

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHOTIUS NANOPOULOS

Mesures de probabilité sur les entiers et ensembles progressions

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 533-547

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__533_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES DE PROBABILITE SUR LES ENTIERS ET ENSEMBLES PROGRESSIONS

par Photius NANOPOULOS

INTRODUCTION : Notons \mathbb{N}^* l'ensemble des nombres entiers strictement positifs, et \mathcal{C} la classe des sous ensembles de \mathbb{N}^* qui sont de la forme $a\mathbb{N}^* = \{an \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles $a\mathbb{N}^*$ seront appelés "ensembles progression". Contrairement à l'usage établi, nous appellerons "mesure" sur une algèbre ou une tribu de parties de \mathbb{N}^* , toute application additive μ , à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, vérifiant $\mu(\mathbb{N}^*)=1$. Nous supposerons que toutes les mesures considérées sont définies sur l'algèbre \mathcal{G} engendrée par les ensembles progression.

A toute mesure μ on associe une fonction $h: \mathbb{N}^* \rightarrow [0,1]$, définie par

$$(1) \quad h(a) = \mu(a\mathbb{N}^*) \text{ pour tout } a \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction h sera appelée "fonction-progression de μ ".

Le but de cet exposé est de caractériser toutes les applications $h: \mathbb{N}^* \rightarrow [0,1]$ qui sont fonction-progression d'une mesure. Ceci sera fait d'abord dans le cas général, puis dans le cas (plus intéressant à cause de l'unicité du prolongement) où μ est σ -additive. On en déduira alors deux représentations des mesures σ -additives définies sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, possédant la propriété d'indépendance c'est-à-dire, des mesures σ -additives μ , vérifiant,

$$(2) \quad \mu(a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*) = \mu(a\mathbb{N}^*) \cdot \mu(b\mathbb{N}^*)$$

pour tout couple (a,b) d'entiers premiers entre eux.

Ces mesures sont importantes dans l'étude probabiliste des fonctions arithmétiques additives. En effet on sait que les fonctions $(\beta_p; p \text{ premier})$, où $\beta_p(m)$ est le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que p^k divise m , sont stochastiquement indépendantes par rapport à une mesure μ , si et seulement si μ possède la propriété d'indépendance.

NOTATIONS: Dans tout ce qui suit \mathbb{P} désignera l'ensemble de nombres premiers privé de 1; la lettre p désignera exclusivement un élément de \mathbb{P} . Ainsi \sum_p , \prod_p , \bigcap_p , etc sont des opérations sur \mathbb{P} .

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire Associé au C.N.R.S. ,

7, rue René Descartes, 67084 STRASBOURG-CEDEX .

Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ on désigne par avb , (resp. $a \wedge b$) le plus petit commun multiple (resp. le plus grand commun diviseur) de a et b . L'expression " a divise b " (resp. " a ne divise pas b "), sera notée $a|b$ (resp. $a \nmid b$).

Une application $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dite multiplicative si pour tout couple (a, b) d'entiers premiers entre eux on a : $f(ab) = f(a)f(b)$, et si $f(1) = 1$. Ainsi la fonction identiquement nulle n'est pas multiplicative.

§ ENSEMBLES ET FONCTIONS PROGRESSION

Pour tout couple d'entiers (a, b) on a la relation

$$(1.1) \quad a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^* = (avb)\mathbb{N}^*$$

ce qui montre que la classe \mathcal{C} des ensembles progression est stable pour l'intersection finie; par conséquent la connaissance des valeurs qu'une mesure prends sur \mathcal{C} détermine la mesure sur l'algèbre π engendrée par \mathcal{C} .

D'autre part d'après le théorème de décomposition en facteurs premiers on a,

$$(1.2) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad n = \prod_p p^{\beta_p(n)}.$$

La relation (1.2) exprimée sous forme ensembliste s'écrit,

$$(1.3) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \{n\} = \bigcap_p (p^{\beta_p(n)}\mathbb{N}^* - p^{\beta_p(n)+1}\mathbb{N}^*)$$

Par conséquent la tribu engendrée par \mathcal{C} est égale à $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et de ceci on déduit la proposition suivante,

PROPOSITION 1.1.- Si deux mesures ont même fonction-progression elles sont égales sur \mathcal{C} ; si de plus elles sont toutes deux σ -additives, alors elles sont égales sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

On constate donc que la fonction-progression d'une mesure σ -additive μ , détermine μ sur toutes les parties de \mathbb{N}^* . Ceci n'est pas le cas si μ n'est pas σ -additive.

