

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RENÉ CARMONA

## Opérateur de Schrödinger à résolvante compacte

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 13 (1979), p. 570-573

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1979\\_\\_13\\_\\_570\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__570_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# OPERATEUR DE SCHRÖDINGER A RESOLVANTE COMPACTE

par René CARMONA

## Abstract:

*Using standard properties of Brownian paths, we give a sufficient condition for the compactness of the resolvent of Schrödinger operator  $-\frac{1}{2}\Delta + V$ .*

## I. INTRODUCTION:

Il est bien connu que le spectre de l'opérateur de Schrödinger est discret chaque fois que la fonction potentiel  $V$  tend vers l'infini; de façon précise, si  $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  est bornée inférieurement et si  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ , alors l'opérateur  $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$  défini comme somme de formes quadratiques, possède une résolvante compacte et par conséquent, son spectre est discret (voir [3.TheoremXII.67] par exemple). Une démonstration probabiliste de ce résultat existe, elle est due à D.RAY (voir [2.Proposition 3.4]). Récemment cette propriété a été généralisée aux fonctions  $V$  de la forme  $V = V_1 + V_2$  avec  $V_2 \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$  pour  $n \geq 2$ ,  $\inf \text{ess } V_1(x) > -k$  pour un réel  $k$ , et:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} k + \int_{S_a(x)} (V_1(y) + k)^{-1} dy = 0$$

où  $S_a(x)$  désigne la boule de centre  $x$  et de rayon  $a > 0$ . (voir [1]). La démonstration utilise des résultats fins sur la compacité des plongements d'espaces de Sobolev. Le but de cette note est de montrer qu'il est possible de modifier légèrement la démonstration probabiliste déjà mentionnée pour obtenir un résultat encore plus général.

## II. HYPOTHESES. NOTATIONS:

Nous utiliserons la représentation suivante du processus du mouvement brownien:  $\Omega$  est l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t$  est la fonction  $t$ -ième coordonnée ( $X_t(\omega) = \omega(t)$  si  $\omega \in \Omega$ ), et  $\mathcal{F}$  est la tribu engendrée par les applications  $X_t$  pour  $t \geq 0$ ;  $W_x$  est la mesure de Wiener du mouvement brownien issu de  $x \in \mathbb{R}^n$  à l'instant  $t=0$ , et l'espérance relativement à  $W_x$  est notée  $E_x$ .

Une fonction réelle mesurable  $V$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  est dite de classe  $\mathcal{V}$  si elle admet une décomposition  $V = V_1 + V_2$  avec  $V_1$  mesurable et borné inférieurement, et  $V_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  pour un réel  $p > \max\{1, n/2\}$  (\*). Si  $q \in [1, \infty]$ , si  $t \geq 0$ , si  $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$  posons:

$$[T_t f](x) = E_x \left\{ f(X_t) \exp \left[ - \int_0^t V(X_s) ds \right] \right\} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi défini,  $\{T_t; t \geq 0\}$  est un semi groupe exponentiellement borné d'opérateurs sur  $L^q(\mathbb{R}^n)$ . De plus, si  $V_1$  est localement intégrable et si  $q$  est fini, ce semi groupe est fortement continu (voir [2.Section III]).

Soit maintenant  $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$  l'opérateur de Schrodinger défini comme somme de formes quadratiques sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $H$  est un opérateur auto-adjoint borné inférieurement, et il se trouve que  $e^{-tH}$  coïncide avec  $T_t$  (voir [2.Section IV.2]). Dans le paragraphe suivant nous montrerons que, sous certaines conditions, les opérateurs  $T_t$  sont compacts; les résultats cherchés sur la résolvante de  $H$  s'en déduisent par la transformation de Laplace.

**III. RESULTAT:**

Rappelons tout d'abord le résultat de D.Ray:

**Proposition** ([2.Prop.3.4])

*Si  $V = V_1 - V_2$  est un potentiel de classe  $\mathcal{V}$  qui satisfait:*

$$\forall t > 0, \forall \gamma > 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} E_x \left\{ \exp \left[ - \int_0^t V_1(X_s) ds \right] ; |X_t| > a \right\} = 0 \quad (3.1)$$

*alors, pour tout  $t > 0$  et tout  $q \in [1, \infty]$ ,  $T_t$  est un opérateur compact sur  $L^q(\mathbb{R}^n)$ .*

Et remarquons que:

**Lemme:**

*L'énoncé (3.1) est vrai si  $V_1$  est une fonction réelle mesurable définie sur  $\mathbb{R}^n$  qui satisfait:*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_\alpha(x)} e^{-\beta V_1(y)} dy = 0 \quad (3.2)$$

*pour un (et donc pour tout) réel  $\alpha > 0$ , et pour tout réel  $\beta > 0$ .*

**Démonstration:**

---

(\*) Il est bon de noter que, dans la définition de la classe  $\mathcal{V}$ , les hypothèses sur  $V_2$  ne sont pas minimales. En effet il suffit de supposer que  $V_2$  est somme de fonctions  $U_i$  qui ne dépendent que de  $n_i$  variables, et qui sont uniformément localement dans  $L^{p_i}$  pour un  $p_i > \max\{1, n_i/2\}$  (voir [3.page 302] pour une définition)

Soient  $t, \gamma, \text{ et } \varepsilon$  des nombres réels strictement positifs fixés. Les trajectoires du processus de mouvement brownien sont telles qu'il existe un nombre réel  $\alpha > 0$  tel que :

$$\exp[\gamma t |\inf_{0 \leq u \leq t} V_1|] W_0\{\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u| > \alpha\} < \varepsilon/2 \quad (3.3)$$

et telles que pour tout  $p \in [1, \infty]$  il existe une constante  $c(p) > 0$  pour laquelle l'on ait pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$E_x\{|f(X_s)|\} \leq c(p) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} s^{-n/2p},$$

pour tout réel  $s > 0$ , et pour toute fonction mesurable  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Si maintenant nous fixons  $p > \max\{1, n/2\}$ , et si nous utilisons l'hypothèse (3.2) avec  $\beta = t\gamma p$ , nous obtenons l'existence d'un nombre  $a > 0$  tel que :

$$|x| > a^{-\alpha} \Rightarrow (1-n/2p)c(p) \left( \int_{S_{\alpha}(x)} \exp[-t\gamma p V_1(y)] dy \right)^{1/p} t^{-n/2p} < \varepsilon/2 \quad (3.4)$$

Par conséquent, si  $x \in \mathbb{R}^n$  est tel que  $|x| \leq a^{-\alpha}$ , (3.3) implique :

$$E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s) ds ; |X_t| > a\} \leq \varepsilon/2,$$

et s'il est tel que  $|x| > a^{-\alpha}$ , nous avons :

$$E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s) ds ; |X_t| > a\} \leq (i) + (ii)$$

où :

$$\begin{aligned} (i) &\equiv E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s) ds] ; \sup_{0 \leq u \leq t} |x - X_u| > \alpha\} \\ &\leq \exp[\gamma t |\inf_{0 \leq u \leq t} V_1|] W_0\{\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u| > \alpha\} \\ &< \varepsilon/2 \end{aligned}$$

toujours à cause de (3.3), et :

$$\begin{aligned} (ii) &\equiv E_x\{\exp[-\gamma \int_0^t V_1(X_s) ds] ; \sup_{0 \leq u \leq t} |x - X_u| \leq \alpha\} \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t E_x\{\exp[-t\gamma V_1(X_s)] ; \sup_{0 \leq u \leq t} |x - X_u| \leq \alpha\} ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t E_x\{\exp[-t\gamma V_1(X_s)] ; X_s \in S_{\alpha}(x)\} ds \\ &\leq (1-n/2p) c(p) \left( \int_{S_{\alpha}(x)} \exp[-t\gamma p V_1(y)] dy \right)^{1/p} t^{-n/2p} \\ &< \varepsilon/2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Jensen et la relation (3.4) ■

En réunissant les contenus du lemme et de la proposition ci-dessus nous obtenons la généralisation cherchée de [1.Theorem 2.2] :

**Théorème:**

*Soit  $V = V_1 - V_2$  un potentiel de classe  $\mathcal{V}$  tel que la relation (3.2) soit satisfaite pour un (et donc pour tout) réel  $\alpha > 0$ , et pour tout réel  $\beta > 0$ . Alors, pour tout  $q \in [1, \infty]$ , et pour tout  $t > 0$ ,  $T_t$  est un opérateur compact sur  $L^q(\mathbb{R}^n)$ .*

**Remarque:**

Il est important de noter que notre hypothèse (3.2) n'est pas plus faible, mais équivalente à l'hypothèse faite en [1] sur la fonction  $V_1$ . Nous parlons de généralisation uniquement parce que, d'une part la classe  $\mathcal{V}$  est plus large que la classe étudiée en [1], et d'autre part la propriété de compacité est prouvée pour le semi groupe engendré par l'opérateur de Schrödinger sur tous les espaces  $L^q(\mathbb{R}^n)$  et non pas seulement sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**REFERENCES**

- [1] V.BENCI and D.FORTUNATO: On a Discreteness Condition of the Spectrum of Schrödinger Operators with Unbounded Potential from Below. Proc. Amer. Math. Soc. 70 (1978) 163-166
- [2] R.CARMONA: Regularity Properties of Schrödinger and Dirichlet Semigroups. J. Functional Analysis (à paraître)
- [3] M.REED and B.SIMON: Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators. Academic Press (1978)

René CARMONA

Département de Mathématiques  
 Université de Saint-Etienne  
 23 rue du Docteur P.Michelon  
 42100 SAINT-ETIENNE