

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Prolongement des semi-martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 104-111

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__104_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__104_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT DES SEMIMARTINGALES

par C. Stricker

L'objet de ce travail est d'étudier le prolongement en 0 et $+\infty$ des semimartingales dans $]0, +\infty[$. Après avoir étudié ce cas particulier avec des méthodes probabilistes, nous donnerons un résultat général de prolongement qui a des applications intéressantes pour "les mesures semimartingales" (cf [8]). Pour cela nous utiliserons un théorème d'analyse fonctionnelle dû à Maurey et Pisier [5]. Nous remercions vivement P. A. Meyer pour ses nombreuses remarques et améliorations.

PROLONGEMENT DES SEMIMARTINGALES SUR $]0, +\infty[$.

Précisons d'abord les notations et faisons quelques rappels. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles de la théorie des processus. Soit X une semimartingale. On dit que X est une semimartingale jusqu'à l'infini s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt tendant stationnairement vers $+\infty$, tels que pour tout n le processus X arrêté à l'instant T_n , noté X^{T_n} , soit une semimartingale appartenant à \mathcal{M}^1 . Le théorème suivant qui améliore un résultat de Lenglart donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

THEOREME 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) X est une semimartingale jusqu'à l'infini,
- b) il existe une loi de probabilité Q équivalente à P telle que X soit une Q -quasimartingale,

c) pour tout ensemble prévisible A , la suite $(1_A \cdot X)_n$ converge en probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration : Meyer a établi l'implication $a) \Rightarrow b)$ dans l'article

[7]. Réciproquement si X est une quasimartingale, il existe deux surmartingales positives X' et X'' telles que $X = X' - X''$. On remarque alors aisément que les temps d'arrêt $T_n = \inf\{t, X'_t \geq n \text{ ou } X''_t \geq n\}$ tendent stationnairement vers $+\infty$ et les surmartingales $(X')^{T_n}$ et $(X'')^{T_n}$ appartiennent à la classe D , donc à \mathcal{H}^1 . L'implication $a) \Rightarrow c)$ est bien connue. La démonstration de la réciproque est plus délicate et se fera en plusieurs étapes. Nous noterons X^n la semimartingale X arrêtée à l'instant n . D'après un résultat de Dellacherie [1], il existe une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n appartiennent à l'espace normé $\mathcal{M} \oplus G$: autrement dit, pour la loi Q , X^n est spéciale de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$, M^n appartenant à l'espace vectoriel \mathcal{M} des martingales de carré intégrable muni de la norme $\|M^n\|_{\mathcal{M}}^2 = E[M^n, M^n]_\infty$, A^n appartenant à l'espace vectoriel G des processus à variation intégrable muni de la norme $\|A^n\|_G = E[\int_0^\infty |dA^n|]$. $\tilde{\mathcal{P}}$ désigne la tribu quotient de la tribu prévisible \mathcal{P} par la relation d'équivalence : $A \sim B$ si et seulement si pour tout n , $1_A \cdot X^n = 1_B \cdot X^n$. On pose :

$$\|X^n\| = \|M^n\|_{\mathcal{M}} + \|A^n\|_G$$

$$d(A, B) = \sum_n \frac{\|(1_A - 1_B) \cdot X^n\|}{2^n(1 + \|X^n\|)} \quad \text{pour tout } A, B \in \tilde{\mathcal{P}}$$

$$J^n(A) = (1_A \cdot X^n)_\infty \quad \text{pour tout } A \in \tilde{\mathcal{P}}$$

$$J(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^n(A), \quad \text{la limite étant prise en probabilité.}$$

On désigne par L^0 l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires p.s. finies, muni de la topologie de la convergence en probabilité avec la quasinnorme $\|U\|_{L^0} = E[1_A |U|]$.

Le lemme suivant est analogue au lemme 1 d'Emery [3] avec une démonstration un peu différente.

LEMME 1. d est une distance sur $\tilde{\mathcal{P}}$ pour laquelle $\tilde{\mathcal{P}}$ est complet. Les applications J^n de $\tilde{\mathcal{P}}$ dans L^0 sont continues pour tout n et J est aussi continue.

Démonstration : d est évidemment une distance sur $\tilde{\mathcal{P}}$. Si (A_n) est une suite de Cauchy pour d , c'est aussi une suite de Cauchy dans

$$L^2(\mathcal{P}, \sum_n \frac{d[M^n, M^n]dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}) \cap L^1(\mathcal{P}, \sum_n \frac{|dA^n|dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}) .$$

Donc (1_{A_n}) converge dans $L^2(\dots) \cap L^1(\dots)$ vers l'indicatrice d'un ensemble prévisible A . Par conséquent (A_n) converge aussi vers A dans $\tilde{\mathcal{P}}$. Les applications J^n sont lipschitziennes, donc continues. Il en résulte que J admet aussi un point de continuité. Comme J est additive, on vérifie aisément que J est continue partout.

