SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER
CHRISTOPHE STRICKER
MARC YOR

Sur une formule de la théorie du balayage

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 478-487
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__478_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR UNE FORMULE DE LA THEORIE DU BALAYAGE

par P.A. MEYER, C. STRICKER et M. YOR

Cette note complète à la fois l'exposé " sur la valeur absolue d'une semimartingale" du second auteur, et l'exposé " sur le balayage des semimartingales continues" du dernier , exposés auxquels on se référera ci-dessous sous le nom d'exposé I ou II. Les notations sont celles de l'exposé II. Rappelons les brièvement. $\mathbf{H}$ est un fermé aléatoire optionnel. On désigne par $\mathbf{H}^{\rightarrow}$ l'ensemble des extrémités gauches d'intervalles contigus à $\mathbf{H}$, par $\mathbf{H}^*$ l'ensemble des extrémités gauches <u>non isolées</u> de tels intervalles. On pose

$$D_t = \inf\{\, s>t \;:\; s\in\mathbf{H}\,\}$$
$$\tau_t = \sup\{\, s<t \;:\; s\in\mathbf{H}\,\}$$
$$\ell_t = \sup\{\, s\leqq t \;:\; s\in\mathbf{H}\,\}$$

On désigne par K un processus progressif borné, par k le processus (K_{τ_t}). Il n'y a pas de difficulté à vérifier que k est progressif, et nous désignons par $\varkappa$ sa projection prévisible ; si K est prévisible, k l'est aussi, donc $k=\varkappa$, et l'on montre dans l'exposé II que

$$(1)\qquad k_tY_t = k_0Y_0 + \int_0^t k_s dY_s \qquad \left(\begin{array}{l}Y \text{ est une semimartingale telle}\\ \text{que } Y_{D_t}=0 \text{ pour tout } t \text{ sur } \{D_t<\infty\}\end{array}\right.$$

En particulier, (k_tY_t) est une semimartingale. On montre dans l'exposé I un résultat moins explicite : kY est toujours une semimartingale pour K progressif borné. Notre but est d'écrire, dans ce cas, une formule aussi proche de (1) que possible, et de la commenter ensuite.

THEOREME 1. <u>Si</u> K <u>est progressif</u>, <u>on a la formule</u>

$$(2)\qquad k_tY_t = k_0Y_0 + \int_0^t \varkappa_s dY_s + \Sigma_{0<s\leqq t,\, s\in\mathbf{H}^*} (k_s-\varkappa_s)Y_s + \mathfrak{K}_t$$

<u>où</u> $\mathfrak{K}$ <u>est un processus à variation finie</u>, <u>adapté</u>, <u>continu</u>, <u>constant dans tout intervalle contigu à</u> $\mathbf{H}$. (On écrira $\mathfrak{K}^K$ au lieu de $\mathfrak{K}$ si nécessaire)

Nous ne savons pas expliciter $\mathfrak{K}$, et il y a certainement beaucoup à faire sur cette question, en analogie avec la théorie des excursions des processus de Markov hors d'un ensemble régénératif.

DEMONSTRATION. a) Nous vérifions d'abord que la somme qui figure du côté droit de (2) a un sens. Cela tient au fait que le processus $k-\varkappa$ est borné, et que l'on a $Y_{s-}=0$ en tout point de $\mathbf{H}^*$, de sorte que

$$\Sigma_{0<s\leqq t,\ s\in\mathbf{H}^*} |Y_s| \leqq \Sigma_{s\leqq t} \left(I_{\{Y_{s-}\leqq 0\}}Y_s^+ + I_{\{Y_{s-}\geqq 0\}}Y_s^-\right)$$

et le second membre est un processus croissant à valeurs finies, d'après la théorie du temps local (séminaire X, p. 365, formule (12.4)).

