SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU
PAUL-ANDRÉ MEYER
CHRISTOPHE STRICKER

Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 128-139
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__128_0>

SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES DE PROCESSUS PREVISIBLES NON BORNES

par C.S. Chou, P.A. Meyer, et C. Stricker

La théorie de l'intégrale stochastique de processus prévisibles non localement bornés par rapport aux semimartingales est due à J. Jacod ([1], [2]). Notre propre expérience nous a montré que les résultats de Jacod sont extrêmement utiles, mais que sa méthode (qui utilise une caractérisation des sauts des semimartingales) en rend l'abord assez difficile. Nous les présentons ici suivant une autre méthode, qui utilise la topologie des semimartingales et un résultat explicite de décomposition, et qui nous paraît plus "pédagogique". Jacod est d'ailleurs parvenu, de son côté, au même lemme de décomposition, et l'a utilisé pour construire les intégrales stochastiques vectorielles ([3]), tandis que Mémin a noté les rapports entre ces i.s. et la topologie des semimartingales ([1]). Cela nous confirme dans notre impression qu'un exposé rédigé suivant cette méthode peut rendre service aux lecteurs du séminaire.

Notre exposé utilise les travaux de Jacod et Mémin cités plus haut, ainsi que des notes communiquées par K.A. Yen, où celui-ci développait (sans connaître les travaux de Jacod) la théorie de l'i.s. des processus prévisibles non bornés(1). Nous remercions particulièrement J. Jacod pour ses remarques, faites sur une première rédaction de l'exposé.

RAPPELS SUR LA TOPOLOGIE DES SEMIMARTINGALES

On se place sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ habituel. Soient H un processus prévisible, X une semimartingale. Nous dirons que H <u>est intégrable par rapport à</u> X <u>au sens usuel</u> dans chacun des deux cas suivants

1) X est à variation finie, et le processus $\int_0^t |H_s||dX_s|$ est à valeurs finies ; alors H·X est le processus à variation finie $\int_{[0,.[} H_s dX_s$, où l'intégration s'entend au sens de Stieltjes.

2) X est une martingale locale, et le processus croissant $(\int_0^t H_s^2 d[X,X]_s)^{1/2}$ est localement intégrable. Alors H·X est une martingale locale.

Il est bien connu que ces deux définitions sont compatibles : si H et X satisfont à la fois aux deux systèmes de conditions, alors l'i.s. au sens des martingales locales et l'intégrale de Stieltjes coïncident. Cela

1. Ce travail de Yen comportait malheureusement une erreur, ce qui fait qu'il n'a jamais été publié . Une nouvelle version (tenant compte de cet exposé) figure dans ce volume.

donne un sens à la définition suivante, que nous appellerons la <u>définition élémentaire</u> (d.e.) des intégrales stochastiques de processus prévisibles quelconques :

<u>On dit que</u> H (<u>prévisible</u>) <u>est intégrable par rapport à la semimartingale</u> X <u>s'il existe une décomposition</u> $X=M+A$ (M martingale locale, A à variation finie) <u>telle que</u> $H\cdot M$ <u>et</u> $H\cdot A$ <u>existent au sens usuel</u>, <u>et l'on pose alors</u> $H\cdot X=H\cdot M+H\cdot A$, <u>qui ne dépend pas de la décomposition choisie</u>.

Cette définition a l'avantage d'être très simple, mais elle ne rend pas les choses très faciles : par exemple, il n'est nullement évident que l'intégrabilité et l'i.s. soient invariantes par changement de loi, ni même que l'intégrale soit une opération linéaire en H ! Aussi allons nous introduire une autre définition, la <u>définition sophistiquée</u> (d.s.), qui sera moins intuitive, mais plus commode. Pour cela, il faut quelques rappels :

$\underline{\underline{H}}^1$ est l'espace des martingales X telles que $\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}=E[[X,X]_\infty^{1/2}] < \infty$.

$\underline{\underline{V}}^1$ est l'espace des processus A à variation intégrable, avec la norme $\|A\|_{\underline{\underline{V}}^1} = E[\int_{[0,\infty[} |dA_s|]$.

$\underline{\underline{S}}^1$ (souvent appelé <u>espace</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>de semimartingales</u>) est l'espace $\underline{\underline{H}}^1+\underline{\underline{V}}^1$. Nous définirons la norme de $X\in\underline{\underline{S}}^1$ comme $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^1}=\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}+\|A\|_{\underline{\underline{V}}^1}$, où $X=M+A$ est la décomposition canonique de X (nous attribuons par convention la v.a. X_0 au processus A, de sorte que la martingale M est nulle en 0)

$\underline{\underline{S}}$ est l'espace de toutes les semimartingales, muni de la <u>topologie des semimartingales</u> d'Emery [1]. Il n'est absolument pas nécessaire d'en connaître la définition exacte, mais seulement les propriétés simples que nous recopions ci-dessous.