Nous abordons maintenant la deuxième étape de notre démonstration.

LEMME 2. La variable aléatoire $X^* = \sup |X_s|$ est finie p.s.

Démonstration : Par hypothèse, les variables aléatoires $J^n(A)$ convergent dans L^0 vers $J(A)$. En prenant $A = \mathbb{R}^+ \times \Omega$, on constate que la suite $X_\infty^n = X_n$ converge en probabilité lorsque $n \rightarrow +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la convergence a lieu p.s. Notons $T_n = \inf\{t \geq n, |X_t| \geq |X_n| + 1\}$. Sur l'ensemble $T_n < +\infty$, $|J(]n, T_n])| \geq 1$. D'après le lemme 1 cette suite de variables aléatoires tend vers 0 dans L^0 . Donc $P[T_n < +\infty]$ tend vers 0. Mais on a l'inclusion : $\{T_n < +\infty\} \supset \{X^* = +\infty\}$. Donc $P[X^* = +\infty] = 0$ et le

lemme est établi.

Notons que le résultat du lemme 2 subsiste si on remplace X par l'intégrale stochastique (sur $[0, +\infty[$) $1_A \cdot X$ pour tout ensemble prévisible A . On peut alors invoquer un résultat de Lenglart [4] ou donner une démonstration directe pour la dernière étape. Rappelons que nous avons choisi pour le lemme 1 une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n soient dans $\mathcal{M} \oplus G$. Compte tenu du lemme 2, on peut exiger de plus que $E_Q[X] < +\infty$. Nous fixons désormais la loi Q et toutes les intégrales se rapporteront à cette loi. Comme la semimartingale X^n est dans $\mathcal{M} \oplus G$, elle est spéciale, de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$. Il existe un processus prévisible ϵ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ tel que $\epsilon dA^n = |dA^n|$ pour tout n . Posons : $\sigma = 1_{\{\epsilon=1\}}$, $\sigma' = 1_{\{\epsilon=-1\}}$. Soit $T_p = \inf\{t, |(\sigma \cdot X)_t| \vee |(\sigma' \cdot X)_t| \geq p\}$. Les processus $\sigma \cdot X$ et $\sigma' \cdot X$ arrêtés à l'instant T_p sont bornés par $p + X^*$ car $\Delta(\sigma \cdot X)_{T_p} = \sigma_{T_p} \Delta X_{T_p}$. Nous noterons encore $\sigma \cdot X$ (resp. $\sigma' \cdot X$) les processus arrêtés à l'instant T_p . D'après le lemme 2, $(\sigma \cdot X)^*$ est aussi fini p.s. et la suite (T_p) tend stationnairement vers $+\infty$. Pour établir que X est une semimartingale jusqu'à l'infini, il suffit de montrer que les semimartingales arrêtées $\sigma \cdot X$ et $\sigma' \cdot X$ sont dans \mathcal{H}^1 . Or $\sigma \cdot A^n$ est un processus croissant intégrable et $\sigma \cdot M^n$ est une martingale de carré intégrable que nous pouvons supposer nulle en 0. Dans ce cas $E[\sigma \cdot A_\infty^n] = E[\sigma \cdot X_\infty^n] \leq p + E[X^*]$. Grâce au lemme de Fatou, on en déduit que $E[\sigma \cdot A_\infty] < +\infty$. Comme $(\sigma \cdot M^n) \leq (\sigma \cdot X)^* + \sigma \cdot A_\infty$, on en déduit que la martingale $\sigma \cdot M$ appartient à \mathcal{H}^1 et le théorème 1 est établi.

On a un théorème analogue pour le prolongement en 0 des semimartingales dans $]0, +\infty[$. Nous dirons d'après [6] et [8] qu'un processus X est une semimartingale dans $]0, +\infty[$ si pour tout n , $X 1_{[\frac{1}{n}, +\infty[}$ est une semimartingale au sens habituel.

THEOREME 2. Soit X une semimartingale dans $]0, +\infty[$. Alors X est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une semimartingale si et seulement si pour tout ensemble prévisible A , les variables aléatoires $\int_{1/n}^1 1_A dX$ convergent dans L^0 .

Ce théorème est analogue au théorème 1 et on peut transcrire la démonstration précédente mais c'est beaucoup plus pénible... En particulier l'équivalent du lemme 2 utilise un résultat de Mertens explicité dans [9] et qui nous a été communiqué par Meyer.