b) Il en résulte que le processus

$$Z_t = k_t Y_t - k_0 Y_0 - \int_0^t \varkappa_s dY_s - \Sigma_{0<s\leqq t,\ s\in H^*} (k_s - \varkappa_s) Y_s$$

est une semimartingale nulle en 0. Nous allons montrer que Z n'a pas de partie martingale continue, n'a pas de sauts, est constante sur les intervalles contigus à H, et cela établira le théorème 1.

i) Soit h rationnel. Sur l'ensemble (prévisible) $]h,D_h]$, le processus k garde la valeur constante K_{ℓ_h} , qui est $\underline{\underline{F}}_h$-mesurable. Donc $kI_{]h,D_h]}$ est prévisible, et il est égal à sa projection prévisible $\varkappa I_{]h,D_h]}$.

Autrement dit, $k=\varkappa$ sur l'ensemble prévisible $L=\cup_h\ ]h,D_h]$, qui contient H^c.

Sur $]h,D_h]$, la semimartingale Z est constante. Il en résulte que Z n'a pas de sauts sur L, et que $<Z^c,Z^c>$ ne charge pas L.

ii) Rappelons que, si X est une semimartingale, on a $I_{\{X_-=0\}}\cdot X^c=0$ (sém. X, p. 366, formule (12.5)). Il en résulte que $I_A\cdot X^c=0$ pour tout ensemble prévisible $A\subset\{X=0\}$, donc $I_A\cdot X$ est sans partie martingale continue.

Ici, L^c est contenu dans $\{Y=0\}$ et dans $\{kY=0\}$. Donc $I_{L^c}\cdot Y$ et $I_{L^c}\cdot(kY)$ sont sans partie martingale continue. Par différence, la même chose est vraie de $I_{L^c}\cdot Z$. Nous l'avons vue plus haut pour $I_L\cdot Z$, et finalement on obtient que $Z^c=0$.

iii) D'après i), Z n'a pas de saut sur L. Tout point de L^c est limite d'éléments de **H** du côté gauche, donc Y_- y est nul. S'il est aussi point limite de **H** du côté droit, Y y est nul, et Z n'a pas de saut. Reste donc à examiner ce qui se passe en un point $s\in H^*$. On a $Y_{s-}=0$, donc le saut de kY vaut $k_s Y_s$; le saut de l'intégrale stochastique vaut $\varkappa_s \Delta Y_s = \varkappa_s Y_s$, et compte tenu de la somme, on voit que $\Delta Z_s=0$. ▯

REMARQUES SUR LA FORMULE (2) : ECRITURES EQUIVALENTES

Nous allons faire une série de remarques sur la formule (2) : d'une part, en lui donnant différentes formes, qui se prêtent plus ou moins bien à un calcul, et d'autre part, en indiquant certains cas particuliers où l'on sait évaluer le processus $\mathfrak{K}$. Nous commençons par les remarques du premier type.

a) Dans la formule (2), on peut remplacer $\Sigma_{0<s\leqq t,\ s\in H^*} (k_s-\varkappa_s)Y_s$ par $\Sigma_{0<s\leqq t,\ s\in H^*} (k_s-\varkappa_s)\Delta Y_s$, ou même par $\Sigma_{0<s\leqq t} (k_s-\varkappa_s)\Delta Y_s$. En effet, le

passage de la première somme à la seconde se fait en remarquant que sur H^* on a $Y_{s-}=0$, donc $Y_s=\Delta Y_s$. Pour voir que les deux dernières sommes sont égales, on écrit que $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ est réunion de H^*, de L , et de $L^c\backslash H^*$. La troisième somme se décompose donc en trois termes. Le premier est égal à la seconde somme. Le second est nul, car nous avons vu dans la démonstration du théorème 1 que $k-\varkappa$ est nul sur L. Le dernier est nul, car les points de $L^c\backslash H^*$ sont les points de H qui ne sont isolés ni à droite, ni à gauche, et ΔY y est donc nul.

b) Rappelons quelques résultats de [1], relatifs à l'intégrale stochastique non compensée de processus optionnels. Soit X un processus optionnel (que nous supposons borné pour simplifier). Nous disons qu'un processus prévisible X' approche X (relativement à la semimartingale Y) si

