est construite à partir de $(\underline{\underline{F}}_t)$ par grossissement initial : une tribu $\underline{\underline{E}}$ - supposée séparable dans toute la suite - est adjointe à la tribu initiale $\underline{\underline{F}}_0$; on pose donc

(1) $$\underline{\underline{G}}_t^\circ = \underline{\underline{F}}_t \vee \underline{\underline{E}} \quad ; \quad \underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{G}}_{t+}^\circ$$

Une manière moins brutale de procéder consiste à introduire les connaissances supplémentaires, représentées par la tribu $\underline{\underline{E}}$, non pas à l'instant 0, mais à un instant aléatoire L : L étant une v.a. $\underline{\underline{E}}$-mesurable positive, on désigne par $\underline{\underline{G}}_t^\circ$ la tribu constituée par les ensembles de la forme

(2) $$(A\cap\{L>t\}) \cup (B\cap\{L\leq t\}) \quad \text{avec } A\in\underline{\underline{F}}_t \text{ , } B\in\underline{\underline{F}}_t \vee \underline{\underline{E}}$$

et l'on pose $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{G}}_{t+}^\circ$. Lorsque L=0, on retrouve le grossissement initial ; lorsque $\underline{\underline{E}}$ est la tribu engendrée par L, $(\underline{\underline{G}}_t)$ est la plus petite filtration satisfaisant aux conditions habituelles, contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$ et admettant L comme temps d'arrêt. Ainsi les résultats de Barlow et de Yor (sém. XII) sont des résultats de grossissement progressif. Ici, nous nous intéresserons surtout au grossissement initial.

I . PROBLEMES DE GROSSISSEMENT INITIAL

Nous considérons une suite $(\underline{\underline{E}}^n)$ de tribus finies, telle que $\underline{\underline{E}}^n \subset \underline{\underline{E}}^{n+1}$ et que $\bigvee_n \underline{\underline{E}}^n = \underline{\underline{E}}$; par convention, $\underline{\underline{E}}^0 = \{\Omega,\emptyset\}$. Pour tout n , $\underline{\underline{G}}^n$ est la filtration obtenue par grossissement initial de $(\underline{\underline{F}}_t)$ au moyen de $\underline{\underline{E}}^n$; ainsi, $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{G}}^0$. Pour tout n , nous désignons par Π^n une partition finie engendrant la tribu $\underline{\underline{E}}^n$.

Pour tout ensemble U , nous désignons par Z^U une version continue à droite de la martingale/$\underline{\underline{F}}$ $P(U|\underline{\underline{F}}_t)$.

Soit X une martingale/$\underline{\underline{F}}$, nulle en 0, appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$. Notre but est de calculer $\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}}}(X)$, ou plus généralement $\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}},Q}(X)$, où Q est une loi de probabilité équivalente à P : si l'une de ces quantités est finie, nous saurons que X est une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$. L'expression de la variation au moyen de subdivisions finies montre d'ailleurs que

---

1. La première rédaction de cet exposé a influencé la rédaction définitive de Jeulin, qui à son tour a influencé cette rédaction ci (abrégée)

$$\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}},Q}(X) = \sup_n \mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}}^n,Q}(X) \tag{3}$$

la suite au second membre étant d'ailleurs croissante. Il nous faut donc calculer les variations du côté droit, et écrire que leur limite est finie.

Nous faisons le calcul d'abord lorsque Q=P.

LEMME 1. <u>Le processus</u> X <u>est une semimartingale spéciale par rapport à</u> ($\underline{\underline{G}}^n$). <u>Si l'on désigne par</u> $X=M^n+A^n$ <u>sa décomposition canonique</u>, <u>on a</u>

$$A_t^n = \Sigma_{U\varepsilon\,\Pi^n} I_U \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}^U} d\langle X,Z^U\rangle_s \tag{4}$$

<u>et</u>

$$\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}}^n}(X) = \Sigma_{U\varepsilon\,\Pi^n} E[\int_0^\infty |d\langle X,Z^U\rangle|_s] \tag{5}$$

DEMONSTRATION. Nous commençons par remarquer que l'expression (4) est bien définie. En effet, la martingale Z^U garde la valeur 0 à partir du premier instant s où $Z_s=0$ ou $Z_{s-}=0$, et d'autre part sa limite à l'infini est égale à 1 sur U , donc en fait sur U la trajectoire $Z_.^U$ est bornée inférieurement par un nombre >0, et l'intégrale porte sur une fonction bornée. D'autre part, la martingale Z^U est bornée, donc appartient a BMO, tandis que X appartient à H^1 par hypothèse, donc $[X,Z^U]$ est à variation intégrable (inégalité de Fefferman) et il en est de même de son compensateur prévisible $\langle X,Z^U\rangle$; (4) a donc un sens, et (5) est une quantité finie.

Vérifions d'abord que X est une quasimartingale/($\underline{\underline{G}}^n$) . La variation de X est égale au sup des espérances de la forme $E[\int_0^\infty K_s dX_s]$, où K est un processus prévisible élémentaire par rapport à $\underline{\underline{G}}^n$, nul en 0 (puisque $X_0=0$ par hypothèse) et borné par 1 en valeur absolue ; l'intégrale stochastique est une i.s. élémentaire, et se réduit en fait à une somme finie. Nous pouvons écrire

$$K = \Sigma_{U\varepsilon\,\Pi^n} \Sigma_i \; I_U H^{iU} I_{]s_i,s_{i+1}]}$$

où (s_i) est une subdivision finie de $[0,\infty]$, et pour tout i la v.a. H^{iU} est $\underline{\underline{F}}_{s_i}$-mesurable, bornée par 1 en valeur absolue (comme X appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, il n'y a pas de problème quant à la définition de X_∞). L'espérance s'écrit donc

$$E[\Sigma_{i,U} I_U H^{iU}(X_{s_{i+1}}-X_{s_i})] = E[\Sigma_{i,U} H^{iU}(Z^U_{s_{i+1}}X_{s_{i+1}}-Z^U_{s_i}X_{s_i})]$$
$$= E[\Sigma_{i,U} H^{iU} \langle X,Z^U\rangle_{s_i}^{s_{i+1}}]$$

Comme $\langle X,Z^U\rangle$ est à variation intégrable prévisible, on voit aisément que le sup de cette expression est exactement (5).