C'est pourquoi nous allons établir un résultat plus général avec une méthode différente faisant appel à l'analyse fonctionnelle.

UN THEOREME GENERAL DE PROLONGEMENT.

Dans l'étude en 0 et $+\infty$ nous étions amenés à introduire les semimartingales jusqu'à l'infini $X^n = 1_{]1/n, 1]} \cdot X$ (resp. $X^n = 1_{[0, n]} \cdot X$). Voici le résultat général qui englobe les théorèmes 1 et 2.

THEOREME 3. Soient (A_n) une suite croissante d'ensembles prévisibles de réunion A et (X^n) une suite de semimartingales jusqu'à l'infini telles que : $X^n = 1_{A_n} \cdot X^{n+1}$ et pour tout ensemble prévisible K la suite $(1_K \cdot X^n)_\infty$ converge dans L^0 vers une v.a. notée $J(K)$. Alors la suite (X^n) converge pour la topologie des semimartingales vers une semimartingale X telle que $1_{A^c} \cdot X = 0$.

Démonstration : La démonstration se fait aussi en plusieurs étapes. Rappelons d'abord un très joli résultat dû à Maurey et Pisier [5].

THEOREME 4. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$ il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que pour toute famille finie Z_1, \dots, Z_n de v.a. et toute suite finie de réels c_1, \dots, c_n bornés par 1 :

$$Q\left[\left|\sum_{i=1}^n c_i Z_i\right| \geq 1\right] \leq \alpha + K \sup_{\epsilon} Q\left[\left|\sum_{i=1}^n \epsilon_i Z_i\right| \geq \delta\right]$$

où ϵ parcourt l'ensemble $\{-1, 1\}^n$, K étant une constante universelle.

Soit I l'algèbre engendrée par les intervalles stochastiques dyadiques. Comme l'ensemble des v.a. de la forme $J[(A \setminus A_n) \cap B]$, B parcourant I , est dénombrable, on peut supposer que toutes ces v.a. appartiennent à $L^1(Q)$ (cf [1]). Notons que $J(A_n \cap B) = (1_B \cdot X^n)_\infty$ est aussi intégrable pour tout n . Nous nous proposons de montrer maintenant que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $Q[|J(f)| \geq c] \leq \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $f \in \bar{I}$, \bar{I} désignant l'enveloppe convexe de I . Fixons $\epsilon > 0$ et prenons $\alpha = \frac{\epsilon}{3}$. Il lui correspond d'après le théorème 4 un certain $\delta > 0$. Par ailleurs il existe $\eta > 0$ tel que $d(B, \emptyset) < \eta$ implique $Q[|J(B)| > \frac{\delta}{2}] < \frac{\epsilon}{3K}$. Rappelons que $A = \bigcup A_n$ et que la suite (A_n) est croissante. Ainsi il existe n_0 tel que $d(A \setminus A_{n_0}, \emptyset) < \eta$. Notons \bar{J} la "restriction" de J à $A \setminus A_{n_0}$ c'est-à-dire : $\bar{J}(B) = J(B \cap (A \setminus A_{n_0}))$ pour tout $B \in \tilde{\mathcal{P}}$. Alors pour tout B prévisible $Q[|\bar{J}(B)| > \frac{\delta}{2}] < \frac{\epsilon}{3K}$. Tout élément f de \bar{I} s'écrit sous la forme :

$$f = \sum_{p=1}^n \lambda_p 1_{D_p} \quad \text{où les } (D_p) \text{ appartiennent à } I, \text{ sont deux à deux disjoints et}$$

$$0 \leq \lambda_p \leq 1 \text{ pour tout } p. \text{ Or } \sum_{p=1}^n \pm 1_{D_p} = 1_D - 1_{D'}, \text{ avec } D, D' \in I \text{ car les } (D_p) \text{ sont deux à deux disjoints. Donc } Q\left[\left|\bar{J}\left(\sum_{p=1}^n \pm 1_{D_p}\right)\right| \geq \delta\right] \leq Q[|\bar{J}(D)| \geq \frac{\delta}{2}] +$$

$$+ Q[|\bar{J}(D')| \geq \frac{\delta}{2}] \leq 2\frac{\epsilon}{3}. \text{ Le théorème de Maurey et Pisier implique que}$$

$$Q[|\bar{J}(f)| \geq 1] \leq \epsilon \text{ pour tout } f \in \bar{I}. \text{ Comme } J(A_{n_0} \cap B) = (1_B \cdot X^{n_0})_\infty \text{ pour tout}$$

$$B \in \mathcal{P} \text{ et que la semimartingale } X^{n_0} \text{ est une semimartingale jusqu'à l'infini,}$$

il existe $c' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in \bar{I}$, $Q[|J(A_{n_0} \cap f)| \geq c'] \leq \epsilon$. Or $J(\cdot) = \bar{J}(\cdot) + J(A_{n_0} \cap \cdot)$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in \bar{I}$, $Q[|J(f)| \geq c] \leq 2\epsilon$. On sait d'après un résultat de Dellacherie - Mokobodski dont la démonstration a été améliorée par Yan [11] qu'il existe une loi Q' équivalente à Q telle que $\sup_{f \in \bar{I}} E_{Q'}[J(f)] < +\infty$.