1) l'ensemble $\{X\neq X'\}$ est mince (et nous ajoutons ici : X' est borné)
2) la somme $\sum_{s\leq t} |X_s-X'_s||\Delta Y_s|$ est p.s. finie pour t fini,

et nous posons alors

$$(3)\qquad (nc)\int_0^t X_s dY_s = \int_0^t X'_s dY_s + \Sigma_{0<s\leq t} (X_s-X'_s)\Delta Y_s \quad (\text{nc : non compensé})$$

Le côté droit ne dépend pas du choix du processus prévisible X' approchant X, ce qui justifie la notation. L'article [1] n'aborde pas le cas où X est progressif borné, mais l'extension est immédiate : X et sa projection optionnelle X^o ne diffèrent que sur un ensemble progressif ne contenant aucun graphe de temps d'arrêt ; on remplace la condition 1) par : $\{X^o\neq X'\}$ est mince , et on conserve la formule (3) - ce qui revient à dire que

$$(nc) \int_0^t X_s dY_s = (nc) \int_0^t X^o_s dY_s$$

Dans ces conditions, revenons à la formule (2) : l'ensemble $\{k\neq\varkappa\}$ est mince, et nous avons vu que la somme $\Sigma_{0<s\leq t}|k_s-\varkappa_s||\Delta Y_s|$ - qui peut en fait être restreinte à H^* - est p.s. finie pour t fini. Autrement dit, k est approchable par sa projection prévisible $\varkappa$, et l'on a

$$(4)\qquad k_t Y_t = k_0 Y_0 + (nc)\int_0^t k_s dY_s + R_t$$

c) Supposons que le processus k admette des limites à gauche (il en est ainsi si K lui même en admet) et montrons que le processus k_- approche k relativement à Y. Tout d'abord, si k admet des limites à gauche, il en est de même de $\varkappa$, et il est facile de vérifier que les processus k_- et $\varkappa_-$ sont indistinguables (vérifier que $\varkappa_-$ est projection prévisible de k_-, qui est prévisible). Donc $\{k^o\neq k_-\}\subset\{k^o\neq\varkappa\}\cup\{\varkappa\neq\varkappa_-\}$ est mince. D'autre part, on vérifie comme plus haut que

$$\sum_{s\leq t} |k_s-k_{s-}||\Delta Y_s| = \Sigma_{s\leq t,\ s\in H^*} |k_s-k_{s-}||Y_s| < \infty \text{ p.s. pour t fini}$$

La formule (2) ou (4) prend donc la forme

(5) $$k_tY_t = k_0Y_0 + \int_0^t k_{s-}dY_s + \Sigma_{0<s\leqq t,\ s\in H^*}(k_s-k_{s-})Y_s + \mathfrak{R}_t$$

d) Revenons au processus K de départ. Le cas le plus important en pratique est celui où K est progressif borné, <u>constant sur les intervalles</u> $[u,v[$ <u>contigus à</u> $\mathbf{H}$, ce qui revient à dire que $K_t=K_{\ell_t}$ pour tout t. D'ailleurs, si K est progressif borné quelconque, on ne modifie pas k en remplaçant le processus (K_t) par le processus (K_{ℓ_t})[1], constant sur les intervalles $[u,v[$ contigus à $\mathbf{H}$. On ne perd donc pas de généralité en faisant cette hypothèse.

Les processus K et k ne diffèrent alors qu'en des points t où $\ell_t \neq \tau_t$, et en ces points Y s'annule : les processus KY et kY sont donc égaux. De même, $k_0Y_0 = K_0Y_0$, et K=k aux points de $\mathbf{H}^*$.