1) Elle fait de $\underline{\underline{S}}$ un espace vectoriel topologique (non localement convexe) <u>métrisable complet</u>. Si des X^n convergent vers X dans $\underline{\underline{S}}$, on a pour tout t fini

$$\lim_n \ (X^n-X)_t^* = 0 \quad \text{en probabilité} .$$

<u>Conséquence</u> : Si l'on remplace P par une loi Q équivalente, la topologie de $\underline{\underline{S}}$ reste la même (th. du graphe fermé). Si Q est seulement absolument continue par rapport à P, l'application identique de $\underline{\underline{S}}_P$ dans $\underline{\underline{S}}_Q$ est continue.

2) Soit X^n une suite de semimartingales qui converge vers X <u>prélocalement dans</u> $\underline{\underline{S}}^1$. Cela signifie qu'il existe des temps d'arrêt $T_k\uparrow\infty$ tels que

$$\text{pour tout k,} \quad (X^n)^{T_k-} \to X^{T_k-} \quad \text{dans } \underline{\underline{S}}^1 .$$

Alors $X^n \to X$ dans $\underline{\underline{S}}$. Cela a lieu a fortiori si $X^n \to X$ localement dans $\underline{\underline{S}}^1$, i.e. si la propriété ci-dessus a lieu avec des arrêtés à T_k au lieu de T_k- .

3) Inversement, toute suite qui converge dans $\underline{\underline{S}}$ vers X contient une sous-suite qui converge vers X prélocalement dans $\underline{\underline{S}}^1$.

Soit alors H un processus prévisible, que nous supposerons <u>fini</u> pour simplifier[1]. Nous posons $H^n = HI_{\{|H| \leq n\}}$, processus prévisible borné. Voici la <u>définition sophistiquée</u> de l'i.s. de H par rapport à la semimartingale X.

DEFINITION. <u>Soit</u> X <u>une semimartingale</u>. <u>On dit que</u> H <u>est</u> X-<u>intégrable</u>, <u>et que</u> $H \cdot X = Y$, <u>pour exprimer que</u> Y <u>est une semimartingale et que</u> $H^n \cdot X \to Y$ <u>dans la topologie des semimartingales</u>.

<u>L'ensemble des processus prévisibles</u> X-<u>intégrables est noté</u> L(X).

PROPRIETES EVIDENTES DE L'I.S.

Voici une liste de propriétés évidentes de cette i.s. généralisée.

a) Si H est X-intégrable et Y-intégrable, H est (X+Y)-intégrable, et $H \cdot (X+Y) = H \cdot X + H \cdot Y$.

Démonstration : c'est simplement le fait que $\underline{\underline{S}}$ est un e.v.t.. Noter que la linéarité en H, en revanche, n'est absolument pas évidente.

b) Si X est à variation finie, et si $A_t = \int_{[0,t]} |H_s||dX_s|$ est fini, H est X-intégrable, et $H \cdot X = Y$, l'intégrale de Stieltjes usuelle.

Démonstration : nous posons $T_k = \inf\{t : A_t > k\}$. On vérifie aussitôt que $(H^n \cdot X)^{T_k-}$ converge dans $\underline{\underline{V}}^1$ vers Y^{T_k-} .

c) Si X est une martingale locale nulle en 0, et si le processus croissant $A_t = (\int_0^t H_s^2 d[X,X]_s)^{1/2}$ est localement intégrable, H est X-intégrable, et on a $H \cdot X = Y$, l'i.s. usuelle au sens des martingales locales.

Démonstration : on choisit des $T_k \uparrow \infty$ tels que $E[A_{T_k}] < \infty$, et on vérifie aussitôt que $(H^n \cdot X)^{T_k}$ converge dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers Y^{T_k}.

d) En conséquence, si H est intégrable par rapport à X au sens de la définition élémentaire, il l'est aussi au sens de la définition sophistiquée, et les i.s. sont les mêmes.

e) Si H est X-intégrable, on a $\Delta(H \cdot X) = H \Delta X$.

1. On pourrait permettre à H d'être infini (ou non défini) sur un ensemble <u>X-négligeable</u>, c'est à dire sur un ensemble prévisible A tel que l'i.s. (usuelle) $I_A \cdot X$ soit nulle. Il est clair en effet que l'intégrabilité, et la valeur de l'i.s. $H \cdot X$, ne dépendent que de la classe de H pour l'égalité X-p.p..

Démonstration. On a $\Delta(H^n \cdot X) = H^n \Delta X$, et il faut justifier le passage à la limite. Pour le côté droit, c'est évident. Pour le côté gauche, on s'appuie sur la propriété 1) de la topologie des semimartingales, et sur le procédé diagonal, pour construire une suite (m_n) telle que

$$(H^{m_n} \cdot X - H \cdot X)_k^* \longrightarrow 0 \quad \text{p.s. pour tout } k \text{ fini}$$

et alors $\Delta(H^{m_n} \cdot X) \rightarrow \Delta(H \cdot X)$ hors d'un ensemble évanescent.

