Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Marc Yor

Sur le balayage des semi-martingales continues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 453-471
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__453_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR LE BALAYAGE DES SEMI-MARTINGALES CONTINUES

par Marc YOR

INTRODUCTION

Soit $\mathbf{H}$ un ensemble aléatoire optionnel fermé, qui reste fixé dans tout l'article ($\mathbf{H}$ sera presque toujours l'ensemble des zéros d'une semi-martingale continue X, qui restera fixée elle aussi : dans ce cas, $\mathbf{H}$ est prévisible). Pour tout $t \geq 0$, on note

$$\tau_t(\omega) = \sup\{ s<t \mid (s,\omega)\in\mathbf{H} \} , \quad D_t(\omega) = \inf\{ s>t \mid (s,\omega)\in\mathbf{H} \}$$

avec les conventions usuelles $\sup(\emptyset)=0$, $\inf(\emptyset)=+\infty$. Si A est un processus croissant intégrable, il existe, d'après la théorie générale des processus, un unique processus croissant intégrable prévisible B, nul en 0, tel que l'on ait pour tout processus prévisible borné Z, nul en 0 :

$$(1) \qquad E[\int_0^\infty Z_s dB_s] = E[\int_0^\infty Z_{\tau_s} dA_s]$$

On appelle B le (processus croissant) <u>balayé</u> de A (sous-entendu : relativement à $\mathbf{H}$), et on le note $A^{(b)}$. Lorsque $\mathbf{H}$ est prévisible, $A^{(b)}$ est porté par $\mathbf{H}$.

L'un des buts de l'article, poursuivi aux paragraphes 2 et 3, est de calculer, de façon aussi "explicite" que possible, les balayés de certains processus croissants qui interviennent dans la théorie des semi-martingales continues.

Toutefois, la motivation essentielle du travail est de donner une présentation unifiée, développée dans les paragraphes 1 et 2, des différents calculs de martingales qui apparaissent dans l'article d'Azéma [1], et deux articles d'Azéma et Yor ([2] et [3]). Indiquons succinctement que cette présentation repose sur le résultat suivant : si $(Y_t, t\geq 0)$ est une semi-martingale continue nulle sur $\mathbf{H}$, et Z est un processus prévisible borné, on a

$$(2) \qquad Y_t Z_{\tau_t} = Y_0 Z_0 + \int_0^t Z_{\tau_s} dY_s \quad .$$

Cette formule permet également de mieux comprendre une "pathologie" apparue dans le grossissement d'une filtration à l'aide d'une fin d'ensemble optionnel : le paragraphe 4 est consacré à ce sujet. La pathologie en question nous semble pouvoir se résumer à ceci : si Y est une martingale locale continue nulle sur $\mathbf{H}$, le processus $(Y_t Z_{\tau_t})$ est une martingale locale d'après la formule (2). Mais ceci n'est plus vrai lorsque l'on remplace l'hypothèse : Z <u>est prévisible</u> par l'hypothèse : Z <u>est progressivement mesurable</u> (cf. le paragraphe 4).

Enfin, en appendice, on caractérise une classe de semi-martingales positives particulièrement bien adaptées au procédé de balayage sur H présenté ici.

NOTATIONS. $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, P)$ est un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles.

$(X_t)_{t\geqq 0}$ désignera dans toute la suite une semi-martingale continue, qui restera fixée. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on note $H^a = \{t : X_t=a\}$, $\tau_t^a=\sup\{s<t \mid X_s=a\}$ et $\tau^a=\lim_{t\uparrow\infty} \tau_t^a$. Si a=0, on note simplement H, τ_t, τ à la place de H^0, τ_t^0, τ^0.

On utilisera encore les notation et résultat suivants, tirés de [9] : il existe une application mesurable $L : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\Omega \to \mathbb{R}_+$ (notée $(a,t,\omega)\mapsto L_t^a(\omega)$) telle que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, L^a soit le temps local de X en a (voir [12] pour des résultats de continuité bien meilleurs, qui ne seront pas utilisés ici).

La notation H a donc deux significations : celle d'un ensemble optionnel fermé comme dans l'introduction, et celle de l'ensemble $H^0=\{X=0\}$. Les quelques résultats relatifs à la première signification seront précédés de la mention "cas général" , tandis que les autres ne font l'objet d'aucune indication.

Les intégrales stochastiques notées $\int_0^t$ sont toujours étendues à l'intervalle $]0,t]$ ouvert en 0.

1. DES SEMI-MARTINGALES BIEN SIMPLES...

Z désigne toujours, dans ce paragraphe, un processus prévisible localement borné.

Nous commençons par établir en toute généralité la formule (2).

THEOREME 1 (Cas général). a) <u>Le processus</u> $Z_t'=Z_{\tau_t}$ <u>est prévisible et localement borné</u>.

b) <u>Soit</u> Y <u>une semi-martingale telle que</u> $Y_{D_t}=0$ <u>pour tout</u> t. <u>Alors on a</u>

$$Y_t Z_{\tau_t} = Y_0 Z_0 + \int_0^t Z_{\tau_s} dY_s . \tag{2}$$

<u>En particulier</u>, <u>le processus</u> YZ_τ <u>est une semi-martingale</u> (<u>continue si</u> Y <u>est continue</u>, <u>une martingale locale si</u> Y <u>en est une</u>).

c) $(YZ_\tau)^c = \int_0^\cdot Z_{\tau_s} dY_s^c$ <u>et</u> $<(YZ_\tau)^c,(YZ_\tau)^c> = \int_0^\cdot Z_{\tau_s}^2 d<Y^c,Y^c>_s$

d) <u>Si</u> Y <u>est une martingale locale continue</u>, <u>et</u> Λ <u>désigne le temps local</u>

de Y en 0, le temps local Λ' de $Y'=YZ_\tau$ en 0 est donné par

(3) $$\Lambda'_t = \int_0^t |Z_{\tau_s}| d\Lambda_s \qquad \text{(voir Remarque 2)}$$