Lorsque le processus K est <u>pourvu de limites à gauche</u>, il en est de même de k, et les processus K_- et k_- sont indistinguables. La formule (5) s'écrit alors sous une forme qui ne fait plus intervenir explicitement que K lui même :

(6) $$K_tY_t = K_0Y_0 + \int_0^t K_{s-}dY_s + \Sigma_{0<s\leqq t,\ s\in H^*}(K_s-K_{s-})Y_s + \mathfrak{R}_t \ .$$

REMARQUES SUR LA FORMULE (2) : CAS OU L'ON SAIT CALCULER $\mathfrak{R}$

a) Prenons d'abord une semi-martingale <u>continue</u> Y , et $\mathbf{H}=\{Y=0\}$, avec

(7) $$K_t = \liminf_{s\downarrow\downarrow t} (1_{\{Y_s>0\}} - 1_{\{Y_s\leqq 0\}})$$

Quelles sont les valeurs de K ?

- si $t\in \mathbf{H}^c$, K_t est le signe de l'excursion de Y en cours,
- aux points $t\in \mathbf{H}^{\rightarrow}$, K_t est le signe de l'excursion qui commence en t,
- aux points $t\in\mathbf{H}$ non isolés à droite, $K_t=-1 = \mathrm{sgn}(Y_t)$, avec la convention sgn(0)=-1 que l'on fait toujours en théorie du temps local.

Les processus K et k ne diffèrent qu'aux points de H isolés à gauche : en un tel point, k est le signe de l'excursion <u>finissante</u> . Le processus $K_tY_t = k_tY_t$ est égal à $|Y_t|$.

Introduisons d'autre part le processus prévisible

(8) $$\gamma_t=\mathrm{sgn}(Y_t) \ , \qquad \text{avec } \mathrm{sgn}(0)=-1$$

Où diffèrent k et γ ? uniquement en des extrémités d'intervalles contigus à $\mathbf{H}$, donc sur un ensemble à coupes dénombrables. L'ensemble $\{\dot{k}^o \neq \gamma\}$ est un ensemble optionnel, contenu dans la réunion de $\{k\neq k^o\}$ et de $\{k\neq\gamma\}$.

---

(1) Il n'est pas difficile de vérifier que ce processus est progressif.

Il est donc négligeable pour toute P-mesure associée à un processus croissant intégrable continu (adapté) A, et il en est de même de $\{\varkappa\neq\gamma\}$. Mais alors les i.s. $\gamma\cdot Y$ et $\varkappa\cdot Y$ sont égales, et la formule (2) s'écrit

$$|Y_t| = |Y_0| + \int_0^t \gamma_s dY_s + R_t$$

qui est identique à la formule de Tanaka : ainsi R est le temps local de Y en 0. On notera que cette identification dépend du choix particulier de K, correspondant bien à la convention sgn(0)=-1.

b) Voici un second cas où l'on sait calculer R :

THEOREME 2. <u>Si</u> K <u>est optionnel</u>, <u>on a</u> $R=0$.

DEMONSTRATION. Par un raisonnement de classes monotones, on se ramène au cas de générateurs de la tribu optionnelle, à choisir convenablement : nous prendrons $K=I_{[T,\infty[}$, où T est un temps d'arrêt, mais la démonstration utilisera simplement le fait que K est un processus croissant purement discontinu. Quitte à remplacer (K_t) par (K_{ℓ_t}), qui est encore continu à droite, croissant et purement discontinu - opération qui ne modifie pas R - nous pouvons supposer que K est constant sur les intervalles contigus à $\mathbf{H}$, et écrire la formule (6)

$$K_tY_t = K_0Y_0 + \int_0^t K_{s-}dY_s + \Sigma_{\substack{0<s\leq t\\ s\in \mathbf{H}^*}} Y_s\Delta K_s + R_t$$

et en fait on peut supprimer la restriction $s\in\mathbf{H}^*$ dans la somme , car $Y_s\Delta K_s$ est nul pour $s\notin\mathbf{H}^*$. Comparant cela à la formule d'intégration par parties

$$K_tY_t = K_0Y_0 + \int_0^t K_{s-}dY_s + \int_0^t Y_sdK_s$$

on voit que R est la partie continue du processus à variation finie $\int_0^t Y_sdK_s$. Mais K est purement discontinu, donc $R=0$.

Voici une conséquence de ce théorème. Décomposons (à la manière des travaux de Maisonneuve sur les ensembles régénératifs) l'ensemble $\mathbf{H}^*$ en deux ensembles progressifs : $\mathbf{H}^*_b$, qui est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, et qui est donc optionnel, et $\mathbf{H}^*_\pi$, qui ne rencontre aucun graphe de temps d'arrêt. L'ensemble $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est réunion de quatre ensembles E_i (i=1,2,3,4) :

$E_1 = L = \cup_{h\in\mathbf{Q}}]h,D_h]$

E_2 est l'ensemble des points de $\mathbf{H}$ qui ne sont isolés, ni à droite, ni à gauche

$E_3 = \mathbf{H}^*_b$, $E_4 = \mathbf{H}^*_\pi$

Tout processus progressif borné K peut donc se décomposer en une somme de quatre processus $\underbrace{K^i}_{=K1_{E_i}}$. Si i=1 ou 2, les processus $k^i_t=K^i_{\tau_t}$ sont nuls, et il en est de même des processus $\mathfrak{K}^i$ correspondants. Si i=3, le processus K^3 est optionnel, donc $\mathfrak{K}^3=0$ d'après le théorème 2. Finalement, on voit que $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}^4$.

b) Nous montrons maintenant une propriété de continuité absolue des mesures $d\mathfrak{K}_s$, qui nous servira un peu plus loin à obtenir une formule de représentation (peu explicite) de ces processus.

Nous commençons par remarquer qu'il existe un processus croissant intégrable U tel que, pour tout processus prévisible borné X, nul en 0

(9) $\quad (E[\int_0^\infty |X_s| dU_s] = 0) \Rightarrow (\int_0^\cdot X_s dY_s = 0)$

Nous désignons alors par V le <u>balayé</u> de U sur **H**.

THEOREME 3. <u>Toute mesure</u> $d\mathfrak{K}_s$ <u>est absolument continue par rapport à</u> dV_s.

DEMONSTRATION. Les processus $\mathfrak{K}$ et V étant prévisibles, il nous suffit de montrer : si (ε_s) est un processus prévisible borné tel que $\varepsilon\cdot V=0$, nul en 0[1], on a aussi $\varepsilon\cdot\mathfrak{K}=0$.

Nous avons $0 = E[\int_0^\infty |\varepsilon_s| dV_s] = E[\int_0^\infty |\varepsilon_{\tau_s}| dU_s]$, donc $\int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} dY_s = 0$ d'après (9). Comme ε est prévisible, on peut appliquer (1), et en déduire que le produit $\varepsilon_\tau Y$ est nul . Il en est de même alors du produit $\varepsilon_\tau K_\tau Y$. Appliquant à nouveau la formule (1), cette fois à la semimartingale $K_\tau Y= kY$, nous obtenons d'après la formule (2)

$$0 = \int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} d(kY)_s = \int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} \varkappa_s dY_s + \Sigma_{\ldots}\, \varepsilon_{\tau_s}(k_s-\varkappa_s)Y_s + \int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} d\mathfrak{K}_s$$

Or l'intégrale stochastique du côté droit peut être considérée comme l' i.s. de $\varkappa$ par rapport à $\int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} dY_s=0$. Elle est donc nulle. Le second terme est un processus à variation finie purement discontinu, le troisième un processus à variation finie continu : ils sont donc nuls tous deux, et finalement $\int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} d\mathfrak{K}_s = 0$. Comme $\mathfrak{K}$ est continu porté par **H**, on peut remplacer τ_s par s, et on a le résultat désiré.

REMARQUE. $\mathfrak{K}$ est en fait absolument continu par rapport à la partie continue de V.