Nous donnons quatre exemples de mesures sur \mathbb{N}^* choisis à cause du rôle qu'ils jouent en théorie probabiliste de nombres.

EXEMPLE 1 Lois uniformes

Pour tout entier k notons ϵ_k la mesure de Dirac au point k , et pour $n \geq 1$ posons,

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k$$

C'est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et sa fonction-progression h_n est donnée par

$$h_n(a) = \frac{1}{n} [n/a] \quad , \quad a \in \mathbb{N}^* ,$$

où pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x .

EXEMPLE 2 Lois ζ_s

Pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, on pose: $\zeta_s = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \geq 1} n^{-s} \epsilon_n$,

où $\zeta(s)$ est la fonction de Riemann . La fonction progression de ζ_s est

$$h_s(a) = a^{-s} \quad a \in \mathbb{N}^* .$$

EXEMPLE 3 Lois Géométriques

Considérons la suite $(p_n, n \geq 1)$ de tous les nombres premiers ordonnés selon leur ordre naturel, et pour tout $n \geq 1$ notons N_n l'ensemble de tous les entiers m qui sont de la forme

$$m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \quad , \quad \text{avec } k_i \geq 0, \text{ pour } i=1, \dots, n.$$

On définit alors une mesure τ_n sur \mathbb{N}^* en posant :

$$\tau_n\{m\} = \begin{cases} \frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) & \text{si } m \in N_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction-progression de τ_n est

$$h_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } a \in N_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE 4 Mesures invariantes par translation.

Une mesure τ , sur \mathbb{N}^* , est invariante par translation si pour tout $A \subset \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\tau(A+k) = \tau(A)$$

Si τ est une mesure invariante par translation alors de la relation

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=0}^{a-1} (a\mathbb{N}^* - k)$$

on déduit que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\tau(a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a}$, ce qui veut dire que la fonction-progression de τ est

$$h(a) = a^{-1} \quad a \in \mathbb{N}^*$$

On constate que toutes les mesures invariantes par translation ont même fonction-progression, ce qui veut dire que l'algèbre \mathcal{G} est contenue (strictement) dans la classe des sous ensembles "naturellement mesurables" de \mathbb{N}^* (c.f. L.DUBINS et D.MARGOLIES [3])

En fait on peut montrer en utilisant le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques que tout ensemble de la forme $a\mathbb{N}^* + b$, avec $a \geq 3$ et $a \wedge b = 1$ n'appartient pas à \mathcal{G} , et par conséquent \mathcal{G} est strictement contenue dans l'algèbre \mathcal{P} de sous ensembles périodiques de \mathbb{N}^* .

§ 2. PLONGEMENT DE \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^∞ .

Le théorème de factorisation de l'arithmétique (formule (1.2)) permet d'associer à tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ la suite

$$\psi(n) = (\beta_{p_1}(n), \beta_{p_2}(n), \dots)$$

où p_1, p_2, \dots est la suite des nombres premiers ordonnés par leur ordre naturel.

On définit ainsi une application $\psi: \mathbb{N}^* \rightarrow S$, où S est l'ensemble de suites à éléments dans \mathbb{N} , n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Munissons \mathbb{N}^* de la relation d'ordre (\geq) induite par la relation de divisibilité (i.e. $m \geq n$ si m divise n), et l'espace produit \mathbb{N}^∞ de la relation d'ordre induite par les relations ordinaires sur les coordonnées (i.e. pour $x, y \in \mathbb{N}^\infty$, $x \leq y$, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, x_k est inférieur ou égal à y_k).

Alors $\psi: (\mathbb{N}^*, \geq) \rightarrow (S, \geq)$ est une application bijective croissante et l'image par ψ d'un ensemble-progression $a\mathbb{N}^*$ est le cône $C_\psi(a)$ de S où,

$$C_x = \{y \in S \mid x \leq y\}.$$

Il en résulte que l'algèbre \mathcal{G} sur \mathbb{N}^* engendrée par les ensembles progression peut être identifiée à l'algèbre sur S engendrée par les cônes, que nous noterons \mathcal{F} .

Considérons une mesure ν sur \mathbb{N}^* et posons $\mu = \nu \circ \psi^{-1}$. Si h est la fonction-progression de ν alors la relation $\psi(a\mathbb{N}^*) = C_\psi(a)$ entraîne

$$(2.1) \quad \mu(C_x) = h(\psi^{-1}(x)) \quad x \in S.$$

Pour $x \in S$ posons $H(x) = \mu(C_x)$ et remarquons que la fonction H détermine parfaitement la fonction-progression h .

Comme S est un sous ensemble du produit infini $S' = \mathbb{N}^\infty$ et μ une mesure sur S' on peut considérer les marges de dimension finie de μ . On constate que les sous espaces de dimension finie de S sont déterminés pour les sous ensembles finis de \mathbb{P} . Ainsi par exemple le sous espace $\mathbb{N}^n = \{x \in S \mid \forall k > n, x_k = 0\}$ est l'image par ψ de l'ensemble \mathbb{N}_n de l'exemple 3 du § 1.

Le système $\{\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}, n \geq 1\}$, où π_n est la projection de $S \rightarrow \mathbb{N}^n$ est le système de marges de dimension finie de μ . Pour tout $n \geq 1$, μ_n est une mesure définie sur l'algèbre G_n sur \mathbb{N}^n , engendrée par les cônes de \mathbb{N}^n , et comme $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$, (où $\mathcal{F}_n = \pi_n^{-1}(G_n)$), on a :

$$(2.2) \quad \mu(\pi_n^{-1}(A)) = \mu_n(A), \quad \text{pour tout } A \in G_n.$$

Il est bien connu que si les $(\mu_n, n \geq 1)$ sont des mesures sur (\mathbb{N}^n, G_n) qui forment un système consistant alors la relation (2.2) détermine d'une manière unique une mesure μ sur (S, \mathcal{F}) dont le système de marges est $(\mu_n, n \geq 1)$.

En général μ n'est pas σ -additive, même si pour tout $n \geq 1$ μ_n l'est. Comme cas typique nous donnons les lois "géométriques" $(\tau_n, n \geq 1)$ définies dans l'exemple 3 du § 1. Il est facile de voir que toute mesure τ invariante par translation (exemple 4, §1) admet $(\tau_n, n \geq 1)$ comme système de marges; or bien que pour tout n , τ_n est σ additive, τ ne l'est pas. Cependant dans le cas où toutes les μ_n sont σ -additives il existe une mesure σ -additive μ' sur (S, \mathcal{F}) , (où \mathcal{F}, π_n' , etc. sont définis sur S' exactement comme \mathcal{F}, π_n , etc sur S), déterminée d'une manière unique par la relation.

$$(2.3) \quad \mu'(\pi_n'^{-1}(A)) = \mu_n(A) \quad \text{pour } A \in G_n.$$

On verra au § 3 que $S \in \sigma(\mathcal{F}')$ et que μ est σ -additive sur (S, \mathcal{F}) si et seulement si $\mu'(S) = 1$.

§ 3 CARACTERISATION DES FONCTIONS-PROGRESSIONS

Il est évident que si h est la fonction progression d'une mesure μ alors

- (i) $h(1) = \mu(\mathbb{N}^*) = 1$
- (ii) si $a \mid b$ alors $b\mathbb{N}^* \subset a\mathbb{N}^*$ et par conséquent $h(a) \geq h(b)$.

Plus généralement si a divise chacun des entiers b_1, \dots, b_n alors

$$\bigcup_{i=1}^n (b_i \mathbb{N}^*) \subset a \mathbb{N}^*$$

ce qui implique

$$h(a) \geq h[b_1, \dots, b_n]$$

où,

$$h[b_1, \dots, b_n] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq n} h(b_{i_1} v \dots v b_{i_{k-1}}).$$

(iii) En particulier pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et tout vecteur (k_1, \dots, k_n) à coordonnées dans \mathbb{N} on a :

$$h(a) \geq h[a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}]$$

Si de plus on suppose que μ est σ -additive alors on a :

(iv) Pour tout $p \in \mathbb{P}$, $h(p^k)$ décroît vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$.