Pour vérifier (4), nous avons besoin de préciser un peu les remarques du début de la démonstration : la projection prévisible/$\underline{\underline{F}}$ du processus I_U/Z^U_{s-} (bien défini partout par la convention habituelle 0/0=0) est indistinguable de $I_{\{Z^U_->0\}}$ (vérification sur la définition d'une projection prévisible), et en particulier elle est p.p. égale à 1 pour la mesure aléatoire $d<Z^U,Z^U>_s$, et donc pour la mesure aléatoire $d<X,Z^U>_s$. Il en résulte sans peine que, si l'on définit A^n par (4)

- on a $E[\int|dA^n_s|] < \infty$
- on a $E[\int K_s dA^n_s] = E[\int K_s dX_s]$ pour tout processus prévisible élémentaire K de la filtration $\underline{\underline{G}}^n$ (la seconde espérance a été calculée plus haut).

Comme A^n est prévisible/$\underline{\underline{G}}^n$, et la seconde propriété exprime que $X-A^n$ est une martingale/$\underline{\underline{G}}^n$, cela entraîne bien que A^n est le processus qui figure dans la décomposition canonique de X par rapport à $\underline{\underline{G}}^n$.

Rappelons quelques notions relatives aux <u>bimesures</u>. Etant donnés deux espaces mesurables $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$, une bimesure sur $E\times F$ est une fonction $I(A,B)$, où A parcourt $\underline{\underline{E}}$ et B parcourt $\underline{\underline{F}}$, qui est une mesure (bornée, signée) en chacun de ses arguments lorsque l'autre est fixé. La <u>norme</u> $\|I\|$ de la bimesure I est le nombre

$$\|I\| = \sup \ \Sigma_{m,n} \ |I(A_m,B_n)|$$

où les $A_m \in \underline{\underline{E}}$ forment une partition finie de E, les $B_n \in \underline{\underline{F}}$ une partition finie de F, et le sup est pris sur tous les couples possibles de partitions finies. Par exemple, si I est positive, sa norme est égale à $I(E,F) < \infty$, et on peut montrer (Horowitz [1]) qu'une bimesure est différence de deux bimesures positives si et seulement si elle est bornée (i.e., de norme finie). On peut aussi montrer (mais nous ne nous en servirons probablement pas) que, si <u>l'un au moins</u> des espaces mesurables E, F est un bon espace (par exemple, est lusinien), toute bimesure positive $I(A,B)$ est de la forme $\mu(A\times B)$, où μ est une mesure sur $E\times F$; l'extension aux biemsures bornées est alors immédiate.

On peut calculer la norme d'une bimesure I de façon un peu plus explicite. Supposons que la tribu $\underline{\underline{E}}$ soit séparable, et choisissons une suite de tribus finies $\underline{\underline{E}}^n$, croissante, telle que $\bigvee_n \underline{\underline{E}}^n = \underline{\underline{E}}$. Pour chaque n, soit $\Pi^n = (A^n_k)$ une partition finie qui engendre $\underline{\underline{E}}^n$, et soit μ^n_k la mesure $I(A^n_k,.)$ sur F. Alors on a

$$\|I\| = \sup_n \Sigma_k \|\mu^n_k\| \quad (\sup_n \text{ peut être remplacé par } \lim_n) .$$

Nous pouvons associer à la martingale X une bimesure sur $\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$

(6) $$I_X(U,V) = E[\int_0^\infty I_V(s)d<X,Z^U>_s] \qquad U\in\underline{\underline{E}},\ V\in\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant, fondamental pour la suite

THEOREME 2 . Soit X une martingale/$\underline{\underline{F}}$, nulle en 0 et appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$. Dans le cas du grossissement initial par la tribu $\underline{\underline{E}}$, on a exactement

$$(7) \qquad \mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}}}(X) = \|I_X\| \ .$$

On aurait eu le même résultat en utilisant une bimesure un peu plus compliquée : non pas sur $\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$, mais sur $\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{P}}$, la tribu prévisible/$\underline{\underline{F}}$. Cette bimesure est

$$(6') \qquad I'_X(U,V) = E[\int_0^\infty I_V(s,.)d\langle X,Z^U\rangle_s \ ] \quad (\ \underset{U\,e\,\underline{\underline{E}}}{V \text{ prévisible}}\ ).$$

Par hypothèse, la martingale X appartient à $\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}})$, donc la v.a. aléatoire X^* est intégrable. Si l'on a $\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}}}(X)<\infty$, la semimartingale X appartient donc à $\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{G}})$ (espace $\underline{\underline{H}}^1$ de semimartingales).

VARIANTE. Soit Q une loi de probabilité équivalente à P, admettant une densité bornée q_∞ , et soit (q_t) la martingale $E[q_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$. Indiquons rapidement comment on peut calculer la variation $\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}},Q}(X)$. L'intérêt de ce calcul est surtout théorique : X est une semimartingale (jusqu'à l'infini) par rapport à la filtration $\underline{\underline{G}}$ si et seulement s'il existe une loi Q du type ci-dessus telle que $\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}},Q}(X) < \infty$.

Convenons de désigner par des lettres grasses tous les éléments relatifs à la loi Q : $\mathbf{E}$ pour E_Q , $\boldsymbol{<\,,\,>}$ pour le crochet oblique , $\mathbf{Z}^U_t$ pour $\mathbf{E}[I_U|\underline{\underline{F}}_t]$, avec $U\in\underline{\underline{E}}$. On a

$$(8) \qquad \mathbf{Z}^U_t = Y^U_t/q_t \ , \text{ où } Y^U_t = E[I_U q_\infty|\underline{\underline{F}}_t] \text{ est une martingale}/\underline{\underline{F}},P \ .$$

Comme dans le raisonnement précédent, il s'agit d'évaluer des quantités de la forme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\ \Sigma_{i,U}\ I_U H^{iU}(X_{s_{i+1}}-X_{s_i})] &= \mathbf{E}[\ \Sigma_{i,U}\ H^{iU}(\mathbf{Z}^U_{s_{i+1}}X_{s_{i+1}}-\mathbf{Z}^U_{s_i}X_{s_i})] \\
&= E[\ \Sigma_{i,U}\ H^{iU}(q_{s_{i+1}}\mathbf{Z}^U_{s_{i+1}}X_{s_{i+1}}-q_{s_i}\mathbf{Z}^U_{s_i}X_{s_i})] \\
&= E[\ \Sigma_{i,U}\ H^{iU}(Y^U_{s_{i+1}}X_{s_{i+1}}-Y^U_{s_i}X_{s_i})] = E[\ \Sigma_{i,U}\ H^{iU}\langle X,Y^U\rangle_{s_i}^{s_{i+1}}]
\end{aligned}$$

et la variation cherchée est exactement la norme de la bimesure

$$(9) \qquad \mathbf{I}(U,V) = E[\int_0^\infty I_V(s)d\langle X,Y^U\rangle_s \ ]$$