Démonstration du théorème. a) Montrons que $Z'=Z_\tau$ est prévisible. Un argument de classe monotone permet de se ramener au cas où $Z=1_{[0,T]}$, avec T temps d'arrêt. On a alors : $Z'=1_{[0,D_T]}$, et Z' est bien prévisible. Il est évident que si Z est localement borné, Z' l'est aussi, car on a toujours $\tau_t \leq t$.

b) Pour établir la formule (2), on peut ici encore se limiter au cas où Z est de la forme $1_{[0,T]}$. On a alors

$$Y_t Z_{\tau_t} = Y_t 1_{[0,D_T]}(t) = Y_{t\wedge D_T} \quad \text{car } Y_{D_T}=0 \ .$$

Puis
$$Y_{t\wedge D_T} = Y_0 + \int_0^t 1_{[0,D_T]}(s)dY_s = Y_0 Z_0 + \int_0^t Z_{\tau_s} dY_s \ .$$

c) est une conséquence immédiate de la formule (2). Pour établir d), nous écrivons la définition du temps local de Y en 0

$$|Y_t| = |Y_0| + \int_0^t \mathrm{sgn}(Y_s)dY_s + \Lambda_t$$

où nous pouvons convenir que sgn(0)=0 du fait que Y est une martingale locale (cf. [2], p.12, théorème 16). Ecrivons alors la formule (2) en remplaçant Z par |Z|, Y par |Y|

$$|Y_t Z_{\tau_t}| = |Y_0 Z_0| + \int_0^t |Z_{\tau_s}| d|Y_s| = |Y_0 Z_0| + \int_0^t |Z_{\tau_s}| \mathrm{sgn}(Y_s) dY_s + \int_0^t |Z_{\tau_s}| d\Lambda_s$$

dans la dernière expression, l'intégrale stochastique peut aussi s'écrire $\int_0^t \mathrm{sgn}(Z_{\tau_s})\mathrm{sgn}(Y_s)d(YZ_\tau)_s$, et d'après notre convention sur le signe, on peut remplacer $\mathrm{sgn}(Z_{\tau_s})\mathrm{sgn}(Y_s)$ par $\mathrm{sgn}(Y'_s)$. Ainsi

$$|Y'_t| = |Y'_0| + \int_0^t \mathrm{sgn}(Y'_s)dY'_s + \int_0^t |Z_{\tau_s}| d\Lambda_s$$

ce qui prouve (3).

REMARQUES. 1) La semi-martingale Y étant continue à droite, la condition ($Y_{D_t}=0$ pour tout t) est équivalente à : ($Y_{D_t}=0$ pour tout t rationnel), et à l'annulation de Y en tous les points de **H**, à l'exception peut être des extrémités gauches non isolées d'intervalles contigus à **H**.

2) La formule (3) n'est pas valable en général pour les semi-martingales continues - elle entraînerait en effet, lorsque Z=-1 identiquement, que les semi-martingales Y et -Y ont même temps local en 0, ce qui n'est pas toujours vrai (la convention sgn(0)=-1 est dissymétrique). Toutefois, on peut remplacer (3) par une formule à peine plus compliquée, et entièrement générale.

En effet, le raisonnement du théorème 1 montre que la formule (3) est vraie pour les temps locaux (que nous notons provisoirement (Θ_t) et (Θ'_t)) des semi-martingales continues (Y_t) et (Y'_t), calculés avec la convention sgn(0)=0 . Or il est clair que l'on a par exemple

$$\Theta_t = \Lambda_t - \int_0^t 1_{\{Y_s=0\}} dY_s$$

On en déduit alors sans peine la formule générale

$$(3') \qquad \Lambda'_t = \int_0^t |Z_{\tau_s}| d\Lambda_s - 2\int_0^t Z^-_{\tau_s} 1_{\{Y_s=0\}} dY_s$$

En particulier, la formule (3) est vraie si Z est positif .

3) Stricker a démontré récemment, par une méthode tout à fait différente, que si le processus Z est progressivement mesurable borné (les hypothèses sur Y restant les mêmes), le processus $Y'=Z_\tau Y$ est une semimartingale. Nous examinerons dans un autre exposé [1] ce qui subsiste de la formule (2) dans cette situation.

Nous dégageons maintenant quelques conséquences immédiates du théorème 1, dans la situation ($\mathbb{H}=\{X=0\}$, etc) qui fait l'objet principal de l' article, et avec les notations correspondantes. Toutefois, dans le premier corollaire, il suffit que X (continue) soit nulle sur $\mathbb{H}$.

COROLLAIRE 1.1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la différence de deux fonctions convexes, et $f(0)=0$, on a

$$(4) \quad f(X_t)Z_{\tau_t} = f(X_0)Z_0 + \int_0^t Z_{\tau_s} d\{f(X_s)\}$$
$$= f(X_0)Z_0 + \int_0^t Z_{\tau_s} f'_g(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mu(da)\int_0^t Z_{\tau_s} dL^a_s ,$$

où f'_g désigne la dérivée à gauche de f, et μ la dérivée seconde de f au sens des distributions.

Démonstration : La première ligne est la formule (2), et la seconde s'en déduit en évaluant $d\{f(X_s)\}$ par la formule d'Ito.

COROLLAIRE 1.2. Si (Z_t) est un processus prévisible localement borné, il existe une semi-martingale continue W dont le temps local en 0 est $\int_0^\cdot |Z_s| dL_s$

Démonstration : on peut supposer Z positif, et l'on prend alors $W_t=Z_{\tau_t} X_t$. D'après la remarque 2 ci-dessus, le temps local de W en 0 est $\int_0^\cdot Z_{\tau_s} dL_s$; mais L est porté par $\mathbb{H}$, et sur $\mathbb{H}$ on a $Z_{\tau_s}=Z_s$.