Remarque : Si l'on était parti de la définition élémentaire, les propriétés a),b),c),e) auraient été à peu près évidentes. Mais non la suivante, qui est immédiate sous la définition sophistiquée :

f) Soit Q une loi équivalente à P. Le remplacement de P par Q n'altère ni l'espace L(X), ni la valeur de l'i.s. (en effet, il ne change pas la topologie des semimartingales ; rappelons que l'i.s. des processus prévisibles bornés est invariante par changement de loi).

Plus généralement, si Q est absolument continue par rapport à P, un processus prévisible H, X-intégrable sous P, le reste sous Q, et l'i.s. $H \cdot X$ calculée sous P est une version de l'i.s. calculée sous Q.

On en déduit aisément que les résultats sur la localisation de l'i.s., établis pour les i.s. classiques, sont encore valables pour les nouvelles i.s..

CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE D'INTEGRABILITE

THEOREME 1. Si H est X-intégrable, le processus

(1) $$U_t = \Sigma_{0 \leq s \leq t} \; \Delta X_s I_{\{|H_s \Delta X_s| > 1 \text{ ou } |\Delta X_s| > 1\}}$$

est à variation finie . Soit Z la semimartingale X-U , dont les sauts sont bornés par 1, et soit Z=V+W sa décomposition canonique (V martingale locale nulle en 0, W processus à variation finie prévisible). Alors les trois i.s. $H \cdot U$, $H \cdot W$ et $H \cdot V$ existent au sens usuel (les deux premières comme intégrale de Stieltjes, la dernière au sens des martingales locales) et leur somme est $H \cdot X$.

COMMENTAIRE. Ce théorème est un résultat technique essentiel :
- établi, comme nous le faisons, sous la d.s., il nous permet de voir, non seulement que la d.s. et la d.e. sont équivalentes (cf. d) plus haut), mais comment on peut expliciter une bonne décomposition de X en termes tels que les i.s. usuelles existent, et, à partir de là, d'établir diverses conséquences importantes (g),h),i),j),k) ci-dessous).
- Si l'on ne veut pas parler de la topologie des semimartingales, mais seulement développer les conséquences de la d.e., le théorème 1 (établi à partir de la d.e.) constitue une étape obligatoire.

DEMONSTRATION. Nous désignons par Y la semimartingale $H\cdot X$. Comme Y et X sont des processus càdlàg., il n'y a qu'un nombre fini de sauts sur $[0,t]$ fini, pour lesquels on a $|\Delta X|>1$ ou $|\Delta Y|>1$. Compte tenu de e), cela veut dire que la somme (1) est en réalité une somme finie. Donc U existe, et d'après b), $H\cdot U$ existe. D'après a), $H\cdot Z$ existe par différence.

Cela entraîne l'existence d'une sous-suite telle que

$$H^{m_n}\cdot Z \text{ converge vers } H\cdot Z \text{ prélocalement dans } \underline{\underline{S}}^1$$

Mais soit T un temps d'arrêt tel que $(H^{m_n}\cdot Z)^{T-}$ converge dans $\underline{\underline{S}}^1$ vers $(H\cdot Z)^{T-}$. Comme nous avons mis dans U tous les sauts ΔX_t tels que $|H_t\Delta X_t|>1$, nous avons $|H_T\Delta Z_T| \leq 1$, donc $H_T^{m_n}\ \Delta Z_T$ tend vers $H_T\Delta Z_T$ dans L^1 par convergence dominée. Par conséquent, $(H^{m_n}\cdot Z)^T \to (H\cdot Z)^T$ dans $\underline{\underline{S}}^1$. Revenant à la définition de la norme $\underline{\underline{S}}^1$, cela signifie que

$$(H^{m_n}\cdot V)^T \text{ converge dans } \underline{\underline{H}}^1 \text{ , donc } E[(\int_{[0,T]} H_s^2 d[V,V]_s)^{1/2}]<\infty$$
$$(H^{m_n}\cdot W)^T \text{ converge dans } \underline{\underline{V}}^1 \text{ , donc } E[\int_{[0,T]} |H_s||dW_s|]<\infty$$

et les deux i.s. existent au sens usuel. Le théorème est établi.

REMARQUE. Dans la démonstration, nous n'avons pas utilisé l'expression explicite de U, mais seulement le fait que $U_t = \Sigma_{0\leq s\leq t}\ \Delta X_s I_{\{s\in A\}}$, où l'ensemble A (optionnel) n'a qu'un nombre fini de points sur tout intervalle fini, et <u>contient tous les s tels que</u> $|H_s\Delta X_s|>1$ ou $|\Delta X_s|>1$. Les raisonnements ultérieurs sur Z,V,W, ne sont pas modifiés. Donnons tout de suite des applications de cette remarque.

g) Démontrons la <u>linéarité</u> de l'i.s.. Soient H et K X-intégrables. Reprenons la démonstration précédente, avec comme processus

$$U_t = \Sigma_s\ \Delta X_s I_{\{|H_s\Delta X_s|>1 \text{ ou } |K_s\Delta X_s|>1 \text{ ou } |\Delta X_s|>1\}}$$

Alors les i.s. usuelles $H\cdot U$, $H\cdot V$, $H\cdot W$, $K\cdot U$, $K\cdot V$, $K\cdot W$ existent toutes, et il suffit d'appliquer la linéarité des i.s. usuelles.

h) Soit L une semimartingale. Si H est X-intégrable, le processus croissant $\int_0^t |H_s||d[X,L]_s|$ est fini, et on a $[H\cdot X,L]=H\cdot[X,L]$.

