Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Christophe Stricker

Projection optionnelle et semi-martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 112-115

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__112_0>

Séminaire de Probabilités XIV
1978/79

PROJECTION OPTIONNELLE ET SEMIMARTINGALES

par C. STRICKER

En théorie du filtrage, on rencontre souvent la situation suivante :

1) L'histoire d'un phénomène : émission - réception - brouillage représenté par la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2) Le phénomène observé, représenté par une <u>sous-filtration</u> $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Dans ce cadre, le problème suivant apparaît fréquemment : étant donnée une $\mathcal{F}$ - semimartingale X bornée, est-ce que sa $\mathcal{G}$ - projection optionnelle est une $\mathcal{G}$ - semimartingale ? La proposition suivante montre qu'en général la réponse est négative.

PROPOSITION 1. <u>S'il existe deux</u> $\mathcal{G}$ - <u>temps d'arrêt</u> S <u>et</u> T <u>et une variable aléatoire</u> X <u>prenant</u> (avec prob. positive) <u>une infinité de valeurs, tels que</u> $P\{S<T\}>0$, $X\in\mathcal{F}_S$ <u>et</u> X <u>soit indépendante de</u> $\mathcal{G}_T$, <u>alors il existe une semimartingale bornée dont la</u> $\mathcal{G}$ - <u>projection optionnelle n'est pas une</u> $\mathcal{G}$ - <u>semimartingale</u>.

<u>Démonstration</u> : Notons que l'existence de X est équivalente à l'existence d'une suite d'ensembles (A_n) , non négligeables, disjoints deux à deux et appartenant à $\mathcal{F}_S$, tels que la tribu engendrée par eux soit indépendante de $\mathcal{G}_T$. Notons $\alpha = P(\bigcup_i A_i)$ et posons :

$$Y^n = (-1)^n \sum_{m\geq m_n} 1_{A_m} \quad \text{où} \quad m_n = \sup\{n : \sum_{m\geq n} P(A_n) \geq \frac{\alpha}{n}\}$$

$$Y_t = \sum_n Y^n 1_{[S_{n+1}, S_n[}(t) \quad \text{où} \quad S_n = (S+\frac{1}{n})\wedge T .$$

Alors le processus Y est une $\mathcal{F}$ - semimartingale car Y est à variation bornée. Désignons par Y^o sa projection optionnelle sur la filtration $\mathcal{G}$. Supposons que Y^o soit une $\mathcal{G}$ - semimartingale. Comme $|Y| \leq 1$ (et donc $|Y^o| \leq 1$), Y^o est une $\mathcal{G}$ - semimartingale spéciale. Il existe alors un $\mathcal{G}$ - temps d'arrêt K tel que $P\{S<K<T\} > 0$ et que la fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à n associe $V_n = E[X^o_{S_n \wedge K}]$, soit à variation bornée. Or $V_n = E[X_{S_n \wedge K}]$ car S_n et K sont des $\mathcal{G}$ - temps d'arrêt. L'appartenance de $S_n \wedge K$ à $\mathcal{G}_T$ entraîne que pour tout $n_o \in \mathbb{N}$ $V_{n_o+1} = \sum_n E[Y^n] P\{S_{n+1} \leq K \wedge S_{n_o+1} < S_n\}$

$$= \sum_{n>n_o} E[Y^n]P\{S_{n+1} \leq K < S_n\} + E[Y^{n_o}]P\{S_{n_o+1} \leq K\ ,\ S_{n_o+1} < S_{n_o}\}.\ \text{D'où}$$

$$|V_{n_o+2}-V_{n_o+1}| = |E[Y^{n_o+1}](P\{S_{n_o+2} \leq K,\ S_{n_o+2} < S_{n_o+1}\} - P\{S_{n_o+2} \leq K < S_{n_o+1}\})$$

$$- E[Y^{n_o}]P\{S_{n_o+1} \leq K, S_{n_o+1} < S_{n_o}\}\ |$$

$$= |E[Y^{n_o+1}]P\{S_{n_o+1} \leq K, S_{n_o+2} < S_{n_o+1}\} - E[Y^{n_o}]P\{S_{n_o+1} \leq K,\ S_{n_o+1} < S_{n_o}\}\ |$$

$$\geq \frac{2\alpha P\{S_{n_o+1} \leq K,\ S_{n_o+1} < S_{n_o}\}}{n_o+1} - P\{S_{n_o+1} = S_{n_o},\ S_{n_o+2} < S_{n_o+1}\}.$$

La série $\Sigma|V_{n_o+1} - V_{n_o}|$ diverge, ce qui est absurde. Aussi Y^o n'est pas une $\mathcal{G}$ - semimartingale.