COROLLAIRE 1.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne localement bornée. Alors $X_t f(L_t)$ est une semi-martingale continue (une martingale locale

1. Voir dans ce volume l'exposé de Meyer, Stricker et Yor sur le balayage.

si X en est une). Si f est positive, ou si X est une martingale locale, le temps local de cette semi-martingale en 0 est égal à $\int_0^{L_t} |f(x)|dx$.

Démonstration : On applique le théorème 1 avec $Z_t=f(L_t)$ (ce processus vérifie : $Z_t=Z_{\tau_t}$).

Nous faisons maintenant une digression relative à l'extension du corollaire 1.2 à certains processus prévisibles non localement bornés, dans le cas où X est une martingale locale continue.

THEOREME 2. Supposons que X soit une martingale locale continue(1). Soit Z un processus prévisible tel que : $\forall$ t, $\int_0^t |Z_s|dL_s < \infty$ P-p.s. . Alors

1) Le processus $X'_t = X_t Z_{\tau_t}$ est une martingale locale. Si l'on a $X_0Z_0 \in L^1$, $E[\int_0^\infty |Z_s|dL_s] < \infty$, X' est une martingale uniformément intégrable, avec :

(5) $$\underbrace{\|X'\|_1}_{= \|X'_\infty\|_{L^1} \text{ par définition}} = E[|X_0Z_0| + \int_0^\infty |Z_s|dL_s]$$

2) L'intégrale stochastique $\int_0^t Z_{\tau_s} dX_s$ existe pour tout t, et l'on a

$$X'_t = X_t Z_{\tau_t} = X_0Z_0 + \int_0^t Z_{\tau_s} dX_s$$

3) Le temps local de X' en 0 est égal à $\int_0^\cdot |Z_s|dL_s$.

Démonstration : Nous supposons d'abord que X appartient à H^1, et que Z est borné. Alors tous ces résultats sont contenus dans le théorème 1, à l'exception de la seconde partie de 1). Il est clair que $\sup_t |X'_t| \in L^1$, donc $X' \in H^1$. Ensuite, la martingale locale $|X'_t| - \int_0^t |Z_s|dL_s$ appartient à H^1, et on a donc

$$E[|X'_\infty|-|X'_0|] = E[\int_0^\infty |Z_s|dL_s]$$

c'est à dire (5).

Supposons ensuite que Z ne soit pas nécessairement borné, mais que l'on ait $X_0Z_0 \in L^1$, $E[\int_0^\infty |Z_s|dL_s]<\infty$ (toujours avec $X \in H^1$) . Posons $Z^n=ZI_{\{|Z|\leq n\}}$ et introduisons les martingales X'^n correspondantes, qui forment d'après (5) une suite de Cauchy en norme $\| \|_1$. Comme ces martingales, d'autre part, convergent simplement vers X', il résulte de l'inégalité maximale de Doob que leur limite en norme $\| \|_1$ est indistinguable de X'. D'après [13], il existe des temps d'arrêt $T_m \uparrow \infty$ tels que

$$\text{pour tout } m , \quad (X'^n)^{T_m} \to (X')^{T_m} \quad \text{dans } H^1$$

Or $[X'^n,X'^n]_{T_m} = \int_0^{T_m} Z^2_{\tau_s} I_{\{|Z_s|\leq n\}} d[X,X]_s$; il résulte du lemme de Fatou que $E[(\int_0^{T_m} Z^2_{\tau_s} d[X,X]_s)^{1/2}] < \infty$ pour tout m, donc l'intégrale stochastique $\int_0^t Z_{\tau_s} dX_s$ existe, et la formule

1. Si X n'est pas continue, il faut utiliser $\mathcal{L}_t$ au lieu de L_t ([12], p.25)

$$X_t Z^n_{\tau_t} = X_0 Z^n_0 + \int_0^t Z^n_{\tau_s} dX_s$$

passe à la limite. L'ensemble des martingales uniformément intégrables étant fermé en norme dans l'espace des martingales bornées dans L^1, X' est uniformément intégrable.

Le processus $|X'_t| - \int_0^t |Z^n_s| dL_s$ est une martingale uniformément intégrable pour tout n ; passant à la limite en norme $\| \ \|_1$, on voit que $|X'_t| - \int_0^t |Z_s| dL_s$ est une martingale uniformément intégrable ; on en déduit, d'une part que $\int_0^t |Z_s| dL_s$ est le processus croissant prévisible décomposant la sousmartingale $(|X'_t|)$, c'est à dire 3), et d'autre part la formule (5) comme on l'a fait plus haut lorsque Z était borné.

Enfin, on passe sans difficulté, par arrêt, au cas où X est une martingale locale continue quelconque, et Z un processus tel que $\int_0^t |Z_s| dL_s < \infty$ p.s..

REMARQUES. a) Il résulte en particulier de (5) que, si Z est négligeable pour la mesure $\mu(ds \times d\omega) = dL_s(\omega) dP(\omega)$, le processus $X_t Z_{\tau_t}$ est évanescent.

b) La formule (5) est tout à fait analogue à la formule

$$\|Z \cdot X\|_2^2 = E[Z_0^2 X_0^2 + \int_0^t Z_s^2 d[X,X]_s]$$

qui est à la base de la théorie de l'intégrale stochastique. Le théorème 2 est étroitement lié à l'article [14], où l'on prouve que si M est une martingale locale continue nulle en 0, de temps local en 0 noté Λ, les rapports mutuels des quantités $E[\Lambda_\infty^{1/2}]$, $E[(M^*_\infty)^{1/2}]$, $E[\langle M,M\rangle_\infty^{1/4}]$ sont bornés par des constantes universelles (appliquer cela avec $M = Z_\tau \cdot X$)[1].