Il en résulte que $X_T = J([0, T])$ est une Q' -quasimartingale dont on peut choisir une version càdlàg (il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1.5 de [9]). Après le choix de la bonne version, $X_T = J([0, T])$ a encore lieu pour tout temps d'arrêt dyadique T . A l'aide du lemme 1 et du théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques, on voit que l'ensemble des $B \in \mathcal{P}$ qui vérifient $J(B) = (1_B \cdot X)_\infty$ est une classe monotone. Comme il contient l'algèbre engendrée pour les temps d'arrêt dyadiques, cette égalité a lieu pour tout B prévisible. Comme $X^n = 1_{A_n} \cdot X$, on en déduit que la suite (X^n) converge pour la topologie des semimartingales vers X . Il en résulte aussi que $1_{A^c} \cdot X = 0$ puisque $1_{A^c} \cdot X^n = 0$ pour tout n .

Remarques :

- a) La convergence pour la topologie des semimartingales entraîne en particulier le résultat suivant : si (H^n) est une suite de processus prévisibles uniformément bornés tendant simplement vers un processus (prévisible) H , alors $H^n \cdot X^n$ converge pour la topologie des semimartingales vers $H \cdot X$. Bien entendu, on ne peut pas remplacer la condition de borniture uniforme par la condition plus faible : $H^n \in L(X^n)$ pour tout n .
- b) Les applications aux mesures semimartingales sont développées dans [8].
- c) Une version plus faible du théorème 2 figure dans [3] et [10].

RECTIFICATION SUR LES EPREUVES. Dans l'énoncé du th.4, ajouter que les c_i sont bornés par 1 en valeur absolue, et remplacer la formule par

$$Q[|\sum_{i=1}^n c_i Z_i| \geq 1] \leq \alpha + K \sup_{\varepsilon} (\inf \{ \lambda : Q[|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i Z_i| \geq \lambda] \leq \delta \})$$

Dans la démonstration, ligne 9, choisir η tel que $Q[|J(B)| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] \leq \frac{\delta}{2}$.

Ligne 13, pour B prévisible $Q[|\bar{J}(B)| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] \leq \frac{\delta}{2}$. Enfin, lignes 16-17 $Q[|\bar{J}(\sum_p \pm 1_{D_p})| \geq \frac{\varepsilon}{3K}] \leq Q[|\bar{J}(D)| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] + Q[|\bar{J}(D')| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] \leq \delta$. Sans changement ensuite.

REFERENCES

-:-:-:-:-

- [1] DELLACHERIE C.: Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la
théorie des semimartingales. Séminaire de Probabilités XII,
p. 742, L.N. 649, Springer Verlag 1978.
- [2] DELLACHERIE C. et MEYER P.A.: Probabilités et Potentiels. Chapitre VI, n° 50b.
- [3] EMERY M.: Un théorème de Vitali-Hahn-Saks pour les semimartingales. A
paraître dans Z.W.
- [4] LENGART E.: Article à paraître.
- [5] MAUREY et PISIER G.: Un théorème d'extrapolation et ses conséquences. CRAS
Paris, T. 277, série A, 1973, p. 39-41.
- [6] MEYER P.A.: Sur un résultat de Laurent Schwartz. Dans ce volume.
- [7] MEYER P.A.: Sur un théorème de C. Stricker. Séminaire de Probabilités XI,
p. 482-489, L.N. 581, Springer Verlag 1977.
- [8] MEYER P.A. et STRICKER C.: Sur les semimartingales au sens de L. Schwartz.
A paraître dans Advances in Mathematics.
- [9] STRICKER C.: Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales. Séminaire de
Probabilités IX, p. 408-420, L.N. 465, Springer Verlag 1975.
- [10] STRICKER C.: Thèse de Doctorat 1979, page 114.
- [11] YAN J.A.: Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes dans L^1 ou
 \mathbb{H}^1 , a paraître dans ce volume.

Laboratoire associé au C.N.R.S n° 1
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX