

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA

MARC YOR

Le problème de Skorokhod : compléments à l'exposé précédent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 625-633

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__625_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE PROBLEME DE SKOROKHOD : COMPLEMENTS

A L'EXPOSE PRECEDENT *

par Jacques Azéma et Marc Yor

Dans l'exposé précédent, l'hypothèse " μ a un moment du second ordre" est inutile pour construire le temps d'arrêt $T = \inf\{t ; S_t \geq \psi_\mu(X_t)\}$ et pour montrer que X_T a pour loi μ . L'hypothèse plus faible " μ a un moment d'ordre 1 et est centrée" suffit. Dans ce cas on ne peut évidemment pas espérer conserver l'intégrabilité de T , mais on montre au premier paragraphe de cet article que la martingale $(X_{t \wedge T})$ reste uniformément intégrable, ce qui avait été conjecturé par N.Falkner.

Au second paragraphe, on montre que la variable aléatoire $S_T = \sup_s X_{s \wedge T}$ est intégrable si et seulement si $\int_0^\infty t \log^+ t d\mu(t) < \infty$.

Remarquons qu'il s'agit d'une équivalence "one-sided", c'est-à-dire ne portant que sur le processus $(X_{t \wedge T}^+)$, et sur $\mu|_{[0, \infty[}$ (i.e : sur X_T^+). En outre, ce résultat permet de donner des exemples simples de martingales uniformément intégrables continues qui ne sont pas dans H^1 . Le fait qu'une martingale uniformément intégrable puisse être "grande" ne doit donc rien aux sauts et apparaît déjà dans le mouvement brownien. A y réfléchir de près, le résultat signalé au début du second paragraphe est un peu étonnant ; on sait bien, en effet, que si l'on quitte le domaine des martingales continues positives, H^1 ne se réduit pas à $L \log L$. Cette contradiction apparente est éclairée par un résultat d'extrémalité concernant le temps d'arrêt T qui nous a été suggéré par la lecture d'un travail récent de Dubins et Gilat[2]. Parmi tous les temps d'arrêt τ tels que la martingale $(X_{t \wedge \tau})$ soit uniformément

* voire "Une solution simple au problème de Skorokhod", page 90

intégrable et ait pour loi terminale μ , le temps T maximise en loi la variable aléatoire S_T . Ce résultat est énoncé précisément au paragraphe 3.

1) Sur l'intégrabilité uniforme de la martingale $(X_{t \wedge T})$

THEOREME 1.1. Supposons que μ admette un moment d'ordre 1 et soit centrée ; la martingale $(X_{t \wedge T})$ est alors uniformément intégrable.

Pour montrer ce théorème, nous aurons besoin de reprendre l'approximation faite dans la démonstration du théorème 3.4 de [1]. Rappelons que l'on a construit une suite (μ_n) de mesures à support compact vérifiant

$$\psi_{\mu_n}(x) = \psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -n \\ \psi_\mu(x) & \text{si } -n < x \leq n \\ \psi_\mu(n) & \text{si } n < x \leq \psi_\mu(n) \\ x & \text{si } x > \psi_\mu(n) \end{cases}$$

On a de plus la relation $\bar{\mu}_n(x) = \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(-n)} \left(\frac{n}{\psi_\mu(-n)+n} \right)$ si $-n < x \leq n$

On a alors le lemme suivant

LEMME 1.2. Soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction convexe, nulle à l'origine, telle que $\int h(|t|) d\mu(t) < \infty$;

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int h(|t|) d\mu_n(t) = \int h(|t|) d\mu(t)$

Démonstration (*). On sait que μ_n vérifie l'équation différentielle

$d\mu_n = \frac{\bar{\mu}_n(x)}{\psi_n(x_+) - x} d\psi_n(x)$ sur l'intervalle $] -\infty, \psi_n(n)[$; on peut donc écrire

(*) Dans tout cet article, on ne fera les démonstrations que dans le cas où $\mu[x, \infty[> 0 \forall x$; le cas où μ est à support compact, ne fait qu'ajouter quelques complications techniques sans intérêt.