Toutefois, on a le résultat positif suivant contenu implicitement dans [2] .

PROPOSITION 2. <u>Si</u> X <u>est une</u> $\mathcal{F}$ <u>- quasimartingale, alors</u> X^o <u>est une</u> $\mathcal{G}$ <u>- quasimartingale et</u> $\mathrm{Var}(X^o,\mathcal{G}) \leq \mathrm{Var}(X,\mathcal{F})$.

On démontre aisément ce résultat grâce à la décomposition de Rao ou en étudiant directement la variation de X . Notons que cette proposition nous a permis de démontrer dans [2] que si $\mathcal{G}$ contient la filtration naturelle de la $\mathcal{F}$ - semimartingale X , alors X est aussi une $\mathcal{G}$ - semimartingale. Dans ce cas on a donc aussi une réponse positive à notre problème de projection.

Au cours des dernières années, on s'est intéressé aussi au problème inverse, celui du grossissement : étant donnée une $\mathcal{G}$- semimartingale, à quelle condition est-elle aussi une $\mathcal{F}$-semimartingale ? Nous nous proposons maintenant de donner un exemple de grossissement tel qu'aucune $\mathcal{G}$- martingale locale continue non constante ne soit une $\mathcal{F}$- semimartingale, mais auparavant nous allons répondre à une question d'Azema concernant le lien entre les tribus progressives et optionnelles (ou prévisibles) .

PROPOSITION 3. <u>La $\mathcal{F}$- tribu progressive est égale à l'intersection de tribus prévisibles (ou optionnelles) relatives aux filtrations translatées</u> $\mathcal{F}^h = (\mathcal{F}_{t+h})_{t \geq o}$, $h > 0$.

<u>Démonstration</u> : Notons d'abord que si un processus X est prévisible (ou optionnel) par rapport à $\mathcal{F}^h$ pour tout h , il est aussi $\mathcal{F}^h$- progressif et donc $\mathcal{F}$- progressif.

Réciproquement, soient X un processus $\mathcal{F}$- progressif et $h > o$ fixé. Pour établir que X est un processus $\mathcal{F}^h$- prévisible (ou optionnel), il suffit de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le processus $(X_t 1_{]nh,(n+1)h]}^{(t)})_{t \geq o}$ est $\mathcal{F}^h$- prévisible. Or la tribu $\mathcal{F}^h$- prévisible contient les processus de la forme $f(t)\ Z(\omega)\ 1_{]nh,(n+1)h]}$ où f est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^+$ et Z une $\mathcal{F}_{(n+1)h}$ variable aléatoire. Par classe monotone, on en déduit que le processus $(X_t 1_{]nh,(n+1)h]}^{(t)})_{t \geq o}$ qui est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}_{(n+1)h}$ mesurable appartient à la tribu $\mathcal{F}^h$ - prévisible .

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> M <u>une</u> $\mathcal{G}$- <u>martingale locale continue non constante. Alors</u> , <u>quel que soit</u> $h>0$, M <u>n'est pas une</u> $\mathcal{G}^h$- <u>semimartingale.</u>

<u>Démonstration</u> : Quitte à retrancher M_o à M on peut supposer $M_o = 0$. On sait que l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus au fermé $\{M = 0\}$ est progressif. D'après la proposition 3 , cet ensemble est $\mathcal{G}^h$- optionnel. Il suffit alors de reprendre la démonstration de BARLOW [1] pour conclure que M n'est pas une $\mathcal{G}^h$- semimartingale.

REFERENCES

[1] M.T. BARLOW : On the left end points of brownian excursions. Séminaire de probabilités XIII , L.N. 721 , (1979) p. 646 .

[2] C. STRICKER : Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle Z.W. 39 (1977) p. 55-64 .

REMARQUE. Voici une démonstration beaucoup plus simple de la proposition 4, due à E. Lenglart. Soit X une semimartingale de la filtration $\underline{\underline{G}}^h$, adaptée à $\underline{\underline{G}}$. Par un changement de loi, nous pouvons supposer que X est une quasimartingale sur tout intervalle fini. Soit (t_i) une subdivision de $\mathbb{R}_+$ de pas < h. Alors la variation stochastique de X par rapport à la filtration $\underline{\underline{G}}^h$:

$$\Sigma|E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\underline{\underline{G}}^h_{t_i}]|$$

est tout simplement la variation ordinaire de X, puisque $X_{t_{i+1}}$ est $\underline{\underline{G}}^h_{t_i}$-mesurable. Donc X est un processus à variation finie.