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} h[p_{n+1}, \dots, p_{n+m}] = 0$

La relation (v) tient au fait que

$$h[p_{n+1}, \dots, p_{n+m}] = \mu \left(\bigcup_{i=1}^m p_{n+i} \mathbb{N}^* \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{i \geq n} p_i \mathbb{N}^* \right).$$

Ces considérations mènent au premier théorème sur la caractérisation des applications $h: \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1]$ qui sont fonctions-progression d'une mesure.

THEOREME 3.1. Soit h une application de \mathbb{N}^* dans $[0, 1]$.

1) h est fonction-progression d'une mesure (simplement additive) si et seulement si elle satisfait aux conditions (c_1) et (c_2) ci-dessous :

$$(c_1) \quad h(1) = 1$$

(c_2) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout vecteur $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$h(a) \geq h[a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}]$$

2) h est fonction-progression d'une mesure σ -additive si et seulement si elle satisfait à (c_1) et (c_2) ci-dessus ainsi qu'aux deux conditions supplémentaires (c_3) et (c_4) ci-dessous.

$$(c_3) \quad \forall p \in \mathbb{P}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h(p^k) = 0$$

$$(c_4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} h[p_{n+1}, \dots, p_{n+m}] = 0.$$

Preuve. La nécessité des conditions a été démontrée dans les deux cas et ainsi il reste à démontrer qu'elles sont suffisantes. En reprenant la discussion du paragraphe 2, nous introduisons la fonction $H: S \rightarrow [0,1]$ définie par

$$H(x) = h(\psi^{-1}(x)).$$

Les conditions (c_i) , $i=1,2,3,4$, sur h , peuvent être traduites en des conditions équivalentes (D_i) , $i=1,2,3,4$, sur H , de la façon suivante :

$$(D_1) \quad H(0)=1.$$

$$(D_2) \quad \text{pour tout } x \in S, \text{ tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ et tout vecteur}$$

$$(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \text{ on a:}$$

$$H(x) \geq H[x^1, \dots, x^n]$$

où, x^i est défini par,

$$x_j^i = \begin{cases} x_j & \text{si } j \neq i \\ x_{i+k_i} & \text{si } j=i \end{cases},$$

et

$$H[x^1, \dots, x^n] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} H(x^{i_1} \vee \dots \vee x^{i_k}).$$

$$(D_3) \quad \forall i \geq 1 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H(k \cdot u^i) = 0$$

$$(D_4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} H[u^{n+1}, \dots, u^{n+m}] = 0$$

où $u^i = \psi(p_i)$ est l'élément de S ayant toutes ces coordonnées nulles sauf la i -ème qui est égale à 1.

Preuve de 1). Sur \mathbb{N}^n définissons la fonction

$$(1) \quad H_n(x_1, \dots, x_n) = H(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

On déduit des conditions (D_1) et (D_2) que pour tout $n \geq 1$ la fonction H_n vérifie

$$(i) \quad H_n \text{ est décroissante et } H_n(0, \dots, 0) = 1.$$

$$(ii) \quad \text{Pour tout rectangle } \{ [k_i, k_i + m_i], i=1, \dots, n \} \text{ de } \mathbb{N}^n$$

$$\sum_{\pm} H_n(k_1 + \theta_1 m_1, \dots, k_n + \theta_n m_n) \geq 0$$

où la sommation est effectuée sur les 2^n vecteurs $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \{0,1\}^n$ et le signe (\pm) est $+$ ou $-$ selon que le nombre de coordonnées nulles de $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est pair ou impair.

Comme des problèmes de continuité ne se posent pas on déduit des résultats classiques sur les fonctions de répartition (c.f. [1] p.226) que H_n est fonction de répartition d'une mesure μ_n sur $(\mathbb{N}_n^n, \mathcal{G}_n)$; c'est-à-dire que

$$(2) \forall x \in \mathbb{N}^n, H_n(x) = \mu_n \{y \in \mathbb{N}^n \mid x \leq y\}.$$

D'autre part, on déduit de la définition de H_n , que le système de mesures $(\mu_n, n \geq 1)$ est consistant; par conséquent il existe une mesure unique (simplement additive) sur (S, \mathcal{F}) vérifiant :

$$(3) \mu(\pi_n^{-1}(A)) = \mu_n(A), A \in \mathcal{G}_n.$$

Posons $\nu = \mu \circ \psi$, mesure sur \mathbb{N}^* , et montrons que la fonction progression de ν coïncide avec h .