MODE DE CALCUL PRATIQUE. Le plus souvent, la tribu $\underline{\underline{E}}$ nous est donnée avec une v.a. L qui l'engendre, et il est plus naturel de changer légèrement de notation, et de poser

$$(10) \qquad \Lambda^U_t = P\{L\in U|\underline{\underline{F}}_t\} \quad (\ = Z_t^{\{L\in U\}}\ )$$

U désignant cette fois, non une partie de Ω, mais une partie de $\mathbb{R}$. Plus précisément, il suffit de connaître les martingales

(11) $$\Lambda_t(a,.) = P\{L \leqq a | \underline{\underline{F}}_t\}$$

dont il est facile de construire de bonnes versions, de telle sorte que
- pour (t,ω) fixés, $\Lambda_t(.,\omega)$ soit une fonction croissante, continue à droite, telle que $\Lambda_t(-\infty,\omega)=0$, $\Lambda_t(\infty,\omega) \leqq 1$;
- pour a fixé, $\Lambda_.(a,.)$ soit indistinguable d'une martingale càdlàg.

On obtient alors $\Lambda_t^U(\omega)$ comme $\int_{\mathbb{R}} I_U(a)\Lambda_t(da,\omega)$.

Le plus souvent aussi, la martingale X est de carré intégrable sur tout intervalle fini ; alors la mesure $d\langle X,\Lambda(a,.)\rangle$ est absolument continue par rapport à $d\langle X,X\rangle$, et nous pouvons écrire

(12) $$d\langle X,\Lambda(a,.)\rangle_t = \lambda_t(a,.)d\langle X,X\rangle_t$$

et la variation à calculer est le sup de quantités de la forme

$$E[\ \Sigma_i \int_0^\infty |\lambda_t(a_{i+1},.)-\lambda_t(a_i,.)|d\langle X,X\rangle_t\ ]$$

où les a_i forment une subdivision finie de la droite. En pratique, on parviendra à choisir les fonctions $\lambda_t(a,\omega)$ de telle sorte que
- pour (t,ω) fixés, $\lambda_t(.,\omega)$ soit une fonction à variation bornée, continue à droite en a ;
- pour a fixé, $\lambda_.(a,.)$ soit une version de la densité (12)

et alors la variation de X par rapport aux tribus grossies est

(13) $$E[\ \int_0^\infty d\langle X,X\rangle_t \int_{\mathbb{R}} |\lambda_t(da,.)|\ ]\ .$$

CONSIDERATIONS HEURISTIQUES ET MISES EN GARDE. Nous continuons à supposer que $\underline{\underline{E}}$ est engendrée par une v.a. réelle L, et que X est de carré intégrable sur tout intervalle fini. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}$, telle que la loi de L soit absolument continue par rapport à μ (dans les cas usuels, la loi de L elle même, ou bien la mesure de Lebesgue). Au lieu des martingales $\Lambda_t^U = P\{L\in U|\underline{\underline{F}}_t\}$, il semble plus naturel de chercher à construire des martingales "infinitésimales" Λ_t^u satisfaisant à

(14) $$P\{L\in du|\underline{\underline{F}}_t\} = \mu(du)\Lambda_t^u$$

On posera alors $d\langle X,\Lambda^u\rangle_t = \lambda_t^u d\langle X,X\rangle_t$, et la variation cherchée sera simplement

$$E[\int_0^\infty d\langle X,X\rangle_t \int_{\mathbb{R}} |\lambda_t^u|\mu(du)\ ]$$

Une autre hypothèse naturelle est la suivante : posons

$$\tilde{A}_t(u,.) = \int_0^t \frac{1}{\Lambda_{s-}^u}\lambda_s^u d\langle X,X\rangle_s$$

alors, d'après la formule (4), le processus à variation finie prévisible intervenant dans la décomposition canonique de X par rapport à la filtration grossie devrait être

$$A_t(\omega) = \tilde{A}_t(L(\omega),\omega)$$

et en particulier, dA_t devrait être absolument continu par rapport à $d\langle X,X\rangle_t$. Malheureusement, ces extrapolations du cas où $\underline{\underline{E}}$ est une tribu finie au cas général ne sont pas correctes : les processus (Λ_t^u) ne sont pas nécessairement des martingales (ce sont le plus souvent des martingales locales), et il n'est pas évident que l'on ait avec la notation de (12) $\lambda_t(a,.) = \int_{-\infty}^a \lambda_t^u \mu(du)$. De plus, il se peut que X soit une semimartingale par rapport à la filtration grossie, et que le processus à variation finie prévisible associé <u>ne soit pas absolument continu</u> par rapport à $d\langle X,X\rangle$. Un contre-exemple de Jeulin et Yor figure dans le séminaire XIII, p. 356.

On peut toutefois affirmer le résultat suivant : si nous désintégrons P suivant la valeur de la v.a. L :

(15) $$P(A\cap\{L\in U\}) = \int_U P_u(A)\mu(du) \qquad (A\in\underline{\underline{A}}\ ,\ U\in\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$$

(ici μ est la loi de L, et P_u est la loi conditionnelle sur Ω sachant que L=u), et si pour μ-presque tout u X est une semimartingale/$\underline{\underline{F}}$,$P_u$, alors X est une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$,P : en effet, la v.a. L étant dégénérée pour la loi P_u , X est une semimartingale/G,P_u et donc, d'après le théorème de Jacod sur les intégrales de lois de semimartingales, une semimartingale/G,$\underline{\underline{P}}$ (séminaire XI, p. 485). Lorsque les lois P_u sont absolument continues par rapport à P - ce qui est exceptionnel - on peut affirmer que les processus Λ_t^u de la formule (14) existent, et sont de vraies martingales.