$$\begin{aligned}
\int h(|t|) d\mu_n(t) &= \int_{[-\infty, \psi(n)]} h(|t|) \frac{\bar{\mu}_n(t)}{\psi_n(t_+) - t} d\psi_n(t) + h[\psi(n)] \mu_n[\psi(n)] \\
&= h(n) \frac{\psi(-n)_+}{\psi(-n)_+ + n} + \int_{[-n, +n]} h(|t|) \frac{n}{\bar{\mu}(-n) [\psi(-n) + n]} d\mu(t) \\
&\quad + h[\psi(n)] \frac{\bar{\mu}(n)}{\bar{\mu}(-n)} \frac{n}{\psi(-n) + n}
\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$, à

$$\frac{h(n)}{n} \int_{[-\infty, -n]} t d\mu(t), \text{ expression que l'on peut majorer, compte tenu de la}$$

croissance de $\frac{h(x)}{x}$, par $\int_{[-\infty, -n]} \frac{h(|t|)}{|t|} |t| d\mu(t)$, qui tend vers zéro,

lorsque $(n \rightarrow \infty)$.

Le second terme converge vers $\int h(|t|) d\mu(t)$, et le troisième est équivalent à $\bar{\mu}(n) h\left(\frac{1}{\bar{\mu}(n)} \int_{[n, \infty[} t d\mu(t)\right)$, expression que l'on majore, grâce à l'inégalité

de Jensen par $\int_{[n, \infty[} h(t) d\mu(t)$, qui tend vers zéro.

Démonstration du théorème 1.1 : Les mesures (μ_n) étant à support compact, les temps d'arrêt $T_n = T_{\mu_n}$ (qui croissent vers T) réduisent la martingale

$(X_t \wedge T)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que celle-ci

soit uniformément intégrable est donc que les variables $(|X_{T_n}|, n \in \mathbb{N})$

soient uniformément intégrables.

Or, d'après le lemme précédent appliqué à la fonction $h(x) = |x|$, on a :

$\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_{T_n}| = E|X_T|$. Les variables positives $(|X_{T_n}|, n \in \mathbb{N})$ convergent

p.s vers $|X_T|$, il est alors classique qu'elles convergent également dans L^1 vers $|X_T|$, et sont donc uniformément intégrables.

$(X_{t \wedge T})$ étant une martingale uniformément intégrable, on peut montrer le :

Corollaire 1.3. Si μ admet un moment d'ordre 1, et est centrée, alors :

$$1) \text{ pour tout } p < 1, E[\sup_t |X_{t \wedge T}|^p] \leq \frac{2}{1-p} \left(\int |x| d\mu(x) \right)^p$$

$$2) E[\sup_t |X_{t \wedge T}|] \leq \frac{e}{e-1} (1 + \int |x| \log^+ |x| d\mu(x))$$

$$3) \text{ pour tout } p > 1, \int |x|^p d\mu(x) \leq E[\sup_t |X_{t \wedge T}|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int |x|^p d\mu(x)$$

Démonstration :

1) D.Lépingle a montré en [4] que, pour toute surmartingale $Y \geq 0$, on a :

$$E[\sup_t Y_t^p | \mathcal{F}_0] \leq \frac{1}{1-p} Y_0^p, \text{ pour tout } p \in]0, 1[. \text{ On applique cela à }$$

$$(Y_t^{(1)} = E(X_T^+ | \mathcal{F}_t)) \text{ et } (Y_t^{(2)} = E(X_T^- | \mathcal{F}_t)).$$

2) et 3) découlent des inégalités de Doob dans L^p ($p \geq 1$) appliquées à $(X_{t \wedge T})$.

D'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, on a aussi :

si $\mu \in L \log L$, alors $E(\sqrt{T})$ est fini ; de même, μ admet un moment d'ordre

$p \in]1, \infty[$ si, et seulement si, T admet un moment d'ordre $(p/2)$. On retrouve

le cas du problème de Skorokhod proprement dit pour $p=2$.

2) Sur l'intégrabilité de S_T .

On dispose de la loi de S_T grâce à la proposition 3.6 de [1]. Dans le lemme qui suit nous allons donner une autre caractérisation de cette loi.