Pour $a \in \mathbb{N}^*$, choisissons n tel que, pour tout $k \geq n, p_k$ ne divise pas a . Alors on a

$$(4) \nu(\psi(a)) = \mu_n^{-1}(\mu_n(\psi(a)))$$

et par conséquent

$$\nu(a \mathbb{N}^*) = \mu(\psi(a \mathbb{N}^*)) = \mu(\psi(a)).$$

De (3) et (4) on déduit que

$$\nu(a \mathbb{N}^*) = \mu_n(\mu_n^{-1}(\mu_n(\psi(a)))) = H_n(\pi_n(\psi(a))) = H(\psi(a)) = h(a).$$

Preuve de 2) Tout d'abord remarquons que (D_3) implique que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(iii) \forall k=1, \dots, n \quad \lim_{x_k \rightarrow \infty} H_n(x) = 0.$$

Les conditions (i) (ii) et (iii) impliquent que la mesure μ_n dans (2) est σ -additive sur $(\mathbb{N}_n^n, \mathcal{G}_n)$. On a donc un système consistant (μ_n) de marges σ -additives, mais ceci ne suffit pas pour assurer la σ -additivité de μ sur (S, \mathcal{F}) . Toutefois le théorème de Kolmogorov (c.f. [1] p.228) implique l'existence d'une mesure σ -additive μ' (et une seule), sur (S', \mathcal{F}') vérifiant :

$$(4) \mu'(\pi_n^{-1}(A)) = \mu_n(A), \text{ pour } A \in \mathcal{G}_n.$$

Montrons maintenant que (D_4) implique que μ est σ -additive. Pour cela, pour tout $m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$S'_{n,m} = \{x \in S' \mid x_{n+1} = \dots = x_{n+m} = 0\}$$

et

$$S_{n,m} = S \cap S'_{n,m}$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$ fixé, les suites d'ensembles $(S'_{n,m}; m \geq 1)$ et $(S_{n,m}; m \geq 1)$ décroissent vers le même ensemble S_n , où

$$S_n = \{x \in S \mid \forall k \geq n+1, x_k = 0\}$$

et la suite $(S_n; n \geq 1)$ croît vers S .

De (3) et (4) on déduit que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\mu(S'_{n,m}) = \mu'(S'_{n,m})$$

et comme μ' est σ -additive

$$\mu'(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(S'_{n,m}).$$

Or $\mu(S_{n,m}) = 1 - H[u^{n+1}, \dots, u^{n+m}]$ et ainsi de (D_4) on déduit que $\mu(S) = 1$.

Il en résulte que μ est la restriction de μ' sur S et comme μ' est σ -additive μ l'est aussi. Comme dans 1) on déduit que la mesure $\nu = \mu \circ \psi$ sur \mathbb{N}^* est σ -additive et sa fonction-progression coïncide avec h . \square

§ 4) LA PROPRIÉTÉ D'INDEPENDANCE

L'étude du comportement asymptotique des fonctions arithmétiques additives par rapport aux lois uniformes $(\psi_n; n \geq 1)$ (c.f. [2], [4]) est basée sur le fait que les fonctions $(\beta_p; p \in \mathbb{P})$ sont ν_n -asymptotiquement indépendantes. L'étude analogue par rapport aux lois $(\zeta_s; s > 1)$ (c.f. [5], [6], [7]) donne des résultats plus élégants grâce au fait que les fonctions $(\beta_p; p \in \mathbb{P})$ sont ζ_s -indépendantes pour tout $s > 1$.

Par ailleurs les fonctions β_p sont indépendantes en tant que v.a. pour d'autres familles intéressantes comme les lois géométriques et les mesures invariantes par translation.

DEFINITION 4.1. Une mesure P sur \mathbb{N}^* possède la "propriété d'indépendance" si les fonctions $(\beta_p; p \in \mathbb{P})$ sont P -indépendantes.

On désignera par \mathcal{P}_a (resp. \mathcal{P}_σ) l'ensemble de mesures de probabilité simplement additives (resp. σ -additives) possédant la propriété d'indépendance.

Si on connaît la fonction-progression h de P , alors il est facile de voir si $P \in \mathcal{P}_a$ grâce au théorème suivant :

THEOREME 4.1 Une mesure P est dans \mathcal{P}_a si et seulement si sa fonction-progression h est multiplicative.