Démonstration : conséquence immédiate du résultat analogue pour les i.s. usuelles.

i) Soient H et K deux processus prévisibles. Supposons H X-intégrable. Alors K est $(H\cdot X)$-intégrable si et seulement si KH est X-intégrable, et on a $K\cdot(H\cdot X)=(KH)\cdot X$.

Démonstration : on utilise le processus U relatif à l'ensemble $\{|\Delta X_s|>1 \text{ ou } |H_s\Delta X_s|>1 \text{ ou } |H_sK_s\Delta X_s|>1\}$, et on se trouve ramené à l'"associativité" des i.s. usuelles .

j) Démontrons un <u>théorème de convergence dominée</u> : soient H un processus X-intégrable, K^n, K des processus prévisibles, majorés en valeur absolue par $|H|$, et tels que K^n converge simplement vers K . Alors tous ces processus sont X-intégrables, et $K^n \cdot X$ tend vers K.X dans $\underline{\underline{S}}$.

Démonstration : Utiliser la décomposition $X=U+V+W$, où le processus U est celui qui est associé à H. On est alors ramené au théorème de convergence dominée pour les i.s. usuelles.

k) La propriété h) donne une condition <u>nécessaire</u> simple d'intégrabilité : le processus croissant $\int_0^t H_s^2 d[X,X]_s$ doit être fini. En particulier, si X^c est la partie martingale locale continue de X, l'i.s. $H \cdot X^c$ existe au sens usuel, et il résulte du théorème 1 que c'est exactement la partie martingale locale continue de H•X .

ℓ) Toutes les propriétés précédentes sont des extensions de propriétés de l'i.s. usuelle, et le lecteur pourrait trop aisément en conclure que << tout marche bien >> et que l'on peut appliquer sans réfléchir les résultats classiques. Nous verrons plus loin en n), que les <u>grossissements de filtrations</u> renferment un piège. Notons ici deux petits faits auxquels il faut prendre garde.

- Si X est à variation finie, H•X peut exister, mais ne pas être à variation finie. Exemple : soit $(Z_n)_{n>1}$ une suite de Rademacher, et soit X le processus à variation finie qui vaut

$$X_t = \Sigma_{n \geq 2} \; n^{-2} Z_n I_{\{1-1/n \leq t\}}$$

X est une martingale locale par rapport à sa filtration naturelle $(\underline{\underline{F}}_t)$. Comme processus prévisible, nous prenons le processus déterministe H qui vaut n à l'instant $1-1/n$, 0 sinon ($n \geq 2$). Alors H.X existe au sens des martingales locales, mais non au sens de Stieltjes, et H•X n'est pas à variation finie. **(Mais voir v) tout à la fin de l'exposé).**
- Si X est une martingale locale, H•X peut exister, mais ne pas être une martingale locale. Un exemple d'Emery figure dans ce volume.

Toutefois, la première de ces deux difficultés ne peut se présenter lorsque X est à variation finie <u>prévisible</u>, comme le montre le théorème 2 ci-dessous.

UN THEOREME DE JEULIN

Plus généralement, lorsque X et H•X sont spéciales, il n'y a aucune pathologie du type précédent : c'est ce que montre un théorème de Jeulin [1] (Jeulin le présente dans un langage un peu différent(1))

---

1. En fait ce théorème figure aussi dans le livre [2] de Jacod, de manière assez dissimulée : c'est la proposition 2.69 b), p. 54, où l'ensemble D est pris vide (ce qui signifie que X et H•X sont spéciales).

THEOREME 2 . Soit X une semimartingale spéciale, de décomposition canonique $X=M+A$, et soit H un processus prévisible X-intégrable. Alors $H\cdot X$ est spéciale si et seulement si $H\cdot M$ existe au sens des martingales locales, et $H\cdot A$ existe au sens de Stieltjes.

En particulier, si X est à variation finie prévisible[1], et si H est X-intégrable, $H\cdot X$ est une intégrale de Stieltjes.

DEMONSTRATION. Il est clair que si $H\cdot M$ et $H\cdot A$ existent au sens usuel, $H\cdot X$ est spéciale, de décomposition canonique $H\cdot M+H\cdot A$ (cf. d)).

Inversement, traitons d'abord le cas où X est une semimartingale prévisible, ce qui signifie que M est une martingale locale continue . Reprenons le théorème 1 : le processus U est prévisible, donc on a $V=M$, $W=A-U$. Les intégrales $H\cdot U$, $H\cdot V$, $H\cdot W$ existant au sens usuel, on voit que $H\cdot M$ et $H\cdot A$ existent au sens usuel. On a donc établi un résultat un peu meilleur que la dernière phrase de l'énoncé.

