SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD MAISONNEUVE

Martingales de valeur absolue donnée, d'après Protter-Sharpe

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 642-645

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__642_0>

MARTINGALES DE VALEUR ABSOLUE DONNEE, D'APRES PROTTER ET SHARPE.

par B. MAISONNEUVE

Gilat a montré dans [1] que, pour toute sous-martingale positive X, il existe une martingale M (définie sur un espace convenable) telle que les processus X et $|M|$ aient même loi. Ce résultat vient d'être précisé par Protter et Sharpe ([3]) dans le cas où X et X_- sont strictement positifs. Nous allons reprendre leur méthode, en la simplifiant, et généraliser un peu leurs résultats.

T désigne un ensemble totalement ordonné. Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ une sous-martingale positive, définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et relative à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Nous supposerons que X peut s'écrire $X = NA$, où N est une martingale positive relative à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ et A un processus croissant à valeurs réelles (finies) positives et adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Cette hypothèse est satisfaite si $T = \mathbb{R}_+$, si X est continue à droite et telle que X et X_- ne s'annulent pas, et si la filtration $(\mathcal{F}_t)$ satisfait aux conditions habituelles ; on peut alors choisir A prévisible et tel que $A_o = 1$, d'après un résultat de Meyer et Yoeurp ([2]).

Par ailleurs, soit $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ un espace probabilisé sur lequel se trouve définie une martingale continue à droite $(Y_a)_{a\in\mathbb{R}_+}$ telle que $|Y_a| = a$ p.s. pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ (par exemple, on peut prendre $Y_a = B_{T_a}$, où B est un mouvement brownien réel issu de 0 et où $T_a = \mathrm{Inf}\{s : |B_s| > a\}$). La martingale Y est symétrique ; en effet, $|-Y_a| = a$ p.s. pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et il résulte de la proposition 2 ci-dessous (appliquée à $T = \mathbb{R}_+$, $a(t) = t$) que les processus Y et $-Y$ ont même loi.

Soit $(W, \mathcal{G}, Q)$ le produit des espaces $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$.

PROPOSITION 1. - Dans les conditions énoncées ci-dessus le processus $(M_t)_{t\in T}$ défini sur $(W, \mathcal{G}, Q)$ par

$$M_t(\omega, \omega') = N_t(\omega) Y_{A_t(\omega)}(\omega') \qquad t \in T \ , \quad \omega \in \Omega \ , \quad \omega' \in \Omega'$$

est une martingale symétrique (donc centrée) ; les processus X et $|M|$ ont même loi.

Démonstration : Soit $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq s \leq t$, ces éléments étant tous dans T , et soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$. Pour établir que M est une martingale, il s'agit de montrer que

$$(1) \qquad E_Q\left[f\left(M_{s_1}, \ldots, M_{s_n}\right) M_t\right] = E_Q\left[f\left(M_{s_1}, \ldots, M_{s_n}\right) M_s\right] \ .$$

D'après le théorème de Fubini, le premier membre s'écrit

$$\int_\Omega dP(\omega) \int_{\Omega'} dP'(\omega') f\left(N_{s_1}(\omega) Y_{A_{s_1}(\omega)}(\omega'), \ldots, N_{s_n}(\omega) Y_{A_{s_n}(\omega)}(\omega')\right) N_t(\omega) Y_{A_t(\omega)}(\omega') \ ,$$

où l'on peut remplacer $A_t(\omega)$ par $A_s(\omega)$, puisque Y est une martingale sur Ω' et que $A_s(\omega) \leq A_t(\omega)$; en intervertissant l'ordre des intégrations et en utilisant la propriété de martingale de N relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)$, on peut ensuite remplacer $N_t(\omega)$ par $N_s(\omega)$, d'où l'égalité (1). La symétrie de Y et le théorème de Fubini entraînent la symétrie de M .

Remarques.