Il existe une classe de semi-martingales continues qui se prête particulièrement bien à certaines applications du théorème 1. Elle est constituée par les semi-martingales continues X, dont la décomposition canonique X=N+V (N martingale locale, V processus à variation finie, continu et nul en 0) vérifie

(6) $\qquad dV_s$ <u>est portée par</u> $\{s \mid X_s = 0\}$

Nous notons (Σ) cette classe de semi-martingales, et (Σ_0^+) la classe des éléments de (Σ), positifs et nuls en 0. (Σ) contient évidemment toutes les martingales locales continues (mais ne contient, par contre, aucun processus continu, adapté, à variation finie, autre que 0). Voici deux exemples d'éléments de (Σ_0^+)

(σ.1) Si M est une martingale locale continue, et $S_t = \sup_{s \leq t} M_s$, alors X=S-M appartient à (Σ_0^+).

(σ.2) Si M est une martingale locale continue, $|M|$ appartient à (Σ_0^+).

---

1. Le lecteur pourra en déduire une autre démonstration du théorème 2.

Nous montrerons dans l'appendice que <u>tout élément de</u> (Σ_0^+), en particulier tout élément du type (σ.2), <u>est du type</u> (σ.1).

Nous pouvons alors revenir aux corollaires du théorème 1.

COROLLAIRE 1.4. <u>On suppose que la semi-martingale continue</u> $X=N+V$ <u>appartient à</u> (Σ). <u>Comme d'habitude</u> $H=\{X=0\}$. <u>Alors pour tout processus prévisible localement borné</u> Z, <u>le processus</u>

$$(7)\qquad X_t Z_{\tau_t} - \int_0^t Z_s dV_s$$

<u>est une martingale locale</u>. <u>En particulier</u>

- <u>Si</u> M <u>est une martingale locale continue</u>, $S_t = \sup_{s\leq t} M_s$, <u>et</u> $X=S-M$, <u>alors</u>

$$(7')\qquad X_t Z_{\tau_t} - \int_0^t Z_s dS_s \text{ est une martingale locale .}$$

- <u>Si</u> M <u>est une martingale locale continue de temps local</u> Λ <u>en</u> 0, <u>et</u> $X = |M|$, <u>alors</u>

$$(7'')\qquad |M_t| Z_{\tau_t} - \int_0^t |Z_s| d\Lambda_s \text{ est une martingale locale.}$$

<u>Démonstration</u> . Nous savons d'après le théorème 1 que $X_t Z_{\tau_t} = X_0 Z_0 + \int_0^t Z_{\tau_s}(dV_s+dN_s)$. On remarque que l'intégrale par rapport à N est une martingale locale, et que l'intégrale par rapport à V peut s'écrire $\int_0^t Z_s dV_s$ d'après (6). Le reste est évident.

En particulier, soit f une fonction borélienne localement bornée sur $\mathbb{R}$, et soit $F(x)=\int_0^x f(u)du$. Prenons pour Z le processus $f(V_t)$; comme on a $V_t = V_{\tau_t}$, on obtient que

$$(8)\qquad X_t f(V_t) - F(V_t) \text{ est une martingale locale}$$

Comme cas particuliers, on retrouve dans les cas (σ.1) et (σ.2), avec les notations correspondantes, les martingales locales découvertes par Azéma en [1], et qui jouent un rôle fondamental dans Azéma-Yor [3] :

$$(8')\qquad (S_t - M_t) f(S_t) - F(S_t) \text{ est une martingale locale}$$

$$(8'')\qquad |M_t| f(\Lambda_t) - F(\Lambda_t) \text{ est une martingale locale .}$$

Plus généralement, il existe une formule analogue à (8) pour des processus de la forme $F(X_t, V_t)$, avec une fonction $F\in C^{2,1}(\mathbb{R}_x \times R_y)$. L'utilisation conjointe de la formule d'Ito et de la propriété (6) permet d'écrire que le processus

$$F(X_t, V_t) - \int_0^t (F'_x + F'_y)(0, V_s) dV_s - \frac{1}{2}\int_0^t F''_{x^2}(X_s, V_s) d\langle X^c, X^c\rangle_s$$

est une martingale locale. D'autre part, la formule (8) donne le même résultat pour le processus

$$X_t (F'_x + F'_y)(0, V_t) - \int_0^t (F'_x + F'_y)(0, V_s) dV_s$$

Par différence, il vient que le processus suivant est une martingale locale :

(9) $F(X_t,V_t) - X_t\{F'_x+F'_y\}(0,V_t) - \frac{1}{2}\int_0^t F''_{x^2}(X_s,V_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s$

ce qui donne les martingales locales suivantes

- dans le cas (σ.1), avec un changement de variables élémentaire

(9') $F(M_t,S_t) -(S_t-M_t)F'_y(S_t,S_t) - \frac{1}{2}\int_0^t F''_{x^2}(M_s,S_s)d\langle M,M\rangle_s$

- dans le cas (σ.2)

(9") $F(|M_t|,\Lambda_t) -|M_t|\{F'_x+F'_y\}(0,\Lambda_t) - \frac{1}{2}\int_0^t F''_{x^2}(|M_s|,\Lambda_s)d\langle M,M\rangle_s$

ou la variante suivante, lorsqu'on s'intéresse plutôt à $F(M_t,\Lambda_t)$

(9"') $F(M_t,\Lambda_t)-|M_t|F'_y(0,\Lambda_t) - \frac{1}{2}\int_0^t F''_{x^2}(M_s,\Lambda_s)d\langle M,M\rangle_s$.

2. CALCUL DES PROCESSUS BALAYES DE CERTAINS PROCESSUS CROISSANTS

Reprenons tout d'abord la définition du processus balayé (sous-entendu : relativement à $\mathbf{H}=\{X=0\}$) d'un processus croissant intégrable A. Si l'on associe à tout processus prévisible borné Z le nombre $E[\int_{0-}^{\infty}1_{\{\tau_s>0\}}Z_{\tau_s}dA_s]$, on définit une mesure μ sur la tribu prévisible, qui ne charge pas les ensembles prévisibles évanescents, et ne charge pas $\{0\}\times\Omega$. D'après la théorie générale des processus, il existe alors un processus croissant intégrable prévisible B, nul en 0, tel que $\mu(Z)=E[\int_0^{\infty}Z_s dB_s]$. Ainsi

(1) $E[\int_0^{\infty}Z_s dB_s] = E[\int_0^{\infty}Z_{\tau_s}dA_s]$ pour tout processus prévisible Z, borné et nul en 0 .

On écrit $B=A^{(b)}$. Indiquons quelques propriétés immédiates des processus balayés ainsi définis : $\mathbb{H}=\{X=0\}$ étant prévisible

(i) $dP(\omega)$ p.s., la mesure $dB_s(\omega)$ est portée par $\mathbf{H}$.

Ainsi, $A=A^{(b)}$ si et seulement si A est prévisible, et la mesure $dA_\bullet$ est p.s. portée par $\mathbf{H}$.

(ii) Si Z est un processus prévisible borné, et C désigne le processus croissant $\int_0^{\bullet}Z_{\tau_s}dA_s$, on a

$$C^{(b)} = \int_0^{\bullet}Z_{\tau_s}dA_s^{(b)}$$

(iii) Pour tout t, notons $\underline{\underline{F}}_{\tau_t}$ la tribu, contenue dans $\underline{\underline{F}}_t$

$$\underline{\underline{F}}_{\tau_t} = \{ A\in\underline{\underline{F}}_{\infty} \mid \forall s \ \exists A_s\in\underline{\underline{F}}_s , A\cap\{\tau_t\leqq s\}=A_s\cap\{\tau_t\leqq s\} \}$$

La famille $(\underline{\underline{F}}_{\tau_t})$ est alors croissante et continue à droite. Si l'on désigne par A' la projection duale prévisible de A par rapport à cette famille, on a alors $A^{(b)}=A'^{(b)}$.

L'application $A \mapsto A^{(b)}$ se prolonge par linéarité aux différences de processus croissants intégrables, i.e. aux processus à variation intégrable.

Pour $1 \leqq k < \infty$, nous notons H^k_c l'espace des semi-martingales continues $Y = U+B$ (U martingale locale, B processus prévisible à variation finie, nul en 0 ; U et B sont alors continus) telles que

(10) $$\|Y\|_{H^k_c} = \| \langle U,U\rangle_\infty^{1/2} + \int_0^\infty |dB_s| \|_{L^k} < \infty$$

(H^k_c est un espace de Banach pour la norme ainsi définie). On a démontré en [11] que, si Y appartient à H^k_c , la semi-martingale $|Y|^k$ appartient à H^1_c .

On rappelle que l'on a posé $\tau_\infty = \tau$ (τ est la fin de l'ensemble prévisible $\mathbf{H}$). Pour toute variable aléatoire $V \in L^1$, le processus

(11) $$W_t = V I_{\{0<\tau\leqq t\}}$$

est à variation intégrable, nul en 0 (non adapté en général). Nous noterons $T(V)$ la projection duale prévisible de W .

On peut maintenant énoncer le théorème suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème 1 :

THEOREME 3. <u>Soit</u> $Y=U+B$ <u>une semimartingale continue nulle sur</u> $\mathbf{H}$ (1). <u>On suppose que</u> Y <u>appartient à</u> H^1_c (ou, un peu plus généralement, que B est à variation intégrable, U une martingale uniformément intégrable : cela couvre le cas des sous-martingales positives continues, bornées dans L^1). <u>On pose</u> $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$.

<u>Alors, pour tout processus prévisible borné</u> Z, <u>nul en</u> 0, <u>on a</u>

(12) $$E[Y_\infty Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}] = E[\int_0^\infty Z_{\tau_s} dB_s]$$

<u>ou, avec nos notations</u>

(12') $$B^{(b)} = T(Y_\infty) = (Y_\infty 1_{0<\tau\leqq \cdot})^{(p)}$$

<u>En particulier, si</u> B <u>est porté par</u> $\mathbf{H}$, <u>on a</u>

(12") $$B = T(Y_\infty)$$

<u>Démonstration</u> : D'après la formule (2), $Y_t Z_{\tau_t} - \int_0^t Z_{\tau_s} dB_s = \int_0^t Z_{\tau_s} dU_s$ est une martingale locale nulle en 0.

Les conditions d'intégrabilité imposées à Y entraînent qu'elle appartient à la classe (D). On a donc pour t fini

$$E[Y_t Z_{\tau_t}] = E[\int_0^t Z_{\tau_s} dB_s]$$

et des deux côtés, nous avons des variables uniformément intégrables en t.

1. Il y a un énoncé correspondant dans le << cas général >>. Nous le donnons en remarque après la démonstration.

Faisons tendre t vers l'infini. Si $\tau<\infty$, $Z_{\tau_t}=Z_\tau$ pour t assez grand, et $Y_t Z_{\tau_t} \to Y_\infty Z_\tau$. Si $\tau=\infty$, $\mathbb{H}$ s'accumule à l'infini et $Y_\infty=0$. On obtient donc (12) par passage à la limite.

REMARQUE. La démonstration repose uniquement sur la formule (2). Le résultat reste donc vrai sous les hypothèses suivantes

- $\mathbb{H}$ est optionnel fermé,
- $Y=U+B$ est une semimartingale continue à droite telle que $Y_{D_t}=0$ pour tout t ; Y appartient à H^1 (ou plus généralement, U est une martingale uniformément intégrable, et B est à variation intégrable).

Cette remarque étant faite, nous revenons au cas où $\mathbf{H}=\{X=0\}$. Nous écrivons comme d'habitude $X=N+V$ (décomposition canonique) et pour tout k tel que $X\in H^k_c$, nous désignons par $|X|^k=U(k)+B(k)$ la décomposition canonique de la semi-martingale $Y=|X|^k \in H^1_c$. En particulier si $X\in H^1_c$, on a d'après la formule d'Ito

$$B(1) = \int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(X_s)dV_s + L$$

et pour tout $k\in]1,\infty[$, si $X\in H^k_c$

$$B(k) = k\int_0^{\cdot} |X_s|^{k-1}\operatorname{sgn}(X_s)dV_s + \frac{k(k-1)}{2}\int_0^{\cdot} |X_s|^{k-2}d\langle X^c,X^c\rangle_s \ .$$

Avec ces notations, on peut énoncer les conséquences suivantes du théorème 3 .