Preuve : Immédiate d'après la relation

$$a N^* = \bigcap_{p|a} p^{\beta_P(a)} N^* .$$

Remarque : Posons nous la question de savoir quelles applications $h : N^* \rightarrow [0,1]$ sont fonction-progression d'une mesure $P \in \mathcal{P}_a$. En combinant les théorèmes 3.1 et 4.1 on constate qu'il faut et il suffit que h satisfait aux conditions (c_1) et (c_2) et qu'elle soit multiplicative. Toutefois la multiplicativité de h implique que les conditions (c_1) et (c_2) ne sont plus indépendantes.

THEOREME 4.2. Une application $h : N^* \rightarrow [0,1]$ est la fonction-progression d'une mesure $P \in \mathcal{P}_a$, si et seulement si elle vérifie

(c'_1) h est multiplicative

(c'_2) pour tout $p \in \mathbb{P}$, la suite $(h(p^k); k \geq 1)$ est décroissante.

Preuve : Il est évident que les conditions (c'_1) et (c'_2) sont nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes il suffit de montrer qu'il existe une mesure P admettant pour fonction-progression h , car d'après le théorème 4.1, et (c'_1) , on est assuré que $P \in \mathcal{P}_a$. Montrons donc que les conditions (c_1) et (c_2) du théorème 3.1. sont vérifiées. Puisque h est multiplicative, $h(1) = 1$, d'où (c_1) . Pour montrer (c_2) on utilisera l'identité.

$$(1) \quad (x_1 - y_1) \dots (x_n - y_n) = x_1 \dots x_n - \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \sum_m' y_{i_1} \dots y_{i_m} x_{j_1} \dots x_{j_{n-m}}$$

où le symbole \sum_m' indique la sommation sur tous les sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_m\}$ de $\{1, \dots, n\}$ ayants m éléments et $\{j_1, \dots, j_{n-m}\} = \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_m\}$.

Soit $a = p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}$ un entier et (k_1, \dots, k_n) un élément de N^n . Avec les notations du théorème 3.1., la différence

$$D = h(a) - h[a p_1^{k_1}, \dots, p_n^{k_n}]$$

s'écrit ;

$$D = h(a) - \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \sum_m' h(a p_{i_1}^{k_{i_1}} \dots p_{i_m}^{k_{i_m}})$$

et puisque h est multiplicative on a,

$$D = \prod_{i=1}^n h(p_i^{l_i}) - \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \sum_m' h(p_{i_1}^{l_{i_1}+k_{i_1}}) \dots h(p_{i_m}^{l_{i_m}+k_{i_m}}) h(p_{j_1}^{l_{j_1}}) \dots h(p_{j_{n-m}}^{l_{j_{n-m}}}).$$

L'identité (1) implique que

$$D = \prod_1^n (h(p_i^{-1}i) - h(p_i^{-1}i^{+k}i))$$

et d'après (c_2') on en déduit que $D \geq 0$, d'où (c_2) .

On peut maintenant en déduire facilement le résultat analogue pour les mesures σ -additives.

Théorème 4.3. Une application $h: \mathbb{N}^* \rightarrow [0,1]$ est la fonction-progression d'une mesure $\mu \in \mathcal{P}_\sigma$ si et seulement si elle vérifie,

(c_1') h est multiplicative,

(c_2') pour tout $p \in \mathbb{P}$ la suite $(h(p^k), k \geq 1)$ est décroissante,

(c_3') pour tout $p \in \mathbb{P}$ $\lim_{k \rightarrow \infty} h(p^k) = 0$,

(c_4') $\sum_p h(p) < \infty$.

Preuve : Nécessité: Les conditions (c_1') , (c_2') et (c_3') découlent directement des définitions tandis que (c_4') s'obtient en appliquant le lemme de Borel-Cantelli aux ensembles $(p \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$ qui vérifient, $\lim_p \sup(p \mathbb{N}) = \emptyset$.