De même, il est facile de voir que si X est une semimartingale pour (μ-presque) toute loi P_u , X est en fait spéciale pour (μ-p) toute loi P_u, donc il existe un processus à variation finie prévisible $\tilde{A}^u$ tel que $X-\tilde{A}^u$ soit une martingale locale/$\underline{\underline{F}}$,$P_u$ ou (ce qui revient au même) une martingale locale/$\underline{\underline{G}}$,$P_u$, et l'on peut en choisir une version qui dépend mesurablement de u (Stricker-Yor [1]). Posons alors $A_t(\omega)=\tilde{A}_t^{L(\omega)}(\omega)$, processus à variation finie prévisible de la filtration $\underline{\underline{G}}$; comme L=u P_u-p.s. pour (μ-p) tout u , X-A est une martingale locale/$\underline{\underline{G}}$,$P_u$, et il en résulte sans peine que X-A est une martingale locale/$\underline{\underline{G}}$,P (prendre des t.d'a. T_u dépendant mesurablement de u et réduisant ce processus, et poser $T(\omega)=T_{L(\omega)}(\omega)$... les détails sont laissés au lecteur).

RESULTATS NEGATIFS

Le théorème 2 ne répond pas à toutes les questions : il permet de vérifier qu'une martingale/$\underline{\underline{F}}$ X est une quasimartingale/$\underline{\underline{G}}$, donc une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$, mais il ne permet pas de vérifier que X <u>n'est pas</u> une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$ (il existe des semimartingales qui ne sont pas des quasimartingales !). Le théorème suivant répond partiellement à cette question. Il est vrai pour des filtrations $\underline{\underline{F}}\subset\underline{\underline{G}}$ arbitraires.

THEOREME 3. <u>Soit</u> X <u>une martingale locale/</u>$\underline{\underline{F}}$, <u>qui est aussi une semi-martingale/</u>$\underline{\underline{G}}$. <u>Soit</u> H <u>prévisible/</u>$\underline{\underline{F}}$, <u>tel que</u> Y=H·X <u>existe en tant que martingale locale/</u>$\underline{\underline{F}}$. <u>Soit</u> X=M+A <u>la décomposition canonique</u>[1] <u>de</u> X <u>par rapport à</u> $\underline{\underline{G}}$. <u>Pour que</u> Y <u>soit une semimartingale/</u>$\underline{\underline{G}}$, <u>il faut et il suffit que</u> $\int_0^t |H_s||dA_s| < \infty$ <u>p.s.</u> <u>pour</u> t <u>fini</u>, <u>et alors</u> Y=H·M+H·A .

DEMONSTRATION. On peut supposer que X,M,A sont nuls en 0 ; par arrêt à des t. d'a. convenables, on peut supposer que X et Y appartiennent à $\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}})$. Par arrêt à n constant, on peut supposer que X est une semimartingale jusqu'à l'infini par rapport à $\underline{\underline{G}}$, et se ramener à vérifier que

$$\text{Y semimartingale}/\underline{\underline{G}} \text{ jusqu'à l'infini} \iff \int_0^\infty |H_s||dA_s| < \infty \text{ p.s.}$$

Nous posons $J_n=I_{\{|H|\leq n\}}$, $H_n=J_nH$, processus prévisible borné. Une inégalité de Yor (voir aussi une démonstration simple de Lepingle dans le séminaire XII, p. 135-136) dit que

$$\left.\begin{matrix} E[[A,A]_\infty^{1/2}] \\ E[[M,M]_\infty^{1/2}] \end{matrix}\right\} \leq cE[[X,X]_\infty^{1/2}]$$

Remplaçant X par $H_n\cdot X$, puis faisant tendre n vers +∞ , on voit que H·M existe toujours au sens des martingales locales/$\underline{\underline{G}}$, et que $H_n\cdot M \to H\cdot M$ dans $\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{G}})$. Cela donne un sens à la dernière phrase de l'énoncé.

<u>Supposons que</u> $\int_0^\infty |H_s||dA_s| < \infty$. Alors l'égalité $H_n\cdot X=H_n\cdot M+H_n\cdot A$ nous donne par convergence en probabilité Y=H·M+H·A , donc Y est une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$ jusqu'à l'infini.

<u>Supposons que</u> Y <u>soit une semimartingale/</u>$\underline{\underline{G}}$ <u>jusqu'à l'infini</u>. Soit Y=N+B sa décomposition canonique [1] par rapport à $\underline{\underline{G}}$. Nous avons $J_n\cdot Y = J_n\cdot(H\cdot X)= H_n\cdot X$ dans $\underline{\underline{F}}$, donc dans $\underline{\underline{G}}$. Mais $J_n\cdot Y = J_n\cdot N+J_n\cdot B$, $H_n\cdot X=H_n\cdot M+H_n\cdot A$ (J_n et H_n sont bornés), et l'unicité de la décomposition canonique/$\underline{\underline{G}}$ nous donne

$$J_n\cdot N = H_n\cdot M \quad , \quad J_n\cdot B = H_n\cdot A$$

Le côté droit nous donne aussi $\int_0^\infty |J_{ns}||dB_s|=\int_0^\infty |H_{ns}||dA_s|$. Faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons $\int_0^\infty |H_s||dA_s| = \int_0^\infty |dB_s|$, qui est p.s. fini.

REMARQUES. a) Ce résultat se rattache à la théorie des intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés, développée récemment par Jacod.

b) Dans les exemples, Jeulin transforme ce théorème en un critère beaucoup plus maniable. Nous y reviendrons à la fin, après un bref commentaire sur le "grossissement progressif".

1. X est spéciale/$\underline{\underline{F}}$, donc aussi spéciale/$\underline{\underline{G}}$. De même pour Y .

c) Le théorème 3 met le doigt sur l'un des rares pièges de la théorie de l'intégrale stochastique : l'intégrale stochastique $H\cdot X$ (d'un processus prévisible non localement borné) peut exister dans la petite filtration, et ne pas exister dans la grande. C'est une bonne illustration du fait que l'intégration ne se fait pas toujours " trajectoire par trajectoire " : les trajectoires des deux processus sont les mêmes dans les deux cas.

II. SUR LE GROSSISSEMENT PROGRESSIF

Nous considérons une tribu séparable $\underline{\underline{E}}$ (que nous représentons comme plus haut comme $\bigvee_k \underline{\underline{E}}^k$, où $\underline{\underline{E}}^k$ est engendrée par une partition finie Π^k) Nous considérons une v.a. positive L , $\underline{\underline{E}}$-mesurable, et nous désignons par D_n l'ensemble formé des nombres de la forme $k2^{-n}$ $(k=0,1,..,2^{2n})$ et $+\infty$, par L_n la v.a. $\inf\{t\in D_n : t\geq L\}$, de sorte que L_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et converge en décroissant vers L . Nous supposerons que L_n est $\underline{\underline{E}}_n$-mesurable pour tout n , ce qui revient à choisir des partitions suffisamment riches, et ne restreint pas la généralité.

La filtration grossie $(\underline{\underline{G}}_t)$, obtenue en introduisant à l'instant L les connaissances relatives à la tribu $\underline{\underline{E}}$, a été définie dans la formule (2)[1]. Nous désignons

- par $\underline{\underline{G}}^n$ la filtration obtenue en adjoignant $\underline{\underline{E}}^n$ à l'instant L_n
- par $\underline{\underline{G}}^{np}$ la filtration obtenue en adjoignant $\underline{\underline{E}}^{n+p}$ à l'instant L_n
- par $\underline{\underline{G}}^{n\infty}$ la filtration obtenue en adjoignant $\underline{\underline{E}}$ à l'instant L_n

Nous avons pour les tribus prévisibles correspondantes, avec des notations qui se comprennent d'elles mêmes

$$\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}}) \subset \underline{\underline{P}}^n \subset \underline{\underline{P}}^{np} \subset \underline{\underline{P}}^{n\infty} \subset \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{G}}) \quad , \quad \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{G}}) = \bigvee_n \underline{\underline{P}}^n$$

X désignant comme plus haut une martingale appartenant à $\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}})$, nulle en 0, nous allons calculer $\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}}^n}(X)$ (ou $\mathrm{Var}_{\underline{\underline{G}}^{np}}(X)$). Seulement, ce résultat a une valeur beaucoup moins grande que le lemme 1 : ce n'est pas ainsi que l'on établit le théorème fondamental de Barlow et Yor sur le grossissement progressif en une fin d'optionnel.

Nous désignons par $\{U^1,U^2,\dots U^k\}$ la partition finie Π^{np} (Π^n si $p=0$), par ℓ_j la valeur constante de L_n sur U^j. Soit (s_i) une subdivision finie de $\mathbb{R}_+$ contenant D_n . Il est assez facile d'écrire la forme générale des processus prévisibles élémentaires de la filtration $\underline{\underline{G}}^{np}$, nuls en 0, constants sur chaque intervalle $]s_i,s_{i+1}]$. Un tel processus H s'écrit

1. Il est facile de voir sur la formule (2) que plus la v.a. L (supposée $\underline{\underline{E}}$-mesurable) est grande, plus la filtration $\underline{\underline{G}}$ est petite.

$$H = KI_{]0,L_n]} + \sum_{ij} I_{U^j} I_{\{s_i \geq \ell_j\}} H^{ij} I_{]s_i, s_{i+1}]}$$

où K est un processus prévisible élémentaire de la filtration $\underline{\underline{F}}$, nul en 0 et constant sur les intervalles $]s_i, s_{i+1}]$, et où H^{ij} est $\underline{\underline{F}}_{s_i}$-mesurable.

Estimer la variation de X par rapport à $\underline{\underline{G}}^{np}$ revient à calculer $\sup_H E[(H\cdot X)_\infty]$ pour les H du type précédent tels que $|H|\leq 1$. Cela revient à choisir arbitrairement K et les H^{ij}, tous majorés par 1 en valeur absolue, et l'on trouve donc

$$\sup_K E[(K\cdot X)_{L_n}] + \sup_{(s_i)} \sum_{ij} \sup_{H^{ij}} E[I_{U^j} I_{\{s_i \geq \ell_j\}} H^{ij} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i})]$$

Le premier terme ne pose aucun problème, car il est majoré par $E[(K\cdot X)^*]$, qui reste borné puisque $X\in\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}})$. Pour évaluer le second terme , nous introduisons, comme pour le grossissement initial, les martingales/$\underline{\underline{F}}$ $Z^j_t = P(U^j|\underline{\underline{F}}_t)$, et nous obtenons pour le terme général de la somme

$$\sup_{H^{ij}} E[I_{\{s_i \geq \ell_j\}} H^{ij} \langle X, Z^j\rangle_{s_i}^{s_{i+1}}] = E[I_{\{s_i \geq \ell_j\}} |\langle X, Z^j\rangle_{s_i}^{s_{i+1}}|]$$

Puis pour le second terme tout entier

$$\sum_j E[\int_{\ell_j}^{\infty} |d\langle X, Z^j\rangle_s|]$$

(à comparer avec (5) : $\sum_j E[\int^\infty |d\langle X,Z^j\rangle_s|]$). On en déduit aisément la variation de X par rapport à $^0\underline{\underline{G}}^{n\infty}$: pour tout élément t de D_n , désignons par I_t la bimesure

$$I_t(U,V) = E[\int_t^\infty I_V(s) d\langle X, Z^{U\cap\{L_n=t\}}\rangle_s] \quad (U\in\underline{\underline{E}} \ , \ V\in\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$$

soit avec les notations de (6) $I_t(U,V)=I_X(U\cap\{L_n=t\}, V\cap[t,\infty[)$. Alors la variation cherchée est $\sum_{t\in D_n} \|I_t\|$. Mais il n'est pas facile d' exprimer le passage à la limite de L_n à L .

III. EXEMPLES DE GROSSISSEMENT INITIAL

ETUDE DE L'EXEMPLE DU SEMINAIRE XIII (LES "FAUX-AMIS")

Cet exemple est le plus simple de tous, et il a été étudié par Jeulin et Yor dans le séminaire XIII au moyen de certaines inégalités de Hardy. La famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien X issu de 0, complétée de la façon habituelle (cela suffit pour la rendre continue à droite ; nous poserons $\underline{\underline{F}}^o_t=\underline{\underline{T}}(X_s, s\leq t)$ sans complétion). La famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ s'obtient par grossissement initial au moyen de la v.a. X_1 : dans cette filtration, on sait à l'instant 0 où la trajectoire passera à l'instant 1. On constate que X reste une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$, mais que l'hypothèse (H') n'est pas satisfaite, <u>bien que toute martingale/$\underline{\underline{F}}$ soit une</u>

intégrale stochastique de X : la pathologie de l'i.s. signalée en remarque c) après le théorème 3 a été découverte sur cet exemple, d'où le nom de "travail sur les faux-amis" donné à l'article de Jeulin et Yor.

On a $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_t$ pour $t\geq 1$, et nous pouvons donc nous borner à travailler sur l'intervalle $[0,1]$. Montrons que X est une quasimartingale/$\underline{\underline{G}}$.

Première méthode : nous avons $E[X_{t+h}-X_t|\underline{\underline{G}}_t]=E[X_{t+h}-X_t|\underline{\underline{F}}_t,X_1]$ $(0\leq t<t+h<1)$. La tribu de conditionnement est engendrée aussi par X_1-X_t et $\underline{\underline{F}}_t$. Or $\underline{\underline{F}}_t$ est indépendante de $\underline{\underline{T}}(X_1-X_t,X_{t+h}-X_t)$, et l'e.c. vaut $E[X_{t+h}-X_t|X_1-X_t]$. Comme on est dans le cas gaussien, elle peut s'écrire $a(X_1-X_t)$, et la constante a se détermine aussitôt :

(16) $$E[X_{t+h}-X_t|\underline{\underline{G}}_t] = \frac{h}{1-t}(X_1-X_t)$$

Par conséquent $V_{\underline{\underline{G}}}(X) = \int_0^1 \frac{E[|X_1-X_t|]}{1-t}dt$ qui est fini, et X est une quasimartingale/$\underline{\underline{G}}$[1]. Le processus à variation finie prévisible associé à X relativement à $\underline{\underline{G}}$ est donné par

$$A_t = \lim E[X_{s_{i+1}}-X_{s_i}|\underline{\underline{G}}_{s_i}]$$ (limite faible dans L^1, pour des subdivisions (s_i) de $[0,t]$ devenant arbitrairement fines)

d'où aussitôt

(17) $$A_t = \int_0^t \frac{X_1-X_s}{1-s}ds \quad (t\leq 1)$$

La martingale/$\underline{\underline{G}}$ $M=X-A$ est continue, et $[M,M]_t=[X,X]_t=t$, donc M est un mouvement brownien/$\underline{\underline{G}}$.

Seconde méthode. Soit P_u la loi conditionnelle sachant que $X_1=u$. Le calcul explicite de P_u (pont brownien entre 0 et u) est classique : P_u est absolument continue par rapport à P sur toute tribu $\underline{\underline{F}}_t$, t<1 (mais non sur $\underline{\underline{F}}_1^\circ$) avec la densité

(18) $$\Lambda_t^u = \frac{e^{u^2/2}}{\sqrt{1-t}}\,e^{-(X_t-u)^2/2(1-t)}$$

(c'est la "martingale infinitésimale" de la formule (14), μ étant la loi de X_1). Appliquons le théorème de Girsanov sur $[0,1[$: on peut écrire

$$X=M^u+A^u\ ,\quad M^u=X-\langle X,L^u\rangle\ ,\quad \tilde{A}^u=\langle X,L^u\rangle \quad \text{où } L_t^u=\int_0^t d\Lambda_s^u/\Lambda_s^u$$

On fait les calculs explicites par la formule d'Ito, et on obtient

$$\tilde{A}_t^u = \int_0^t \frac{u-X_s}{1-s}ds$$

Pour vérifier que X est une semimartingale/P, il suffit de vérifier que X est une semimartingale/P_u pour presque tout u. Or M^u est un mouvement brownien/P_u sur $[0,1[$, donc une semimartingale/P_u jusqu'en 1. Il est certainement vrai que $E_u[\int_0^1|d\tilde{A}_s^u|]<\infty$ pour tout u , mais il nous suffit de le vérifier pour presque tout u, et l'on a

---

1. De la classe (D) puisque $X_1^*\in L^1$, donc A est à variation intégrable et le passage à la limite ci-dessous est justifié.

$$\int\mu(du)E_u[\int_0^1 \frac{|u-X_s|}{1-s}ds] = E[\int_0^1 \frac{|X_1-X_s|}{1-s}ds\ ] < \infty$$

Alors on a $A_t(\omega)=\tilde{A}_t^{X_1(\omega)}(\omega)$, qui nous redonne la formule (17).

On notera qu'aucune des deux méthodes n'utilise la condition donnée par le théorème 2. En revanche, nous allons utiliser le théorème 3 : soit M une martingale/$\underline{\underline{F}}$, nulle en 0 ; M est de la forme H•X, où d'ailleurs $H_t=d\langle X,M\rangle_t/d\langle X,X\rangle_t = d\langle X,M\rangle_t/dt$. Le théorème 3 nous donne le résultat suivant : <u>pour que</u> M <u>soit une semimartingale</u>/$\underline{\underline{G}}$, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u>

$$(19)\qquad \int_0^1 |H_s||dA_s| = \int_0^1 |H_s|\frac{|X_1-X_s|}{1-s}\,ds < \infty \quad \text{p.s.}$$

Malheureusement, cette condition est malcommode : on a bien envie de remplacer $|X_1-X_s|$ par $E[|X_1-X_s||\underline{\underline{F}}_s]=c\sqrt{1-s}$. Autrement dit, on souhaite que les conditions suivantes soient équivalentes, pour un processus prévisible H (par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$: la filtration $\underline{\underline{G}}$ n'intervient plus) tel que $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$ p.s.

a) $\int_0^1 |H_s|\frac{|X_1-X_s|}{1-s}\,ds < \infty$ p.s. et b) $\int_0^1 \frac{|H_s|ds}{\sqrt{1-s}}\,ds < \infty$ p.s.

Yor et Jeulin ont établi cette équivalence à l'aide de l'inégalité de Hardy, mais Jeulin a dégagé ensuite une sorte de lemme de Borel-Cantelli en temps continu, que nous allons présenter maintenant. Nous pouvons supposer H positif, et introduire le <u>processus croissant prévisible</u>, fini pour t<1

$$(20)\qquad U_t = \int_0^t H_s ds/\sqrt{1-s}$$

et le <u>processus mesurable positif</u>

$$(21)\qquad R_t = |X_1-X_s|/\sqrt{1-s}\quad .$$

D'après la propriété de Markov forte, pour tout temps d'arrêt T<1, R_T est indépendante de $\underline{\underline{F}}_T$, avec une loi λ (la même quel que soit T), qui est celle de la valeur absolue d'une v.a. normale centrée réduite. Nous retiendrons simplement ici les propriétés

(22) λ est une loi sur $\mathbb{R}_+$, $\lambda(\{0\})=0$, $\int x\lambda(dx)=c<\infty$
pour tout temps prévisible T<1, R_T est indépendant de $\underline{\underline{F}}_{T-}$ et de loi λ .