COROLLAIRE 3.1. <u>Soit</u> $k\in[1,\infty[$. <u>Si</u> $X=N+V$ <u>appartient à</u> H^k_c , <u>on a</u>

(13) $$(B(k))^{(b)} = \mathring{T}(|X_\infty|^k) = (|X_\infty|^k 1_{0<\tau\leq\cdot})^{(p)}$$

<u>En particulier</u>, <u>si</u> $X\in(\Sigma)$, <u>on a</u>

(13') - <u>pour</u> $k=1$, , $L-V = T(|X_\infty|)$

(13") - <u>pour</u> $k>1$, $\frac{k(k-1)}{2}\left(\int_0^{\cdot}|X_s|^{k-2}d\langle X^c,X^c\rangle_s\right)^{(b)} = T(|X_\infty|^k)$

<u>Démonstration</u> : (13) résulte de (12') appliqué à $Y=|X|^k$. Si $X\in(\Sigma)$, la première intégrale dans les formules donnant B(k) est un processus prévisible porté par $\mathbf{H}$ (donc identique à son balayé), qui vaut 0 si $k>1$, et $-V$ si $k=1$ (en raison de la convention $\operatorname{sgn}(0)=-1$).

COROLLAIRE 3.2. a) <u>Si</u> $X=S-M$, <u>où</u> M <u>est une martingale continue de</u> H^1_c <u>et</u> $S_t=\sup_{s\leq t} M_s$, <u>on a</u>

(14) $$S = T(S_\infty-M_\infty) = ((S_\infty-M_\infty)1_{0<\tau\leq\cdot})^{(p)}$$

b) <u>Si</u> $X=|M|$, <u>où</u> M <u>est une martingale continue uniformément intégrable</u>, <u>dont le temps local en</u> 0 <u>est</u> Λ, <u>alors</u>

(15) $$\Lambda = T(|M_\infty|) = (|M_\infty| 1_{0<\tau\leq\cdot})^{(p)}$$

c) <u>Si</u> X=N <u>et</u> M <u>sont deux martingales continues de carré intégrable</u> :

$$(16)\qquad \langle M,N\rangle^{(b)} = T(M_\infty N_\infty) = (\ M_\infty N_\infty 1_{\{0<\tau\leq .\}})^{(p)}$$

<u>Démonstration</u> : a) On a montré, dans l'appendice de [3], que le temps local en 0 de X=S-M est L=2S, donc L-V=S. La formule (14) est donc une conséquence de (13').

b) De même, si $X=|M|$, il résulte de ([10], proposition 2) que $L=2\Lambda$. D'après la formule de Tanaka, on a $V=\Lambda$. Finalement, $L-V=\Lambda$, et on applique (13') .

c) On applique la formule (13) à Y=MN, qui appartient à H^1_c.

REMARQUES. a) D'après le << cas général >> qui suit le théorème 3, la formule (16) reste vraie lorsque M et N sont deux martingales de carré intégrable (non nécessairement continues) telles que MN soit nulle en tous les instants D_t (noter la symétrie entre M et N dans cet énoncé)

b) Soit Z un processus prévisible borné ; dans la formule (16), prenons pour M l'intégrale stochastique $\int_0^\cdot Z_s d\langle N,N\rangle_s$. Alors

$$\left(\int_0^\cdot Z_s d\langle N,N\rangle_s\ \right)^{(b)} = T(\ N_\infty \int_0^\infty Z_s dN_s\ )$$

Profitons de cette formule pour souligner que, si A est un processus croissant intégrable, le calcul de $A^{(b)}$ ne donne, a priori, aucun renseignement sur celui de $(\int_0^\cdot Z_s dA_s)^{(b)}$ (sauf dans le cas, mentionné en (ii) au début du paragraphe, d'un processus de la forme (Z_{τ_t})).

Revenons au corollaire 3.1. Pour simplifier les notations, nous posons si $X\in H^k_c$ $\quad (B(k))^{(b)}= C(k) \quad , \quad H = \langle X^c,X^c\rangle^{(b)}$

PROPOSITION 4. <u>Soient</u> $p,q \in [1,\infty[$ <u>et</u> $X\in H^{p\vee q}_c$. <u>Alors les mesures aléatoires</u> dC(p) <u>et</u> dC(q) <u>sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>sont p.s. équivalentes</u>.

Cela résulte aussitôt de la formule (13).

COROLLAIRE 4.1. <u>Si</u> X <u>est une martingale de carré intégrable</u>, <u>les mesures aléatoires</u> dL_s <u>et</u> dH_s <u>sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>sont p.s. équivalentes</u>.

En effet, on a L=C(1) (formule (13')) et H=C(2) (formule (13")).

REMARQUES. a) Ce résultat est étroitement lié à la remarque b) suivant le théorème 2 : en effet, si A est un ensemble prévisible, négligeable pour la mesure aléatoire dL, et si l'on note $Z=1_A$, le processus croissant $\int_0^\cdot Z_s dL_s$ est nul, et donc, d'après la remarque que l'on vient de mentionner, $\int_0^\cdot Z^2_{\tau_s} d\langle X,X\rangle_s =0$. Donc A est négligeable pour dH. Le même raisonnement en sens inverse permet d'établir l'équivalence des deux mesures sur la tribu prévisible (et, comme elles sont prévisibles, leur équivalence p.s.).

b) Il est intéressant de remarquer que $H=\langle X,X\rangle^{(b)}$ est, lui aussi, le temps local en 0 d'une martingale locale continue. En effet, d'après le corollaire 4.1, on peut écrire $dH=ZdL$, où Z est un processus prévisible, et H est alors le temps local en 0 de $X'=XZ_\tau$.