1) Gilat considère le cas des sous-martingales généralisées positives, du moins lorsque $T = \mathbb{N}$. Ici il n'y a aucune difficulté à étendre la proposition 1 à de tels processus et pour T quelconque : on remplace partout dans l'énoncé le mot martingale par le mot martingale généralisée. Rappelons que, d'une manière générale, un processus réel $(X_t)_{t\in T}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une (sous-)martingale généralisée relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si pour $s, t \in T$, $s \leq t$

a) $A \in \mathcal{F}_s$, $\int_A |X_t| dP < \infty \Rightarrow E[X_t I_A | \mathcal{F}_s] (\geq) = X_s I_A$,

b) la mesure $|X_t| . P$ est σ-finie sur $\mathcal{F}_s$.

2) Soit M une martingale telle que X et $|M|$ aient même loi. La loi de M n'est en général pas uniquement déterminée par cette condition. Toutefois, si X est déterministe, c'est-à-dire si $X_t = a(t)$ où a est une application croissante de T dans $\mathbb{R}_+$, et si on exige que M soit centrée, la loi de M est uniquement déterminée, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - Soit a une application croissante de T dans $\mathbb{R}_+$ et soit $T^* = \{t \in T : a(t) > 0\}$. Si $(M_t)_{t\in T}$ est une martingale centrée, définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et telle que $|M_t| = a(t)$ p.s. pour tout $t \in T$, le processus $\left(S_t = \frac{M_t}{a(t)}\right)_{t\in T^*}$ est un processus de Markov à valeurs dans $E = \{-1, +1\}$, de fonction de transition $(P_s^t)_{s\leq t}$ donnée par

$$P_s^t(\varepsilon, \{\varepsilon'\}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a(s)}{a(t)}\varepsilon\varepsilon'\right) \qquad s,t \in T^*, \quad s \leq t, \quad \varepsilon, \varepsilon' \in E$$

et on a $P\{S_t = 1\} = \frac{1}{2}$ $\forall t \in T^*$. Il en résulte que la loi de M est uniquement déterminée.

Démonstration : On vérifie immédiatement que les noyaux P_s^t sont markoviens et vérifient la relation de Chapman-Kolmogorov. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ la famille naturelle de M. La propriété de martingale de M entraîne que, si $s,t \in T^*$, $s \leq t$,

$$E[1 + S_t | \mathcal{F}_s] = 1 + \frac{a(s)}{a(t)} S_s .$$

Comme $|S_t| = 1$ p.s., le premier membre vaut $2P\{S_t = 1 | \mathcal{F}_s\}$ et par suite, pour $\varepsilon = \pm 1$

$$P\{S_t = \varepsilon | \mathcal{F}_s\} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a(s)}{a(t)} S_s \varepsilon\right) = P_s^t(S_s, \{\varepsilon\}) ,$$

d'où la propriété de Markov indiquée. En prenant $s = t$, on obtient $P\{S_t = \varepsilon\} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon E(S_t)) = \frac{1}{2}$ puisque $E(M_t) = 0$. La loi du processus $\left(\frac{M_t}{a(t)}\right)_{t\in T^*}$ est donc déterminée, et comme $M_t = 0$ p.s. si $a(t) = 0$, la loi de M est également déterminée.

REFERENCES

[1] D. GILAT (1977) - "Every non-negative submartingale is the absolute value of a martingale". Annals of Probability 5, 475-481.

[2] Ch. YOEURP et P.A. MEYER (1976) - "Sur la décomposition multiplicative des sous-martingales positives". Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in Mathematics, vol. 511, 501-504, Springer.

[3] P. PROTTER and M.J. SHARPE - "Martingales with given absolute value". To appear in Ann. of Prob.

RESUME.

We improve and extend the method of Protter and Sharpe of showing Gilat's result that "every non-negative submartingale is the absolute value of a martingale", in the case where the submartingale admits a multiplicative decomposition.

-:-:-:-