THEOREME 4 . <u>Sous ces hypothèses</u>, <u>les deux ensembles</u>

$$C_1 = \{\int_0^1 R_s dU_s < \infty\ \} \qquad \underline{\text{et}} \qquad C_2 = \{U_1<\infty\}$$

<u>sont p.s. égaux</u>.

DEMONSTRATION. La projection duale prévisible de R•U est cU, donc $C_1\subset C_2$ p.s. d'après le "lemme de Borel-Cantelli" de P. Lévy .

Pour établir l'inclusion inverse, désignons par J une indicatrice, par J_t la martingale $E[J|\underline{\underline{F}}_t]$, et évaluons pour un t. d'a. prévisible T<1 l'espérance $E[JR_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]$. Nous avons

$$E[JR_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] = \int_0^\infty du\, E[JI_{\{R_T>u\}}|\underline{\underline{F}}_{T-}]$$

Mais
$$E[JI_{\{R_T>u\}}|\underline{\underline{F}}_{T-}] = E[(J-I_{\{R_T\leqq u\}})^+|\underline{\underline{F}}_{T-}] \geqq E[J-I_{\{R_T\leqq u\}}|\underline{\underline{F}}_{T-}]^+$$
$$= (J_{T-}-\lambda([0,u]))^+$$

Intégrant en u, nous trouvons

$$E[JR_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] \geqq \Phi(J_{T-})$$

où $\Phi(a) = \int_0^\infty (a-\lambda([0,u]))^+du$ est une fonction croissante et continue sur $[0,1[$, qui tend vers $\int x\lambda(dx)$ lorsque $a\uparrow 1$. Comme λ ne charge pas 0, on a $\Phi(a)>0$ pour tout $a>0$.

Choisissons maintenant l'indicatrice telle que $E[J\int_0^1 R_s dU_s] < \infty$. La projection duale prévisible de $\int_0^{\cdot} JR_s dU_s$ majore $\int_0^{\cdot}\Phi(J_{s-})dU_s$, et on a donc $\int_0^1 \Phi(J_{s-})dU_s < \infty$ p.s. ; mais si $J(\omega)=1$, la trajectoire $J_{\cdot}(\omega)$ est p.s. bornée inférieurement sur $[0,1]$, donc aussi $\Phi(J_{\cdot}(\omega))$, et finalement $U_1(\omega)<\infty$ p.s. sur $\{J=1\}$.

Pour obtenir le théorème 4, il ne reste plus qu'à appliquer cela en prenant pour J l'indicatrice de $\{\int_0^1 R_s dU_s \leqq n\}$, et à faire tendre n vers l'infini.

REMARQUE . Si $U_t=\int_0^t H_s ds$ avec $H\geqq 0$ adapté, on peut se borner à supposer que pour t <u>constant</u> R_t est indépendant de $\underline{\underline{F}}_t$, de loi λ. On peut même faire un peu mieux : supposer que R_t est indépendant de $\underline{\underline{F}}_t$ avec une loi λ_t <u>dépendant de</u> t (si l'on a une propriété de ce genre aux t. d'a., il est facile de voir que la loi doit être la même pour tous les t. d'a.)... et tenter dans tel ou tel cas particulier, où l'on aura quelque uniformité en les λ_t , d'appliquer la méthode ci-dessus (je ne suis pas arrivé à dégager une condition générale).

SECOND EXEMPLE

Ce très joli exemple va être traité en détail, car il n'est pas très compliqué, et offre un double intérêt : il utilise le théorème 2 de façon essentielle, les lois conditionnelles P_u <u>n'étant pas absolument continues par rapport à</u> P ; d'autre part, contrairement à l'exemple précédent, l'hypothèse (H') est satisfaite.

On pose comme d'habitude $T_z=\inf\{t : X_t=z\}$, et $S_t = \sup_{s\leqq t} X_s$ (temps d'atteinte et maxima pour la trajectoire brownienne). On rappelle le résultat classique $P\{S_t>u\}=2P\{X_t>u\}$ pour $u>0$ (Bachelier, 1900), qui s'écrit aussi

(23) $$P\{S_t>u\} = P\{T_u<z\} = g(u,t) = c\int_{u/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-r^2/2)dr \quad (c=\sqrt{2/\pi})$$

Nous poserons $g'_u=g^1$, $g'_t=g^2$, $g''_{uu}=g^3$; g satisfait à l'équation de la chaleur $g^3=2g^2$, et l'on a

(24) $$g^1(u,t) = -\frac{c}{\sqrt{t}} \exp(-u^2/2t) \ .$$

<u>Nous allons adjoindre la v.a.</u> S_1 <u>à la tribu</u> $\underline{\underline{F}}_0$ pour construire la filtration grossie $\underline{\underline{G}}$. Il est clair que les lois conditionnelles $P_u=P(\,.\,|S_1=u)$ ne sont pas absolument continues par rapport à P : en effet, le processus X sous la loi P_u se comporte comme un mouvement brownien jusqu'à l'instant T_u , mais ensuite, comme u est le maximum de la trajectoire, il doit rester sur $]-\infty,u]$ entre T_u et 1, ce qui est un comportement "singulier" par rapport au brownien.

On peut se borner à étudier les filtrations pour $0\leqq t\leqq 1$.

Calculons les martingales (11)

$$\begin{aligned}\Lambda_t(u,.) &= P\{S_1>u|\underline{\underline{F}}_t\} = P\{T_u<1|\underline{\underline{F}}_t\} = I_{\{T_u\leqq t\}}+I_{\{t<T_u\}}P\{T_u<1|\underline{\underline{F}}_t\}\\ &= I_{\{T_u\leqq t\}}+I_{\{t<T_u\}}g(u-X_t,1-t)\end{aligned}$$

Cette martingale est continue, arrêtée à l'instant T_u, donc simplement

(25) $$\Lambda_t(u,.) = g(u-X_{t\wedge T_u} ,1-t\wedge T_u) \quad \text{pour } t\leqq 1$$

d'où par la formule d'Ito, deux termes disparaissant grâce à l'équation de la chaleur