Nous préparons maintenant le paragraphe 3, en appliquant les formules précédentes, pour k=1 ou 2 (nous laisserons de côté les autres valeurs, pour simplifier l'exposé), aux semi-martingales continues

$$Y_t=(X_t-a)^+=(X_0-a)^++\int_0^t 1_{\{X_s>a\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t^a$$

Si $X=N+V$ est une semi-martingale continue, et Z est un processus prévisible borné nul en 0, on a

$$(17)\quad \text{si } X\in H_c^1,\quad E[(X_\infty-a)^+Z_{\tau^a}] = E[\int_0^\infty Z_{\tau_s^a}1_{\{X_s>a\}}dV_s]+\frac{1}{2}E[\int_0^\infty Z_s dL_s^a]$$

$$(18)\quad \text{si } X\in H_c^2,\quad E[((X_\infty-a)^+)^2Z_{\tau^a}] = 2E[\int_0^\infty Z_{\tau_s^a}(X_s-a)^+dV_s]+E[\int_0^\infty Z_{\tau_s^a}1_{\{X_s>a\}}d\langle X^c,X^c\rangle_s]$$

où $1_{\{\tau^a<\infty\}}$ est sous-entendu du côté gauche. Ces formules correspondent à (13') pour k=1, (13") pour k=2, avec les légères modifications tenant au remplacement de $|x|$ par x^+.

3. INTEGRATION EN a DES FORMULES PRECEDENTES

Nous allons avoir besoin de notations abrégées, qu'il faut d'abord expliquer. Comme d'habitude, nous notons $Z\cdot Y$ l'intégrale de Stieltjes d'un processus mesurable Z par rapport à un processus à variation finie Y, ou l'intégrale stochastique d'un processus prévisible Z par rapport à une semimartingale Y (sous réserve, bien entendu, que ces intégrales existent). Nous introduirons d'autre part un autre symbole $W*K$. Ici

- W est un processus à variation finie, continu, adapté ou non ;

- K n'est pas un processus, mais une famille de processus (K_t^r) dépendant (mesurablement) d'un paramètre $r\in\mathbb{R}_+$;

et alors $W*K$ est le processus $(W*K)_s = \int_0^\infty dW(r)K_s^r$.

Il faut bien entendu que cette intégrale ait un sens. Dans tous les cas de ce paragraphe, nous aurons

$$\int_0^\infty |dW_s(\omega)|<\infty \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad \sup_{r,s}|K_s^r(\omega)|<\infty \text{ p.s.} \quad ;$$

il n'y aura donc aucune difficulté. Mieux encore : $K_\cdot^r$ sera pour tout r un processus (non adapté) à variation finie, et nous aurons

$$\sup_r \int_{[0,\infty[}|dK_s^r(\omega)| < \infty \text{ p.s.}$$

Alors $W*K$ est un processus à variation finie (non adapté).

Revenons à notre semi-martingale continue de référence X . Nous définissons les processus (I_t^r), (J_t^r) , dépendant du paramètre r

$$I_t^r = \sup_{t\leqq u\leqq r} X_u \quad \text{si } t\leqq r \ , \ X_r \text{ si } t\geqq r$$

$$J_t^r = \inf_{t\leqq u\leqq r} X_u \quad \text{si } t\leqq r \ , \ X_r \text{ si } t\geqq r$$

Ces deux processus sont continus, non adaptés ; le premier est décroissant, le second croissant. Nous écrivons simplement I_t, J_t pour I_t^∞, J_t^∞, et nous posons

$$\alpha_t = (I_0-X_\infty)^2-(I_t-X_\infty)^2 \quad , \quad \beta_t = (J_0-X_\infty)^2-(J_t-X_\infty)^2$$

deux processus croissants continus, non adaptés, intégrables dès que $X\in H_c^2$.

Etablissons, pour la suite du paragraphe, le

LEMME 5. <u>Soit</u> (W_t) <u>un processus continu</u>, <u>à variation finie sur</u> $[0,\infty]$, <u>tel que</u>

$$E[(\int_0^\infty |dW_s|)^2] < \infty$$

<u>Supposons que</u> $X\in H_c^2$. <u>Alors pour tout processus mesurable borné</u> Z <u>nul en</u> 0, <u>on a</u>

$$(19) \qquad \int da\, E[\int_0^\infty Z_{\tau_s^a} 1_{\{X_s>a\}} dW_s] = E[\int_0^\infty Z_u d(W*J)_u]$$

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que les hypothèses d'intégrabilité faites sur W et X entrainent que le membre de droite de (19) est bien défini. Ainsi, pour vérifier que le membre de gauche est bien défini, et démontrer l'égalité, il suffit de se restreindre au cas où W est croissant et Z positif. D'après le théorème de Fubini, le côté gauche est égal à

$$E[\int_0^\infty dW_s \int da\, Z_{\tau_s^a} 1_{\{X_s>a\}}]$$

et il suffit de vérifier que, pour s fixé , on a $\int da Z_{\tau_s^a} 1_{\{X_s>a\}} = \int_0^\infty Z_u dJ_u^s$,
Or on sait que $\int_0^\infty Z_u dJ_u^s = \int_{J_0^s}^{J_\infty^s} Z_{\varphi(v)} dv$, où $\varphi(v)=\sup\{u : J_u^s \leqq v\}$ ($\sup(\emptyset)=0$). Si $Z_0=0$, on peut supprimer la borne inférieure J_0^s, et la borne supérieure de l'intégrale vaut $J_\infty^s = X_s$. Quant au calcul de $\varphi(v)$, pour $J_s^0<v<J_\infty^s$ on vérifie aisément que $\varphi(v)=\tau_s^v$, d'où l'égalité cherchée.

Dans le théorème suivant, il faut bien se rappeler que les processus tests sont des processus prévisibles Z bornés <u>nuls en</u> 0 : la projection duale prévisible néglige donc le saut en 0 des processus croissants.