Passons au cas général. Supposons que $H\cdot X$ soit spéciale, de décomposition canonique $H\cdot X=N+B$. Soit K un processus prévisible borné, partout >0, tel que KH soit borné - par exemple $K=1/1+|H|$. Alors

$(KH)\cdot X$ est spéciale, de décomposition canonique $(KH)\cdot M+(KH)\cdot A$

$K\cdot(H\cdot X)$ est spéciale, de décomposition canonique $K\cdot N+K\cdot B$

d'après la théorie classique de l'i.s. (cas borné). Appliquant i) et l'unicité de la décomposition canonique, nous avons $K\cdot N = (KH)\cdot M$, $K\cdot B=(KH)\cdot A$. Soit $J=1/K$; J appartient à $L(K\cdot N)$, et $J\cdot(K\cdot N)=N$. Ecrivant $(KH)\cdot M$ au lieu de $K\cdot N$ et appliquant i), nous trouvons que $JKH=H$ appartient à $L(M)$ et $H\cdot M=N$. Il s'agit d'une i.s. usuelle, car $(H^2\cdot[M,M])^{1/2}=[N,N]^{1/2}$ est localement intégrable. De même, on a $H.A=B$, et il s'agit d'une i.s. de Stieltjes d'après le cas prévisible, traité au début de la démonstration.

(Cette démonstration simplifiée est adaptée de l'article d'Emery qui figure plus loin, où elle est donnée pour une classe de semimartingales un peu plus large que celle des s.m. spéciales. Voir une autre démonstration dans l'article de Yen après celui-ci).

m) Occupons nous maintenant du problème de grossissement des filtrations. Soit $(\underline{\underline{G}}_t)$ une filtration satisfaisant aux conditions habituelles, contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$, et telle que X soit encore une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$. Soit H un processus prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, donc par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$. Si H est borné, on sait que les deux i.s. de H par rapport à X, prises dans les deux filtrations, ont la même valeur. Ici montrons que si $H\cdot X$ existe dans la grosse filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$, elle existe aussi dans la petite $(\underline{\underline{F}}_t)$, et a la même valeur.

1. **Le résultat obtenu est un peu plus général que cet énoncé.**

A cet effet, considérons les deux espaces de semimartingales $\underline{\underline{S}}_G$ et $\underline{\underline{S}}_F$, et désignons par $\underline{\underline{S}}'_F$ le sous-espace de $\underline{\underline{S}}_G$ constitué par les semi-martingales/$(\underline{\underline{G}}_t)$ adaptées à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Il résulte aussitôt de la propriété 1) que $\underline{\underline{S}}'_F$ est <u>fermé</u> dans $\underline{\underline{S}}_G$, donc complet. Le théorème du graphe fermé entraîne alors que l'injection de $\underline{\underline{S}}'_F$ dans $\underline{\underline{S}}_F$ est continue. Mais alors, si les $H^n \cdot X \in \underline{\underline{S}}'_F$ convergent vers Y pour $\underline{\underline{S}}_G$, on a $Y \in \underline{\underline{S}}'_F$ et $H^n \cdot X \rightarrow Y$ pour $\underline{\underline{S}}_F$, donc $H \cdot X$ existe dans la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ et vaut Y .

n) La réciproque est inexacte : $H \cdot X$ <u>peut exister dans</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>mais non dans</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$, et c'est là le seul caractère <<pathologique>> de l'i.s. de cet exposé. Voici le contre-exemple de Jeulin : on prend pour $(\underline{\underline{F}}_t)$ la filtration naturelle d'un mouvement brownien X, pour $(\underline{\underline{G}}_t)$ la filtration obtenue en injectant dans $\underline{\underline{F}}_0$ la v.a. X_1 . On peut alors montrer que X reste une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$. Soit Y une martingale de carré intégrable pour $(\underline{\underline{F}}_t)$. Alors Y est une i.s. prévisible $H \cdot X$. Si l'i.s. $H \cdot X$ existait pour $(\underline{\underline{G}}_t)$, elle serait encore égale à Y d'après m), et Y serait une semimartingale pour $(\underline{\underline{G}}_t)$. Or cela n'est pas vrai en général (Jeulin-Yor [1]).

o) Voici une application de m), qui constitue un peu une digression, et peut être omise sans inconvénient.

Considérons un espace mesurable $(\Omega, \underline{\underline{F}}^\circ)$, une filtration $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ continue à droite, un processus càdlàg adapté X et un processus prévisible fini H. On sait que l'ensemble des <u>lois de semimartingales</u> pour X, i.e. des lois P telles que X soit une semimartingale par rapport à la loi P et à la filtration $(\underline{\underline{F}}^P_t)$ complétée habituelle de $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$, est <u>dénombrablement convexe</u> (ce résultat est dû à Jacod (voir [2], p. 235-236).

THEOREME 3. <u>L'ensemble des lois</u> P <u>qui sont des lois de semimartingales pour</u> X , <u>et telles que</u> $H \in L(X)$, <u>est dénombrablement convexe</u>.

DEMONSTRATION. Désignons par $\mathcal{K}$ cet ensemble de lois, et soit $\overline{P}=\Sigma_n \lambda_n P_n$ une combinaison convexe dénombrable d'éléments de $\mathcal{K}$. Remarquons que toute loi absolument continue par rapport à un élément de $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}$ (f)). Représentons P comme une somme de mesures $\Sigma_n \mu_n$, où pour chaque n , μ_n est absolument continue par rapport à P_n et étrangère à $P_1,\dots,P_{n-1}$, et supposons pour simplifier que $\mu_n \neq 0$ pour tout n ; la loi $P'_n = \mu_n/\mu_n(1)$ appartient à $\mathcal{K}$, puisqu'elle est absolument continue par rapport à P_n , et nous avons pour $\overline{P}$ une représentation $\overline{P}=\Sigma_n \lambda'_n P'_n$, du même type que la première, mais avec la condition supplémentaire que P'_n est étrangère à $P'_1,\dots,P'_{n-1}$. Choisissons alors une partition mesurable (U_n), telle que U_n porte P'_n pour tout n, et désignons par $(\underline{\underline{G}}^\circ_t)$ la filtration obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}^o_0$ la partition (U_n) . Pour tout n, il existe une décomposition $X=M^n+A^n$, où M^n est une martingale locale pour P'_n , A^n un processus à variation finie, où le processus $(\int^{\bullet}|H_s||dA^n_s|)$ est à valeurs finies (p.s. sous P'_n) et le processus $(\int^{\bullet}H^2_s d[M^n,M^n]_s)^{1/2}$ est localement intégrable (sous P'_n). Posons alors

$$M = \Sigma_n I_{U_n} M^n \quad , \quad A = \Sigma_n I_{U_n} A^n$$

processus adaptés à $(\underline{\underline{G}}_t)$, la complétion habituelle de $(\underline{\underline{G}}^o_t)$ pour $\overline{P}$. On vérifie immédiatement que M est une $((\underline{\underline{G}}_t),\overline{P})$-martingale locale, A un processus à variation finie, et que les intégrales stochastiques usuelles H•M et H•A existent. Mais alors H•X existe par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, et d'après m), elle existe aussi par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

INTEGRALES STOCHASTIQUES ET PRELOCALISATION

p) Le théorème suivant exprime que <u>l'appartenance à</u> L(X) <u>est une propriété prélocale</u>.

THEOREME 4. <u>Soit</u> H <u>prévisible</u>. <u>Supposons qu'il existe des t. d'a.</u> $T_k\uparrow\infty$, <u>des processus</u> $J_k\in L(X)$, <u>tels que</u> $H=J_k$ <u>sur</u> $[0,T_k[$. <u>Alors on a</u> $H\in L(X)$ <u>et</u> $H.X = J_k\cdot X$ <u>sur</u> $[0,T_k[$.

DEMONSTRATION. Les processus tronqués H^n et J^n_k sont égaux sur $[0,T_k[$. On a donc

$$(H^n.X)^{T_k-} = (J^n_k\cdot X)^{T_k-}$$

d'après la théorie de l'i.s. des processus prévisibles bornés. Par hypothèse, $J^n_k\cdot X$ converge vers $J_k\cdot X$ pour la topologie des semimartingales, donc (d'après une propriété également classique de celle-ci)

$$(J^n_k\cdot X)^{T_k-} \rightarrow (J_k\cdot X)^{T_k-} \quad \text{dans } \underline{\underline{S}}$$

Mais alors, la suite $(H^n\cdot X)^{T_k-}$ converge pour tout k dans la topologie des semimartingales ; or la convergence dans cette topologie est une propriété prélocale, et il existe donc une semimartingale $Y=H\cdot X$, limite de la suite $H^n\cdot X$. D'après la même propriété que ci-dessus, on a

$$(H^n.X)^{T_k-} \rightarrow (H\cdot X)^{T_k-} \quad \text{dans } \underline{\underline{S}}$$

et la démonstration est achevée.

q) On peut dire les choses un peu différemment : <u>s'il existe des</u> $T_k\uparrow\infty$ <u>tels que</u> $H\in L(X^{T_k-})$ <u>pour tout</u> k, <u>on a</u> $H\in L(X)$. En effet, $X^{T_k} - X^{T_k-}$ est un processus à variation finie, à un seul saut, et on déduit aisément de la condition précédente qu'en fait $H\in L(X^{T_k})$ pour tout k. On montre alors que $H\in L(X)$, soit par un raisonnement direct, soit grâce à p) (on prend $J=HI_{[0,T_k]}$)

r) Du raisonnement précédent, extrayons une propriété immédiate : si H appartient à L(X), et T est un t.d'a., on a $H\in L(X^{T-})$ et $H\cdot X^{T-}=(H\cdot X)^{T-}$.

s) Dans le même esprit, revenons à la « définition sophistiquée» de l'intégrale stochastique, pour l'affaiblir : il est inutile de vérifier que les $H^n\cdot X$ <u>convergent</u> dans $\underline{\underline{S}}$: il suffit que $H^n\cdot X$ soit <u>borné</u> dans $\underline{\underline{S}}$ au sens suivant : il existe des t.d'a. $T_k\uparrow\infty$ tels que l'on ait pour tout k

$$\sup_n \|(H^n\cdot X)^{T_k-}\|_{\underline{\underline{S}}^1} < \infty \ .$$

Démonstration : Quitte à diminuer les T_k, on peut supposer que $X^{T_k-}\in\underline{\underline{S}}^1$ pour tout k (on utilise ici le fait que l'arrêt à T- est un opérateur borné dans $\underline{\underline{S}}^1$). La condition ci-dessus signifie que $H^n\cdot X^{T_k-}$ est borné dans $\underline{\underline{S}}^1$. Soit $X^{T_k-} = M^k+A^k$ la décomposition canonique de X^{T_k-} ; on a

$$\sup_n \| \int |H^n_s|\,|dA^k_s| + (\int H^{n2}_s d[M^k,M^k]_s)^{1/2}\|_{L^1} < \infty$$

donc, grâce au lemme de Fatou, $H\in L(X^{T_k-})$ pour tout k, et finalement $H\in L(X)$.

REMARQUE. Cette démonstration donne un peu mieux : si H est prévisible, et s'il existe des $H^n\in L(X)$ - pas nécessairement obtenus par troncation de H - tels que les $H^n\cdot X$ soient bornés dans $\underline{\underline{S}}^1$ comme ci-dessus, et que H^n converge vers H X-p.p., alors H appartient à L(X).

On peut même remplacer $\sup_n$ par $\liminf_n$ dans la condition ci-dessus.

INTEGRALES STOCHASTIQUES ET SOUS-ESPACES STABLES

Il est tout naturel de définir les sous-espaces stables de $\underline{\underline{S}}$ comme les sous-espaces fermés, stables par i.s. des processus prévisibles bornés. Mémin a montré que <u>le sous-espace stable engendré par</u> X <u>est l'ensemble des semimartingales</u> H·X, <u>où</u> H <u>parcourt</u> L(X). Ce résultat est étendu par Jacod [3] à un vecteur $\mathbb{X} = (X^1,\dots,X^n)$ de semimartingales, à condition de définir convenablement l'i.s. vectorielle $\mathbb{H}\cdot\mathbb{X}$.

Esquissons la démonstration du résultat de Mémin. Il revient à montrer que

t) <u>L'ensemble des processus</u> H·X, <u>où</u> H <u>parcourt</u> L(X), <u>est fermé dans</u> $\underline{\underline{S}}$.

Démonstration : Soient des $Y^n=H^n\cdot X$ qui convergent dans $\underline{\underline{S}}$ vers une semimartingale Y. Il s'agit de montrer qu'il existe $H\in L(X)$ tel que $Y=H\cdot X$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que Y^n converge vers Y prélocalement dans $\underline{\underline{S}}^1$. Choisissons des t. d'a. $T_k\uparrow\infty$ tels que $(Y^n)^{T_k-}$ converge dans $\underline{\underline{S}}^1$ vers Y^{T_k-}. Puis, au moyen du procédé diagonal, extrayons encore une sous-suite telle que l'on ait pour tout k

$$\Sigma_n \| (Y^n)^{T_k-} - Y^{T_k-} \|_{\underline{\underline{S}}^1} < \infty .$$

Remarquons que $(Y^n)^{T_k-} = H^n \cdot X^{T_k-}$; explicitant la norme de $J\cdot X^{T_k-}$ dans $\underline{\underline{S}}^1$ au moyen de la décomposition canonique de X^{T_k-}, pour J prévisible, nous voyons que H^n converge X^{T_k-} p.p. vers le processus prévisible $H = \liminf_n H_n$ (que nous pouvons remplacer par $HI_{\{|H|<\infty\}}$ si nous tenons à avoir des processus finis), et que $H\in L(X^{T_k-})$ et

$$(Y^n)^{T_k-} \text{ converge dans } \underline{\underline{S}}^1 \text{ vers } H\cdot X^{T_k-} .$$

Alors $H\in L(X)$ d'après q), et on vérifie sans peine que $Y=H\cdot X$.

u) Plus généralement, considérons une suite de semimartingales X^n, qui converge vers X dans $\underline{\underline{S}}$, et une suite d'i.s. $Y^n=H^n\cdot X^n$ ($H^n\in L(X^n)$) qui converge vers une semimartingale Y dans $\underline{\underline{S}}$. On ne peut affirmer en général que Y est une i.s. $H\cdot X$ (il y a des contre-exemples évidents dans le cas déterministe). Cependant, <u>si les H^n sont majorés en valeur absolue par</u> $K\in L(X)$, <u>il existe</u> $H\in L(X)$ <u>tel que</u> $Y=H\cdot X$.

Démonstration : Il est essentiel ici que le processus $K\in L(X)$ soit fini. Nous allons alors pouvoir nous ramener au cas où les H^n sont uniformément bornés. En effet

$$I_{\{K\leq p\}}\cdot Y^n = I_{\{K\leq p\}}H^n\cdot X^n \quad \text{converge dans } \underline{\underline{S}}^1 \text{ vers } I_{\{K\leq p\}}\cdot Y$$

si le théorème est vrai dans le cas uniformément borné, nous pouvons affirmer que $I_{\{K\leq p\}}\cdot Y = H_p\cdot X$ appartient au sous-espace stable engendré par X ; faisant tendre p vers $+\infty$, et utilisant le fait que K est fini, nous voyons que Y appartient à ce sous-espace, donc d'après le théorème de Mémin t), Y est une i.s. de X .

Supposons donc les H^n uniformément bornés ; alors $H^n\cdot(X^n-X)\rightarrow 0$ dans $\underline{\underline{S}}$ (vérification facile par arrêt à T- convenable, ramenant tout dans $\underline{\underline{S}}^1$), donc Y est aussi limite de $H^n\cdot X$, et le théorème de Mémin t) nous permet à nouveau de conclure.

REMARQUE. Dans un travail récent sur les équations différentielles stochastiques, Yen utilise une inégalité de norme du type

$$\|H\cdot X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leq c\,\|H\|_{\underline{\underline{R}}^p}\|X\|_{\underline{\underline{S}}^\infty} \quad \text{(H prévisible borné)}$$

(où $\|H\|_{\underline{\underline{R}}^p} = \|H^*\|_{L^p}$, et où $\underline{\underline{S}}^p$ et $\underline{\underline{S}}^\infty$ sont les "espaces $\underline{\underline{H}}^p$, $\underline{\underline{H}}^\infty$ de semimartingales " d'Emery : cf. Sém. Prob. XII, p.757) pour remarquer que tout processus prévisible H, qui appartient localement à $\underline{\underline{R}}^p$, appartient à L(X) pour toute semimartingale X. Cette remarque très utile vient d'être retrouvée par Lenglart, d'une manière qui ne fait pas appel à l'i.s. généralisée : si H appartient localement à $\underline{\underline{R}}^p$, le processus croissant H^*_t est fini, et H est <u>prélocalement borné</u>. Or Lenglart montre que tout processus <u>prévisible</u> prélocalement borné est localement borné.

BIBLIOGRAPHIE

EMERY (M.) [1]. Une topologie sur l'espace des semimartingales. Sém.Prob. XIII, 1979, p. 260-280 . LN 721.

JACOD (J.) [1]. Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales. Sém. Prob. XI, 1977, p. 390-410. LN 581.

----- [2] . Calcul stochastique et problèmes de martingales. LN 714, 1979.

----- [3] . Intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle. A paraître, Sém. Prob. XIV.

JEULIN (T.) [1]. Article sur le grossissement, à paraître.

JEULIN (T.) et YOR (M.) [1] . Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis. Sém. Prob. XIII, 1979, p. 332-359. LN 721.

MEMIN (J.) [1]. Changements de probabilité dans des espaces de semi-martingales, et applications. A paraître .

Ajouté sur les épreuves : le théorème de Mémin t) permet de répondre à une question posée par Meyer : soient X et Y deux semimartingales, (T_k) une suite de t. d'a. tendant vers $+\infty$ en croissant. On suppose qu'il existe des $H^k \in L(X^{T_k -})$ tels que $Y^{T_k -} = H^k . X^{T_k -}$. Peut on affirmer qu'il existe $H \in L(X)$ tel que $Y = H \cdot X$? La réponse est oui : on écrit

$$Y^{T_k} + H^k_{T_k} \Delta X_{T_k} I_{[T_k,\infty[} - \Delta Y_{T_k} I_{[T_k,\infty[} = (H^k . X)^{T_k}$$

Lorsque $k \to \infty$, on remarque que le côté gauche tend vers Y au sens de $\underline{\underline{S}}$, et on applique le théorème de Mémin.

Soit $\mathfrak{S}(X)$ le sous-espace stable de $\underline{\underline{S}}$ engendré par X, autrement dit l'ensemble de toutes les i.s. $H \cdot X$. Le même raisonnement montre que l'appartenance à $\mathfrak{S}$ est une propriété prélocale : s'il existe des $T_k \uparrow \infty$, des $J_k \in \mathfrak{S}$ tels que $Y = J_k$ sur $[0, T_k[$, alors $Y \in \mathfrak{S}$. Mais sous cette forme, le résultat est à peu près évident, et vrai pour tous les sous-espaces stables de $\underline{\underline{S}}$: en effet, les J_k convergent dans $\underline{\underline{S}}$ vers Y .

v) La question suivante est très naturelle. Supposons que X soit à variation finie, que H soit X-intégrable, et que $H \cdot X$ soit à variation finie. L'intégrale est elle alors une i.s. de Stieltjes ? La réponse est oui. Pour le voir, on décompose X en $X^c + X^d$. La formule $\Delta(H.X) = H\Delta X$ entraîne que $H \cdot X^d$ existe au sens de Stieltjes. Par différence, on voit que $H \in L(X^c)$ et cette intégrale est au sens de Stieltjes d'après le th. 2. (Remarque communiquée par M. Emery).