Suffisance : D'après le théorème 4.2. on sait qu'il existe $\mu \in \mathcal{P}_a$ ayant h comme fonction-progression, et d'après le théorème 3.1. il suffit de montrer que (c_4) est vérifiée. Dans ce but on remarque que

$$h[p_{n+1}, \dots, p_{n+m}] = \mu(\bigcup_{i=1}^m p_{n+i} \mathbb{N}) \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} h(p_i)$$

et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h[p_{n+1}, \dots, p_{n+m}] \leq \sum_{i > n} h(p_i)$$

et ainsi (c_4) est une conséquence de (c_4') \square

§ 5. CONSTRUCTION DE MESURES VERIFIANT LA PROPRIETE D'INDEPENDANCE ;

LE THEOREME DE REPRESENTATION.

Les théorèmes 4.2. et 4.3. fournissent une première méthode de construction de mesures ayant la propriété d'indépendance, à l'aide de fonctions-progression, c'est-à-dire des mesures que l'on désire attribuer aux ensembles progressions. Cependant dans le cas de mesures σ -additives on peut donner une autre méthode en examinant les masses portuelles.

Soit $P \in \mathcal{P}_\sigma$ admettant pour fonction-progression h . La relation (1.3) implique que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a,

$$(5.1) \quad P\{n\} = \prod_p (h(p^{\beta_p(n)}) - h(p^{\beta_p(n)+1})) .$$

Supposons en un premier temps que

$$P\{1\} = \prod_p (1 - h(p)) > 0 .$$

Ceci est équivalent à dire que pour tout p , $h(p) > 1$.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\Delta_p(n) = h(p^{\beta_p(n)}) - h(p^{\beta_p(n)+1})$$

et associons à P la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$(5.2) \quad \varphi(n) = \prod_{p|n} \frac{\Delta_p(n)}{1 - h(p)}$$

Il est facile de vérifier que φ est une fonction multiplicative et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a,

$$(5.3) \quad P\{n\} = c \varphi(n)$$

où

$$c^{-1} = \sum_{n \geq 1} \varphi(n) .$$

Les deux fonctions multiplicatives h et φ se déterminent mutuellement par les relations (5.4) et (5.5) ci-dessous.

$$(5.4) \quad \varphi(p^k) = (h(p^k) - h(p^{k+1})) (1 - h(p))^{-1}$$

$$(5.5) \quad h(p^k) = \left(\sum_{i \geq k} \varphi(p^i) \right) \left(\sum_{i \geq 0} \varphi(p^i) \right)^{-1} ,$$

valables pour tout $p \in \mathbb{P}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Lemme 5.1. La relation (5.3) définit une application bijective entre les éléments $P \in \mathcal{P}_\sigma$ vérifiant $P\{1\} > 0$ et l'ensemble de fonctions multiplicatives φ positives et sommables.

Preuve Il est clair que la correspondance $P \rightarrow \varphi$ est injective. Pour montrer qu'elle est surjective considérons φ multiplicative, positive et sommable et définissons P par (5.3). Considérons également la fonction multiplicative h définie à l'aide de φ par (5.5). La fonction h vérifie

$$(i) \forall p \in \mathbb{P} \quad h(p) < 1.$$

$$(ii) \sum_p h(p) < \infty$$

Ainsi du Théorème 4.3., on déduit l'existence de $P' \in \mathcal{P}_a$ admettant h comme fonction-progression. De (i) et (ii) on déduit que

$$P'\{1\} = \prod_p (1-h(p)) > 0.$$

La fonction φ' associée à P' par (5.2) est égale à φ ce qui implique $P=P'$. \square

Pour éliminer la condition $P\{1\} > 0$, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2. Soit $P \in \mathcal{P}_\sigma$ et h sa fonction-progression.

Posons

$$e = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \mid P\{n\} > 0\}$$

alors on a :

$$1) \quad P((e\mathbb{N}^*)^c) = 0$$

$$2) \quad \forall p \in \mathbb{P}, \beta_p(e) = \inf \{k \geq 0 \mid h(p^k) > h(p^{k+1})\}$$

$$3) \quad \text{Pour tout } a \in \mathbb{N}^*, \text{ il vient, en posant } e_a = \prod_{p|a} p^{\beta_p(e)},$$

$$h(e_a) = h(e_a a).$$

Preuve : Pour $p \in \mathbb{P}$ posons

$$(i) \quad u_p = \inf \{k \geq 0 \mid h(p^k) > h(p^{k+1})\}.$$

Du théorème 4.3., on déduit qu'il existe un entier a , tel que, $\forall p \in \mathbb{P}, \beta_p(a) = u_p$. Montrons que $a = e$. De (5.1) et de (1) on obtient $P\{a\} > 0$, et par conséquent $e \leq a$. D'autre part (5.1) implique aussi que