La démonstration montre plus généralement que : si V est un processus croissant intégrable nul en 0, prévisible, tel que pour tout processus prévisible borné ε, nul en 0

$$(E[\int_0^\infty |\varepsilon_s| dV_s]=0) \Rightarrow (\int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} dY_s \; (= \varepsilon_\tau Y) = 0)$$

alors tout $\mathfrak{K}$ est absolument continu par rapport à V, et même par rapport à la partie continue de $I_H\cdot V$. En voici deux exemples :

1) Si Y est une <u>martingale locale continue</u> de temps local L, on montre

---

1. On peut supposer cela, car $\mathfrak{K}_0=0$.

dans l'exposé II, proposition 4 et corollaire 4.1, que la mesure dL est équivalente à la balayée de $\langle Y,Y\rangle$ sur $\mathbf{H}$. On peut donc prendre $V=L$.

2) Soit J un processus croissant intégrable non adapté, nul en 0, tel que la mesure dJ soit portée par $\mathbf{H}^{\rightarrow}$, et que tout ensemble J-négligeable contenu dans $\mathbf{H}^{\rightarrow}$ soit évanescent. Soit V la projection duale prévisible de J . Alors si ε est prévisible V-négligeable, ε est aussi J-négligeable, donc évanescent sur $\mathbf{H}^{\rightarrow}$, le processus ε_{τ} est nul hors de $\mathbf{H}$, et $\varepsilon_{\tau}Y=0$. Donc $\mathfrak{R}$ est absolument continu par rapport à la partie continue de $I_{\mathbf{H}}.V$. Il existe toujours de tels processus J, parce que $\mathbf{H}^{\rightarrow}$ est à coupes dénombrables.

APPLICATION. Nous pouvons écrire pour tout processus progressif borné K, en explicitant la dépendance de $\mathfrak{R}^K$ par rapport à K :

(10) $$\mathfrak{R}^K_s(\omega) = \int_0^t r_s(\omega,K)dV_s(\omega)$$

où $(r_s(.,K))_s$ est un processus prévisible. Nous allons chercher maintenant ce que l'on peut dire de la dépendance en K de ce processus : peut on interpréter r comme un noyau ? On y reviendra dans le théorème 5.

NORME DANS H^p DE LA SEMIMARTINGALE kY

Il est absolument clair sur la formule (1) que, si K est prévisible borné par 1 en valeur absolue, on a pour $1 \leq p < \infty$

$$\| kY \|_{H^p} \leq c_p \| Y \|_{H^p} \quad (1)$$

(si la norme de H^p est bien choisie, par exemple

$$\|Y\|_{H^p} = \sup \|(J\cdot Y)_t\|_{L^p} \text{ , où J est prévisible borné par 1, et } t\in\mathbb{R}_+$$

on a même $c_p=1$ pour tout p). A t'on le même résultat lorsque K est progressif ?

on peut évidemment supposer $Y\in H^p$;

Nous commençons par quelques remarques : dans la formule (2),

- Il n'y a aucun problème concernant $k_0Y_0 + \int_0^t \varkappa_s dY_s$, puisque k et $\varkappa$ sont bornés par 1 en valeur absolue.
- D'après la formule de Tanaka usuelle, nous avons

$$\| \Sigma_{s\leq t} I_{\{Y_{s-}<0\}}Y_s^+ + I_{\{Y_{s-}>0\}}Y_s^- + L_t\|_{L^p} \leq \| |Y_\infty| + |Y_0| + |\int_0^\infty sgn(Y_{s-})dY_s| \|_{L^p}$$

L désignant ici le temps local de Y en 0. On en déduit sans peine que

$$\| \Sigma_{0<s\leq t,\ s\in H^*} |k_s-\varkappa_s| |Y_s| \|_{L^p} \leq c_p\|Y\|_{H^p}$$

Le seul terme qui fait problème est donc $\mathfrak{R}_t$. Cependant, par différence nous obtenons aussitôt

(11) $$\|\mathfrak{R}_t\|_{L^p} \leq c_p\|Y\|_{H^p}$$

où c_p ne dépend pas de t. Dans ces conditions, nous pouvons montrer

1. La constante c_p varie de place en place.

THEOREME 4. <u>On a si</u> $|K| \leq 1$ <u>et</u> $1 \leq p < \infty$

$$(12) \qquad \| \int_0^\infty |dR_s| \|_{L^p} \leqq c_p \|Y\|_{H^p}$$

$$(13) \qquad \|kY\|_{H^p} \leqq c_p \|Y\|_{H^p}$$

DEMONSTRATION. Nous établirons seulement (12), car (13) s'en déduit immédiatement, compte tenu des remarques précédentes.