Voici d'abord quelques définitions.

On pose $\hat{\mu} = 1 - \bar{\mu} = \mu]^{-\infty, x[}$ ($\hat{\mu}$ est continue à gauche)

$f(u) = \inf\{s ; \hat{\mu}(s) \geq u\}$ (f est l'"inverse" continue à gauche de $\hat{\mu}$; elle est définie sur $[0, 1]$).

$$H(t) = \frac{1}{1-t} \int_t^1 f(s) ds \quad (0 \leq t < 1); \quad H \text{ est continue sur } [0, 1[.$$

Si enfin λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, on pose $\mu^* = H(\lambda)$,

et l'on a le lemme suivant

LEMME 2.1. La loi de S_T est μ^*

Démonstration : On montre facilement que H majore f , est croissante, et

vérifie $H(0) = 0$. H et f sont liées par l'équation différentielle

$dt [H(t) - f(t)] = (1-t)dH(t)$, de sorte que l'on peut écrire

si $0 \leq x \leq 1$

$$(1-x) = \exp\left(- \int_0^x \frac{dH(s)}{H(s)-f(s)}\right)$$

Posons $K(u) = \inf\{t ; H(t) \geq u\}$. On a

$$\lambda\{t ; H(t) \geq x\} = 1 - K(x) = \exp\left(- \int_0^{K(x)} \frac{dH(s)}{H(s)-f(s)}\right) = \exp\left(- \int_0^x \frac{ds}{s-f(K(s))}\right)$$

Il reste alors à remarquer que $H \circ \hat{\mu} = \psi$, de sorte que $\Phi = f \circ K$; on a donc

$$\mu^*[x, \infty[= \exp\left(- \int_0^x \frac{ds}{s-\Phi(s)}\right) = P[S_T \geq x], \quad \text{CQFD.}$$

Une fois le lemme 2.1 établi, le théorème suivant apparaît comme une variation (minime) sur le thème des inégalités maximales de Hardy-Littlewood [3].

THEOREME 2.2.

- 1) S_T est intégrable si, et seulement si $\int_0^\infty t \log^+ t \, d\mu(t) < \infty$
- 2) Pour tout $p > 1$, S_T^p est intégrable si, et seulement si, $\int_0^\infty t^p d\mu(t) < \infty$

Démonstration : 1) Remarquons tout d'abord que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) \geq 0$, on a l'équivalence :

$$\int_0^\infty t \log^+ t \, d\mu(t) < \infty \iff \int_\alpha^1 f(t) \log^+ f(t) \, dt < \infty$$

Calculons maintenant $E[S_T]$; on a d'après le lemme 2.1

$$E[S_T] = \int_0^\infty x \, d\mu^*(x) = \int_0^1 H(t) \, dt = \int_0^1 \frac{ds}{1-s} \int_s^1 f(u) \, du = \int_0^1 f(u) \log \frac{1}{1-u} \, du,$$

et l'on observe que le problème de la convergence de cette intégrale ne se pose qu'au voisinage de 1.

Supposons tout d'abord ES_T fini, ou encore $\int_0^1 ds f(s) \log \frac{1}{1-s} < \infty$; on peut

écrire

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v(1 - \hat{\mu}(v)) \leq \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{[v, \infty)} u \, d\mu(u) = 0$$

On a donc $\lim_{t \rightarrow 1} (1-t)f(t) \leq \lim_{t \rightarrow 1} f(t)[1 - \hat{\mu}(f(t))] = \lim_{v \rightarrow \infty} v(1 - \hat{\mu}(v)) = 0$

Pour t assez voisin de 1, $f(t)$ est donc majoré par $\frac{1}{1-t}$; il en résulte

que l'intégrale $\int_\alpha^1 f(s) \log^+ f(s) \, ds$ est convergente.

