

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

## **Projection optionnelle et semi-martingales**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 14 (1980), p. 112-115

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1980\\_\\_14\\_\\_112\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__112_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROJECTION OPTIONNELLE ET SEMIMARTINGALES

par C. STRICKER

En théorie du filtrage, on rencontre souvent la situation suivante :

1) L'histoire d'un phénomène : émission - réception - brouillage représenté par la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

2) Le phénomène observé, représenté par une sous-filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  de la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Dans ce cadre, le problème suivant apparaît fréquemment : étant donnée une  $\mathcal{F}$ -semimartingale  $X$  bornée, est-ce que sa  $\mathcal{G}$ -projection optionnelle est une  $\mathcal{G}$ -semimartingale ? La proposition suivante montre qu'en général la réponse est négative.

PROPOSITION 1. S'il existe deux  $\mathcal{G}$ -temps d'arrêt  $S$  et  $T$  et une variable aléatoire  $X$  prenant (avec prob. positive) une infinité de valeurs, tels que  $P\{S < T\} > 0$ ,  $X \in \mathcal{F}_S$  et  $X$  soit indépendante de  $\mathcal{G}_T$ , alors il existe une semimartingale bornée dont la  $\mathcal{G}$ -projection optionnelle n'est pas une  $\mathcal{G}$ -semimartingale.

Démonstration : Notons que l'existence de  $X$  est équivalente à l'existence d'une suite d'ensembles  $(A_n)$ , non négligeables, disjoints deux à deux et appartenant à  $\mathcal{F}_S$ , tels que la tribu engendrée par eux soit indépendante de  $\mathcal{G}_T$ . Notons  $\alpha = P(\cup_i A_i)$  et posons :

$$Y^n = (-1)^n \sum_{m \geq m_n} 1_{A_m} \quad \text{où} \quad m_n = \sup \{ n : \sum_{m \geq n} P(A_m) \geq \frac{\alpha}{n} \}$$

$$Y_t = \sum_n Y^n 1_{[S_{n+1}, S_n[} \quad \text{où} \quad S_n = (S + \frac{1}{n}) \wedge T.$$

Alors le processus  $Y$  est une  $\mathfrak{F}$ -semimartingale car  $Y$  est à variation bornée.

Désignons par  $Y^\circ$  sa projection optionnelle sur la filtration  $\mathfrak{G}$ . Supposons

que  $Y^\circ$  soit une  $\mathfrak{G}$ -semimartingale. Comme  $|Y| \leq 1$  (et donc  $|Y^\circ| \leq 1$ ),

$Y^\circ$  est une  $\mathfrak{G}$ -semimartingale spéciale. Il existe alors un  $\mathfrak{G}$ -temps d'arrêt

$K$  tel que  $P\{S < K < T\} > 0$  et que la fonction de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $n$

associe  $V_n = E[X_{S_n \wedge K}^\circ]$ , soit à variation bornée. Or  $V_n = E[X_{S_n \wedge K}]$  car

$S_n$  et  $K$  sont des  $\mathfrak{G}$ -temps d'arrêt. L'appartenance de  $S_n \wedge K$  à  $\mathfrak{G}_T$

entraîne que pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$   $V_{n_0+1} = \sum_n E[Y^n] P\{S_{n+1} \leq K \wedge S_{n_0+1} < S_n\}$

$$= \sum_{n > n_0} E[Y^n] P\{S_{n+1} \leq K < S_n\} + E[Y^{n_0}] P\{S_{n_0+1} \leq K, S_{n_0+1} < S_{n_0}\}. \text{ D'où}$$

$$|V_{n_0+2} - V_{n_0+1}| = |E[Y^{n_0+1}] (P\{S_{n_0+2} \leq K, S_{n_0+2} < S_{n_0+1}\} - P\{S_{n_0+2} \leq K < S_{n_0+1}\})$$

$$- E[Y^{n_0}] P\{S_{n_0+1} \leq K, S_{n_0+1} < S_{n_0}\}|$$

$$= |E[Y^{n_0+1}] P\{S_{n_0+1} \leq K, S_{n_0+2} < S_{n_0+1}\} - E[Y^{n_0}] P\{S_{n_0+1} \leq K, S_{n_0+1} < S_{n_0}\}|$$

$$\geq \frac{2\alpha P\{S_{n_0+1} \leq K, S_{n_0+1} < S_{n_0}\}}{n_0+1} - P\{S_{n_0+1} = S_{n_0}, S_{n_0+2} < S_{n_0+1}\}.$$

La série  $\sum |V_{n_0+1} - V_{n_0}|$  diverge, ce qui est absurde. Aussi  $Y^\circ$  n'est pas une  $\mathfrak{G}$ -semimartingale.

Toutefois, on a le résultat positif suivant contenu implicitement dans [2].