Soit ε un processus prévisible, borné par 1 en valeur absolue, tel que $\varepsilon_0=0$ et $\int_0^\cdot \varepsilon_s dR_s = \int_0^\cdot |dR_s|$. Comme R est continu porté par $\mathbf{H}$, nous avons aussi $\int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} dR_s = \int_0^\cdot |dR_s|$. D'après le raisonnement du théorème 3, si nous remplaçons K par εK (encore borné par 1), le processus $R^{\varepsilon K}$ correspondant est égal à $\int_0^\cdot \varepsilon_{\tau_s} dR_s$. La relation (11) appliquée à εK nous donne donc (12).

Nous revenons à (10). Nous ne savons pas montrer que $K \mapsto r_\cdot(.,K)$ est un noyau, mais un peu moins seulement :

THEOREME 5. <u>Supposons que</u> Y <u>appartienne à</u> H^1. <u>Alors l'application</u> $K \mapsto r_\cdot(.,K)$ <u>est une mesure vectorielle à valeurs dans</u> $L^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, d\mu)$, <u>où</u> $\mathcal{P}$ <u>désigne la tribu prévisible</u>, <u>et</u> μ <u>la</u> P-<u>mesure associée à</u> V.

DEMONSTRATION. Cette fonction est manifestement additive. Pour montrer qu'elle est complètement additive dans L^1 fort, il suffit de montrer (théorème de Pettis : [2], p. 318) qu'elle est complètement additive dans L^1 faible, ou encore, que si des K^n progressifs uniformément bornés convergent simplement vers 0, on a pour tout processus prévisible ε, borné par 1 en valeur absolue

$$\lim_{n\to\infty} E[\int_0^\infty r_s(.,K^n)\varepsilon_s dV_s] = \lim_{n\to\infty} E[\int_0^\infty \varepsilon_s dR_s^{K^n}] = 0$$

Or nous avons vu plus haut que cette dernière intégrale n'est autre que $E[R_\infty^{\varepsilon K^n}]$ (la possibilité de prendre $t=\infty$ résulte ici de la formule (12)). Quitte à remplacer K^n par εK^n, nous sommes donc ramenés au cas où $\varepsilon=1$. Mais alors nous écrivons la formule (2)

$$R_t^{K^n} = K_t^n Y_t - K_0^n Y_0 - \int_0^t \kappa_s^n dY_s - \Sigma_{\substack{s \leq t \\ s \in \mathbf{H}^*}} (k_s^n - \kappa_s^n) Y_s$$

qui tend vers 0 dans L^1, tandis que, d'après la formule (12)

$$E[|R_\infty^{K^n} - R_t^{K^n}|] \leqq c_1 \|Y - Y^t\|_{H^1}$$

qui est petit, uniformément en n, lorsque t est assez grand.

COROLLAIRE. <u>Si des</u> K^n <u>progressifs uniformément bornés tendent simplement vers</u> 0 , <u>on a</u> $\lim_n E[\int_0^\infty |dR_s^{K^n}|] = 0$ (en supposant toujours $Y \in H^1$).

Le cas où $Y \notin H^1$ ne donne pas lieu à un énoncé aussi simple, mais dans bien des cas on peut se ramener à H^1 par arrêt. De toute façon, il existe toujours une loi Q équivalente à P, pour laquelle Y appartient à H^1 sur tout intervalle fini : on aura donc un énoncé analogue à celui du corollaire, avec $\lim_n \int_0^t |d\mathfrak{K}_s^{K^n}| = 0$, en probabilité, pour tout t fini.