Inversement, supposons $\int_{\alpha}^1 f(s) \log^+ f(s) ds < \infty$; de l'inégalité classique

$a \log b \leq a \log a + b/e$ on tire l'inégalité $a \log b \leq 2a \log a + \frac{2\sqrt{b}}{e}$, et

l'on peut écrire

$$\int_{\alpha}^1 f(s) \log \frac{1}{1-s} ds \leq 2 \int_{\alpha}^1 f(s) \log f(s) ds + \frac{2}{e} \int_{\alpha}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} < +\infty$$

2) Soit $p > 1$. La fonction f est positive sur un intervalle $[\alpha, 1]$.

On en déduit l'équivalence : $E[S_T^p] < \infty \iff \int_{\alpha}^1 dt \left(\frac{1}{1-t} \int_t^1 f(s) ds \right)^p < \infty$

- Supposons $E[S_T^p] < \infty$; La fonction f étant croissante, on a :

$$\int_{\alpha}^1 dt f(t)^p < \infty, \text{ ce qui, par changement de variable entraîne :}$$

$$\int_0^{\infty} x^p d\mu(x) < \infty$$

- Inversement, on suppose $\int_0^{\infty} x^p d\mu(x) < \infty$, ce qui équivaut à :

$$\int_{\alpha}^1 f(t)^p dt < \infty, \text{ et le résultat cherché découle alors de l'inégalité de}$$

Hardy-Littlewood dans L^p , appliquée à $\phi = f \cdot 1_{[\alpha, 1]}$.

(L'inégalité en question est : pour tout $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$(H.L.)_p : \int_0^1 dt \left(\frac{1}{1-t} \int_t^1 \phi(s) ds \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^1 dt \phi(t)^p$$

3) Une propriété d'extrémalité.

Dubins et Gilat [2] viennent de montrer qu'il existe une relation entre l'application : $\mu \rightarrow \mu^*$ introduite au début du §2 et la théorie des martingales. Ils ont établi le résultat suivant : si on ordonne partiellement l'ensemble des probabilités sur \mathbb{R} par la relation $\gamma \leq \gamma' \iff \bar{\gamma} \leq \bar{\gamma}'$, alors, pour toute probabilité μ admettant un moment d'ordre 1, l'ensemble $M(\mu)$ des probabilités qui sont distribution du suprémum (essentiel) d'une martingale uniformément intégrable dont la variable aléatoire terminale a pour loi μ , admet μ^* pour borne supérieure. De plus ils exhibent une martingale (discontinue) qui permet de montrer que $\mu^* \in M(\mu)$.

Qu'apporte à ce théorème la construction que nous avons proposée ? Essentiellement que la borne supérieure μ^* de $M(\mu)$ peut être atteinte par une martingale continue. On peut alors, en suivant toujours [2], montrer que les inégalités de Doob sont "sharp", même si l'on s'astreint à rester dans le cadre des martingales continues.

Inversement, grâce au résultat de Dubins et Gilat, on peut énoncer la propriété suivante de notre solution du problème de Skorokhod : si μ est une mesure centrée admettant un moment d'ordre 1 et si τ est un autre temps d'arrêt tel que

- a) $P[X_\tau \in dx] = \mu(dx)$
 - b) $(X_\tau \wedge t)$ est uniformément intégrable
- alors $P[S_\tau \geq x] \geq P[S_\tau \geq x]$

Commentaire final. Il nous semble important de souligner les conséquences de la Note de Dubins et Gilat [2] :

- (i) L'appartenance de μ^* à $M(\mu)$ permet de déduire les inégalités de Hardy-Littlewood [3] de celles de Doob.
- (ii) Savoir que μ^* est la borne supérieure de $M(\mu)$ permet de déduire les inégalités de Doob de celles de Hardy-Littlewood.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.AZEMA et M.YOR : Une solution simple au problème de Skorokhod
(dans ce volume)
- [2] L.E.DUBINS and D.GILAT : On the distribution of maxima of martingales.
Proc. of the A.M.S. Vol 68,3, 337-338, 1978
- [3] G.H.HARDY and J.E.LITTLEWOOD : A maximal theorem with function - theoretic
applications, Acta Math. 54, 81-116, 1930.
- [4] D.LEPINGLE : Quelques inégalités concernant les martingales.
Studia Math. T LIX, p.63-83 (1976)