

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

**Présentation de l'« inégalité de Doob » de
Métivier et Pellaumail**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 611-613

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__611_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PRESENTATION DE L'<<INÉGALITE DE DOOB >> DE METIVIER-PELLAUMAIL

par P.A. Meyer

Dans le travail [1], Métivier et Pellaumail développent une théorie des équations différentielles stochastiques à partir de principes assez différents de ceux qu'a utilisés Catherine Doléans-Dade. Comme dans toute théorie des équations différentielles stochastiques, cependant, l'arrêt à T joue un rôle important, et le problème qui se pose à Métivier et Pellaumail est de trouver un substitut, pour l'arrêt à T , de l'inégalité de Doob :

Si M est une martingale de carré intégrable, et T est un temps d'arrêt, on a

$$(1) \quad \frac{1}{4}E[M_T^*{}^2] \leq E[[M, M]_T]$$

Comme d'habitude, $M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$. Voici l'inégalité de Métivier-Pellaumail :

Sous les mêmes hypothèses, si T est un temps d'arrêt >0 , on a

$$(2) \quad \frac{1}{4}E[M_{T-}^*{}^2] \leq E[[M, M]_{T-} + \langle M, M \rangle_{T-}]$$

L'hypothèse que $T > 0$ peut être gênante, et on est tenté de la lever en se ramenant à un calcul sur l'ensemble $\mathbb{F}_0$ -mesurable $\{T > 0\}$. C'est légitime si l'on a convenu que $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_{0-}$ pour le calcul de $\langle M, M \rangle$.

La démonstration de (2) est loin d'être évidente. Elle a été présentée par Métivier au séminaire de Strasbourg au cours de l'hiver 1977, avec ses conséquences pour la théorie des équations différentielles ; il nous semble qu'elle devrait intéresser beaucoup de lecteurs de ce volume.

CALCUL PRELIMINAIRE

Notations : $(\Omega, \mathbb{F}, P, (\mathbb{F}_t))$ comme d'habitude ; S est un temps prévisible >0 , et (H_t) est une martingale de carré intégrable, compensée d'un seul saut à l'instant prévisible S :

$$H_t = hI_{\{t \geq S\}} \quad \text{avec } h \in L^2(\mathbb{F}_S), E[h | \mathbb{F}_{S-}] = 0.$$

A est un élément de $\mathbb{F}_S$ (mais non de $\mathbb{F}_{S-}$ en général) et $\underline{G}$ est la tribu engendrée par $\mathbb{F}_{S-}$ et A . Pour alléger les notations on pose $B = A^C$, $a = P(A | \mathbb{F}_{S-})$, $b = 1 - a = P(B | \mathbb{F}_{S-})$, $k = E[h | \underline{G}]$. Enfin, on pose

$$(3) \quad \ell = hI_A + E[hI_B | \underline{G}], \quad \text{v.a. } \mathbb{F}_S\text{-mesurable.}$$

On a $E[h|\underline{G}] = E[h|\underline{G}]$, donc $E[h|\underline{F}_{S-}] = 0$, d'où une nouvelle martingale de carré intégrable

$$L_t = hI_{\{t \geq S\}}$$

H et L sont toutes deux nulles sur $[0, S[$, toutes deux égales à h après S sur l'ensemble A : autrement dit, elles sont égales sur $[0, S_B[$. Le but du calcul est d'estimer L , et plus précisément d'établir

$$(4) \quad E[[L, L]_S] \leq E[[H, H]_S I_A] + \langle H, H \rangle_S I_A$$

Nous avons d'abord $[L, L]_S = h^2$, $[H, H]_S = h^2$, et ces deux v.a. sont égales sur A . Tout revient donc à montrer

$$(5) \quad E[[L, L]_S I_B] \leq E[\langle H, H \rangle_S I_A] .$$

Du côté gauche, nous écrivons $h^2 = h^2 I_A + E[h|\underline{G}]^2 I_B$, donc $[L, L]_S I_B = k^2 I_B$. Du côté droit, $\langle H, H \rangle_S = E[h^2|\underline{F}_{S-}] \geq E[k^2|\underline{F}_{S-}]$ puisque $k = E[h|\underline{G}]$, tribu contenant $\underline{F}_{S-}$. Il suffit donc de prouver

$$E[k^2 I_B] \leq E[I_A E[k^2|\underline{F}_{S-}]]$$

En fait on a l'égalité : écrivons $k = XI_A + YI_B$, avec X, Y $\underline{F}_{S-}$ -mesurables. La relation $E[k|\underline{F}_{S-}] = 0$ s'écrit $Xa + Yb = 0$. On a $k^2 = X^2 I_A + Y^2 I_B$, donc

$$E[I_A E[k^2|\underline{F}_{S-}]] = E[I_A (X^2 a + Y^2 b)] = E[X^2 a^2 + Y^2 ab]$$

$$E[k^2 I_B] = E[Y^2 b] = E[Y^2 b(a+b)] = E[Y^2 b^2 + Y^2 ab] \quad (a+b=1 !)$$

Prenant la différence, on trouve $E[X^2 a^2 - Y^2 b^2] = E[(Xa + Yb)(Xa - Yb)] = E[0] = 0$.

DEMONSTRATION DE L'INEGALITE (2)

T étant un temps d'arrêt > 0 , soient S_n des temps prévisibles > 0 , à graphes disjoints, tels que les $[S_n]$ recouvrent la partie accessible de $[T]$. Quitte à remplacer S_n par $+\infty$ sur $\{S_n > T\}$, on peut supposer $S_n \leq T$ sur $\{S_n < \infty\}$. On pose

$$A_n = \{S_n < T\}, \quad B_n = A_n^c = \{S_n = T \text{ ou } S_n = +\infty\}$$

$$h^n = \Delta M_{S_n}, \quad H_t^n = h^n I_{\{t \geq S_n\}}$$

et pour chaque n on fait la construction précédente, fournissant une martingale L^n qui ne saute qu'à l'instant S_n . On peut décomposer M en une série orthogonale

$$M = N + \sum_n H^n$$

où N est continue aux instants S_n . La série orthogonale

$$\hat{M} = N + \sum_n L^n$$

est aussi convergente dans L^2 d'après (4). Comme $H^n = L^n$ sur $[0, (S_n)_{B_n}[,$ qui contient $[0, T[$, on a $M = \hat{M}$ sur $[0, T[$. D'après l'inégalité de

Doob usuelle pour $\hat{M}$, il suffit d'établir

$$E[[\hat{M}, \hat{M}]_T] \leq E[[M, M]_{T-} + \langle M, M \rangle_{T-}]$$

qui se ramène aux inégalités suivantes :

$$(6) \quad E[[N, N]_T] \leq E[\langle N, N \rangle_{T-}]$$

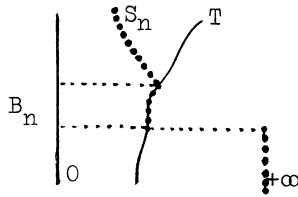
$$(7) \quad E[[L^n, L^n]_T] \leq E[[H^n, H^n]_{T-} + \langle H^n, H^n \rangle_{T-}]$$

(6) est immédiate : en effet, $\langle N, N \rangle$ est continu à l'instant T , donc $E[\langle N, N \rangle_{T-}] = E[\langle N, N \rangle_T] = E[[N, N]_T]$. Pour établir (7), nous remarquons que

$$[L^n, L^n]_T = [L^n, L^n]_{S^n}$$

$$[H^n, H^n]_{T-} + \langle H^n, H^n \rangle_{T-} = [H^n, H^n]_{S^n} I_{A_n} + \langle H^n, H^n \rangle_{I_{A_n}}$$

et (7) se ramène donc à (4).



- [1]. M. Métivier et J. Pellaumail. On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne n°28, Ecole Polytechnique, 1978.