Nous achevons en traitant un cas où l'on sait établir que le processus $(k_t Y_t)$ est une semimartingale, alors que K n'est pas borné.

THEOREME 6 . Supposons que Y soit une martingale locale continue, et que l'on ait (avec les notations du théorème 1)

(14) $$\int_0^t k_s^2 d\langle Y,Y\rangle_s < \infty \quad \text{pour tout } t \text{ fini}$$

Alors $(k_t Y_t)$ est une semimartingale (continue).

DEMONSTRATION. Nous allons en dire un peu plus dans la démonstration, en déterminant la forme de cette semimartingale. On peut supposer que $K_0=0$, puis que K (et donc k) est positif, ce qui donne un sens à la projection prévisible κ de k . D'autre part, $\langle Y,Y\rangle$ ne charge pas $\{Y=0\}$, ce processus croissant est donc porté par L, et sur L on a $k=\kappa$. Donc l'intégrale stochastique $\kappa.Y$ existe d'après (14), et nous allons montrer que

(15) $$k_t Y_t = \int_0^t \kappa_s dY_s + \mathfrak{K}_t \quad , \text{ où } \mathfrak{K} \text{ est continu à variation finie, porté par } \mathbf{H} .$$

Par arrêt, on peut supposer que $\kappa.Y$ est bornée. Posons $K_t^n = K_t \wedge n$, et appliquons les résultats antérieurs à K^n et à Y^+ : nous avons, L étant le temps local de Y en 0 , $\bar{\mathfrak{K}}^n$ un processus continu à variation finie

$$k_t^n Y_t^+ = \int_0^t \kappa_s^n dY_s^+ + \bar{\mathfrak{K}}_t^n = \int_0^t \kappa_s^n \mathrm{sgn}(Y_s) dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \kappa_s^n dL_s + \bar{\mathfrak{K}}_t^n$$

Le côté gauche est une semi-martingale positive, continue , que nous notons Z^n ; sa décomposition canonique $Z^n = M^n + V^n$ figure du côté droit, et on voit que V^n est porté par l'ensemble $\{Z^n=0\}$. Autrement dit, Z^n appartient à la classe (Σ_+^0) de l'exposé de Yor, et on a alors, d'après l'appendice de cet exposé

$$V_t^n = \frac{1}{2}\int_0^t \kappa_s^n dL_s + \bar{\mathfrak{K}}_t^n = \sup_{0 \leqq s \leqq t} -\int_0^s \kappa_s^n \mathrm{sgn}(Y_s) dY_s$$

Lorsque $n \to \infty$, les martingales $(\kappa^n \mathrm{sgn}(Y)).Y$ convergent dans H^2 vers $M = (\kappa \mathrm{sgn}(Y)).Y$, et donc le côté gauche converge aussi (uniformément en probabilité) vers le processus croissant continu $\mathfrak{K}_t^+ = \sup_{0<s\leqq t} (-M_s)$. Il en résulte que

$$k_t Y_t^+ = \int_0^t \kappa_s \mathrm{sgn}(Y_s) dY_s^+ + \mathfrak{K}_t^+$$

ce qui prouve que $k_t Y_t^+$ est une semimartingale. On fait le même raisonnement avec $k_t Y_t^-$, et on obtient par différence la formule (15) (en utilisant le fait que $I_{\{Y_s=0\}}.Y = 0$ pour une martingale locale continue). Il reste seulement à voir que $\mathfrak{K}$ est porté par $\mathbf{H}$, ou encore, que $\mathfrak{K}$ ne charge pas les intervalles $]h, D_h]$, ce qui est facile.

REFERENCES

[1] M. Yor. : En cherchant une définition naturelle de l'intégrale stochastique optionnelle. Dans ce volume.

[2] N. Dunford et J.T. Schwartz : Linear operators, Part 1. Interscience, New York 1963.