(26) $$\begin{aligned}\Lambda_t(u,.)&= g(u,0) -\int_0^{t\wedge T_u} g^1(u-X_s,1-s)dX_s\\ &= g(u,0) + \int_0^{t\wedge T_u} \frac{c}{\sqrt{1-r}}\exp\Big(- \frac{(u-X_r)^2}{2(1-r)}\Big)dX_r\end{aligned}$$

On peut remplacer l'intervalle d'intégration par (0,t) à condition d'introduire dans l'intégrale $I_{\{r<T_u\}}=I_{\{S_r<u\}}$. Soit alors $M=H\cdot X$ une martingale/$\underline{\underline{F}}$ de carré intégrable ; on a

(27) $$< \Lambda(u,.),M >_t = \int_0^t \frac{c}{\sqrt{1-r}}\exp(\ )I_{\{S_r<u\}}H_r dr$$

La mesure $d_{u,t}< \Lambda(u,.),M>_t$ (ω fixé) comporte deux termes, en raison de la présence de $I_{\{S_r<u\}}$: une partie absolument continue par rapport à $du\times dr$, admettant pour densité

$$H_r I_{\{u>S_r(\omega)\}} \frac{d}{du}\Big(\frac{c}{\sqrt{1-r}}\exp(\ )\Big)$$

et une partie singulière portée par la droite $u=S_r(\omega)$, avec densité par rapport à dr

$$H_r \frac{c}{\sqrt{1-r}}\exp(\ ) \quad \text{avec } u=S_r \ .$$

On s'intéresse à la valeur absolue de cette mesure : il faut prendre séparément les valeurs absolues des deux termes, ce qui est immédiat, car la dérivée dans le premier terme a un signe constant. Au bout du compte, la norme de la bimesure est

(28) $$2E\left[\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-r}} \exp\left(-\frac{(S_r-X_r)^2}{2(1-r)}\right) |H_r| dr \right]$$

Pour montrer qu'elle est finie, on applique l'inégalité de Schwarz. Il sort d'une part $E[\int_0^1 H_r^2 dr]$, fini par hypothèse, et d'autre part

(29) $$E\left[\int_0^1 \frac{1}{1-r} \exp\left(- \frac{(S_r-X_r)^2}{1-r} \right) dr \right]$$

On utilise maintenant le fait que le processus (S_r-X_r) a même loi que le processus $|X_r|$, de sorte que

$$E\left[\exp\left(-\frac{(S_r-X_r)^2}{1-r}\right)\right] = a\sqrt{1-r}$$

et l'intégrale (29) est convergente. Jeulin pousse les calculs plus loin, en exprimant explicitement la décomposition canonique de X (et donc de $M=H\cdot X$) dans la filtration grossie.

EXEMPLES ULTERIEURS

Ici nous cessons de donner les détails, afin de ne pas publier l'article de Jeulin à la place de son auteur ! L'exemple suivant est celui de la filtration obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}_0$ la v.a. T_1 ; le résultat est celui-ci

<u>Une martingale</u> M <u>de</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>reste une semimartingale après adjonction de</u> T_1 <u>à</u> $\underline{\underline{F}}_0$ <u>si et seulement si la v.a.</u>

(30) $$\int_0^{T_1} \frac{1}{1-X_r} |d\langle X,M\rangle_r|$$

<u>est p.s. finie</u>. <u>Cette condition est satisfaite par</u> X <u>lui même</u>, <u>mais l'</u> <u>l'hypothèse</u> (H') <u>n'est pas vérifiée</u>.

De plus, dans ce cas-ci comme dans tous les autres cas, Jeulin peut décomposer explicitement M lorsque celle-ci reste une semimartingale. Ce qu'on a fait pour T_1 peut évidemment se faire pour T_a quelconque ; le processus (T_a) étant à accroissements indépendants, on peut adjoindre toutes les v.a. $T_{k/n}$ (k entier, n fixé), faire tendre n vers $+\infty$. On a

M <u>reste une semimartingale après adjonction à</u> $\underline{\underline{F}}_0$ <u>de toutes les v.a.</u> T_a à $\underline{\underline{F}}_0$ <u>si et seulement si le processus croissant</u>

(31) $$\int_0^t \frac{1}{S_r-X_r} |d\langle X,M\rangle_r|$$

<u>est à valeurs finies</u>.

La tribu engendrée par les T_a est aussi engendrée par les S_t . Au prix de quelques manipulations, on parvient à donner une autre forme à ce résultat, beaucoup plus frappante : soit $\underline{\underline{E}}$ la tribu engendrée par le processus (L_t^0), temps local de X en 0 (ou encore, par les v.a. $D_t=\inf\{s>t : X_s=0\}$, i.e. par l'ensemble des zéros de X), et soit $\underline{\underline{G}}$ la filtration obtenue en adjoignant $\underline{\underline{E}}$ à $\underline{\underline{F}}_0$:

Pour que M reste une semimartingale par rapport à $\underline{\underline{G}}$, il faut et il suffit que le processus croissant

$$\int_0^t \frac{1}{|X_r|}|d\langle X,M\rangle_r| \tag{32}$$

soit p.s. à valeurs finies. Cette condition n'est pas satisfaite par le processus X lui même.

En revanche, elle est satisfaite par $X\cdot X$. Autrement dit, X^2 est une semimartingale/$\underline{\underline{G}}$, puisque $X_t^2-t = 2\int_0^t X_s dX_s$.

BIBLIOGRAPHIE

BARLOW (M.) [1]. Study of a filtration expanded to include an honest time. ZW 44, 1978, p.307-323.

HOROWITZ (J.) [1]. Une remarque sur les bimesures. Sém. Prob. XI, p.59-64. LN 581, 1970.

JEULIN (T.). [1]. Grossissement d'une filtration et applications. Sém. Prob. XIII, 1979, p. 574-609. LN 721.

----- [2],[3]. Articles à paraître (le premier sans doute dans le ZW, le second, plus pédagogique quant à la forme, reprenant toute la question du grossissement, avec les applications).

JEULIN (T.) et YOR (M.) [1]. Grossissement d'une filtration et semimartingales. Formules explicites. Sém. Prob. XII, 1978, p. 78-97. LN 649.

----- [2]. Inégalité de Hardy, semimartingales et faux-amis. Sém. Prob. XIII, 1979, p. 329-356.

STRICKER (C.) et YOR (M.) [1]. Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. ZW 45, 1978, p. 109-134.

YOR (M.) [1]. Grossissement d'une filtration et semimartingales : théorèmes généraux. Sém. Prob. XII, 1978, p. 61-69.