$$\text{Pour tout } p, h(p^{\beta_p(e)}) > h(p^{\beta_p(e)+1})$$

et par conséquent pour tout p on a,

$$u_p \leq \beta_p(e)$$

ce qui entraîne $a \leq e$. Ceci prouve le point 2). Pour montrer 3) on remarque que

$$(ii) \quad h(p^{\beta_p(e)}) = 1 \quad \text{pour tout } p$$

et ainsi $\forall a \in \mathbb{N}, h(ea) = h(e_a a)$,

ce qui démontre 3).

En choisissant dans 3), $a = 1$ on obtient $h(e) = 1$, ce qui implique 1). \square

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème de représentation.

THEOREME 5.1. Une mesure σ -additive P a la propriété d'indépendance si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a,

$$(5.6) \quad P\{n\} = \begin{cases} c\varphi\left(\frac{n}{e}\right) & \text{si } e \mid n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où $e \in \mathbb{N}^*$ et φ est une fonction multiplicative positive et sommable de somme c^{-1} .

Preuve : Considérons $P \in \mathcal{P}_\sigma$ et posons $e = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \mid P\{n\} > 0\}$. On définit alors une mesure σ -additive P' en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(i) \quad P'\{n\} = P\{en\},$$

de sorte que les fonctions-progression h et h' de P et P' vérifient

$$(ii) \quad h'(a) = h(ea) \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{N}^*.$$

Si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors $e_{ab} = e_a e_b$ et ainsi

$$h'(ab) = h(eab) = h(e_a e_b) = h(e_a)h(e_b) = h'(a)h'(b).$$

Par conséquent h' est multiplicative et ainsi $P' \in \mathcal{P}_\sigma$. D'autre part $P'\{1\} = P\{e\} > 0$, et du lemme 5.1., on déduit l'existence d'une fonction multiplicative φ , positive et sommable telle que

$$(iii) \quad P'\{n\} = c\varphi(n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

De (i) et (iii) on déduit que P et φ vérifient (5.6).

Réciproquement si P et φ vérifient (5.6) alors la relation (iii) ci-dessus définit $P' \in \mathcal{P}_\sigma$ dont la fonction-progression h' est liée à la fonction-progression h de P par la relation

$$(iv) \quad h(a) = h'\left(\frac{eva}{e}\right) \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{N}^*.$$

De la définition de e_a on déduit que

$$\frac{eva}{e} = \frac{e_a va}{e_a}$$

et ainsi pour a et b premiers entre eux, on a,

$$\begin{aligned} h(ab) &= h'\left(\frac{e_{ab} v(ab)}{e_{ab}}\right) = h'\left(\frac{(e_a v a)(e_b v b)}{e_a e_b}\right) = \\ &= h'\left(\frac{e_a v a}{e_a}\right) h'\left(\frac{e_b v b}{e_b}\right) = h(a)h(b). \end{aligned}$$

Il en résulte que h est multiplicative, et ainsi $P \in \mathcal{P}_\sigma$. \square

Références :

- [1] BILLINGSLEY, Patrick (1968). Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.
- [2] BILLINGSLEY, Patrick (1974). Probabilistic methods in the theory of numbers.
Ann. Prob. 2 (5) 749-791.
- [3] DUBINS, Lester and MARGOLIES David (1978). Unpublished work on naturally integrable functions on amenable groups.
- [4] KUBILIUS, J. (1964). Probabilistic methods in the theory of numbers. Amer. Math. Soc. Translations 11. (Translation of the second Russian edition of 1962).
- [5] NANOPOULOS, Photius (1975). Lois de Dirichlet sur \mathbb{N}^* et pseudo-probabilités. C.R.A.S. Paris 280, 1543 - 1546 .
- [6] NANOPOULOS, Photius (1977). Lois zêta et fonctions arithmétiques additives. Loi faible de grands nombres. C.R.A.S. Paris 285, 875-877
- [7] NANOPOULOS, Photius (1978) lois zêta et fonctions arithmétiques additives. Convergence vers une loi normale (A paraître aux C.R.A.S.).