**PROPOSITION 2.** Si  $X$  est une  $\mathfrak{F}$ -quasimartingale, alors  $X^\circ$  est une  $\mathfrak{G}$ -quasimartingale et  $\text{Var}(X^\circ, \mathfrak{G}) \leq \text{Var}(X, \mathfrak{F})$ .

On démontre aisément ce résultat grâce à la décomposition de Rao ou en étudiant directement la variation de  $X$ . Notons que cette proposition nous a permis de démontrer dans [2] que si  $\mathfrak{G}$  contient la filtration naturelle de la

$\mathfrak{F}$ -semimartingale  $X$ , alors  $X$  est aussi une  $\mathfrak{G}$ -semimartingale. Dans ce cas on a donc aussi une réponse positive à notre problème de projection.

Au cours des dernières années, on s'est intéressé aussi au problème inverse, celui du grossissement : étant donnée une  $\mathbb{Q}$ -semimartingale, à quelle condition est-elle aussi une  $\mathfrak{F}$ -semimartingale ? Nous nous proposons maintenant de donner un exemple de grossissement tel qu'aucune  $\mathbb{Q}$ -martingale locale continue non constante ne soit une  $\mathfrak{F}$ -semimartingale, mais auparavant nous allons répondre à une question d'Azema concernant le lien entre les tribus progressives et optionnelles (ou prévisibles) .

PROPOSITION 3. La  $\mathfrak{F}$ -tribu progressive est égale à l'intersection de tribus prévisibles (ou optionnelles) relatives aux filtrations translátées

$$\mathfrak{F}^h = (\mathfrak{F}_{t+h})_{t \geq 0}, \quad h > 0.$$

Démonstration : Notons d'abord que si un processus  $X$  est prévisible (ou optionnel) par rapport à  $\mathfrak{F}^h$  pour tout  $h$ , il est aussi  $\mathfrak{F}^h$ -progressif et donc  $\mathfrak{F}$ -progressif.

Réciproquement, soient  $X$  un processus  $\mathfrak{F}$ -progressif et  $h > 0$  fixé.

Pour établir que  $X$  est un processus  $\mathfrak{F}^h$ -prévisible (ou optionnel), il suffit de démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le processus  $(X_{t+1}]_{nh, (n+1)h}]^{(t)}_{t \geq 0}$  est  $\mathfrak{F}^h$ -prévisible. Or la tribu  $\mathfrak{F}^h$ -prévisible contient les processus de la forme  $f(t) Z(\omega) 1_{]nh, (n+1)h]}$  où  $f$  est une fonction borélienne sur  $\mathbb{R}^+$  et  $Z$  une  $\mathfrak{F}_{(n+1)h}$  variable aléatoire. Par classe monotone, on en déduit que le processus  $(X_{t+1}]_{nh, (n+1)h}]^{(t)}_{t \geq 0}$  qui est  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathfrak{F}_{(n+1)h}$  mesurable appartient à la tribu  $\mathfrak{F}^h$ -prévisible .

PROPOSITION 4. Soit  $M$  une  $\mathbb{Q}$ -martingale locale continue non constante. Alors, quel que soit  $h > 0$ ,  $M$  n'est pas une  $\mathbb{Q}^h$ -semimartingale.

Démonstration : Quitte à retrancher  $M_0$  à  $M$  on peut supposer  $M_0 = 0$  .

On sait que l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus au fermé  $\{M = 0\}$  est progressif. D'après la proposition 3, cet ensemble est  $\mathbb{Q}^h$ -optionnel. Il suffit alors de reprendre la démonstration de BARLOW [1] pour conclure que  $M$  n'est pas une  $\mathbb{Q}^h$ -semimartingale.

REFERENCES

- [1] M.T. BARLOW : On the left end points of brownian excursions.  
Séminaire de probabilités XIII , L.N. 721 ,  
(1979) p. 646 .
- [2] C. STRICKER : Quasimartingales, martingales locales,  
semimartingales et filtration naturelle  
Z.W. 39 (1977) p. 55-64 .

REMARQUE. Voici une démonstration beaucoup plus simple de la proposition 4, due à E. Lenglart. Soit  $X$  une semimartingale de la filtration  $\underline{G}^h$ , adaptée à  $\underline{G}$ . Par un changement de loi, nous pouvons supposer que  $X$  est une quasimartingale sur tout intervalle fini. Soit  $(t_i)$  une subdivision de  $\mathbb{R}_+$  de pas  $< h$ . Alors la variation stochastique de  $X$  par rapport à la filtration  $\underline{G}^h$  :

$$\sum |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \underline{G}_{t_i}^h]|$$

est tout simplement la variation ordinaire de  $X$ , puisque  $X_{t_{i+1}}$  est  $\underline{G}_{t_i}^h$ -mesurable.

Donc  $X$  est un processus à variation finie.