THEOREME 6. <u>Soit</u> $X=N+V \in \underline{H}_c^2$. <u>Alors</u>

$$(20) \qquad < X^c,X^c > = (\beta - 2(V_*J))^{(p)} = (\alpha -2(V_*I))^{(p)}$$

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer la première relation : la seconde s'en déduit en remplaçant X par -X.

Intégrons par rapport à da les deux membres de l'égalité (17). Le côté droit nous donne, d'après l'identité $\langle X^c,X^c\rangle = \int L^a da$ et le lemme 5

$$E[\int_0^\infty Z_u d(V*J)_u] + \tfrac{1}{2}E[\int_0^\infty Z_u d\langle X^c,X^c\rangle_u]$$

D'autre part, le côté gauche de (17) devient, d'après l'argument de la fin de la démonstration du lemme 5 (avec $s=\infty$)

$$\int da\ E[(X_\infty-a)^+ Z_{\tau^a}] = E[\int dJ_u(X_\infty-J_u)Z_u] = \tfrac{1}{2}E[\int Z_u d\beta_u].$$

THEOREME 7 . <u>Soit</u> $X\in H^3_c$. <u>Les deux processus à variation intégrable suivants</u>

$$\tfrac{1}{3}[(J_\cdot-X_\infty)^3-(J_0-X_\infty)^3] \quad \underline{et} \quad 2[(X\cdot V)*J - V*(X\cdot J)] + \langle X^c,X^c\rangle*J$$

<u>ont même projection duale prévisible</u>. <u>Il en est de même des deux suivants</u>

$$\tfrac{1}{3}[(I_\cdot-X_\infty)^3-(I_0-X_\infty)^3] \quad \underline{et} \quad 2[(X\cdot V)*I - V*(X\cdot I)] + \langle X^c,X^c\rangle*I$$

<u>Démonstration</u> : Analogue à celle du théorème 6, la formule (18) remplaçant (17). Pour être tout à fait rigoureux dans l'application du lemme 5 à $W=\langle X^c,X^c\rangle$, on doit supposer d'abord $X\in H^4_c$. Le théorème 7 pour $X\in H^3_c$ s'en déduit par localisation et passage à la limite.

Nous avons défini plus haut (proposition 4) le processus croissant H, balayé de $\langle X^c,X^c\rangle$ sur $\mathbf{H}=\{X=0\}$. De la même manière, nous désignons par H^a le balayé de $\langle X^c,X^c\rangle$ sur $\mathbf{H}^a=\{X=a\}$. Nous supposerons choisie une version de ces processus telle que l'application $(a,s,\omega)\longmapsto H^a_s(\omega)$ soit mesurable. Il résulte de ([9], proposition 4) qu'un tel choix est toujours possible lorsque l'espace $L^1(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est séparable.

Avec ces notations, nous avons

THEOREME 8. <u>Soit</u> $X\in H^3_c$. <u>Alors</u> $\hat{H}=\int H^a da$ <u>est un processus croissant intégrable, projection duale prévisible de</u> $\langle X^c,X^c\rangle*(J-I)$.

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que (toujours d'après l'argument de la fin de la démonstration du lemme 5)

$$E[\hat{H}_\infty] = \int da E[H^a_\infty] = \int da E[\int_0^\infty 1_{\{\tau^a_s>C\}} d\langle X^c,X^c\rangle_s] = E[\int_0^\infty d(\langle X^c,X^c\rangle*(J-I))_s]$$

On voit donc que l'hypothèse : $X\in H^3_c$ entraîne alors : $E[\hat{H}_\infty]<\infty$.

Sachant alors que $\hat{H}$ est un processus croissant intégrable, nous pouvons écrire pour Z prévisible borné nul en 0

$$E[\int_0^\infty Z_s d\hat{H}_s] = \int da\ E[\int_0^\infty Z_{\tau^a_s} d\langle X^c,X^c\rangle_s] = E[\int_0^\infty Z_u d(\langle X^c,X^c\rangle*(J-I))_u]$$

d'où le résultat annoncé.

Nous considérons, pour terminer ce paragraphe, le cas particulièrement intéressant où $X \in H^3_c$ est une martingale . D'après le corollaire 4.1, les mesures bornées sur la tribu prévisible $dP(\omega)dH^a_s(\omega)$ et $dP(\omega)dL^a_s(\omega)$ sont équivalentes. D'autre part, si $L^1(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est séparable, la tribu prévisible est séparable aux ensembles évanescents près. Ces mesures dépendant mesurablement du paramètre a, il résulte d'un théorème classique de Doob qu'il existe une fonction mesurable $(a,s,\omega) \mapsto u^a_s(\omega)$, telle que

pour tout a, on ait pour presque tout ω : $dH^a_{\bullet}(\omega)=u^a_{\bullet}(\omega)dL^a_{\bullet}(\omega)$.

Rappelons une fois de plus que, pour tout a, la mesure $dL^a_{\bullet}(\omega)$ est p.s. portée par $\{ s : X_s(\omega)=a\}$. On en déduit immédiatement la

PROPOSITION 9. <u>Si</u> $X \in H^3_c$ <u>est une martingale, les mesures prévisibles</u> $d\hat{H}$ <u>et</u> $d\langle X,X\rangle$ <u>sont équivalentes, et on a pour presque tout</u> ω

$$d\hat{H}_{\bullet}(\omega) = u_{\bullet}^{X_{\bullet}(\omega)} d\langle X,X\rangle_{\bullet}(\omega) .$$

4. A PROPOS D'UNE PATHOLOGIE

Soit L une variable aléatoire positive. Nous définirons la tribu $\underline{\underline{F}}^o_L$ de la manière suivante ("o" signifie "optionnel")

$$\underline{\underline{F}}^o_L = \{ A \in \underline{\underline{F}}_{\infty} | \ \exists \ Z \text{ processus optionnel, } 1_A = Z_L \text{ sur } \{L<\infty\} \}$$

on définit de même les tribus $\underline{\underline{F}}^p_L$, $\underline{\underline{F}}^{\pi}_L$ en remplaçant l'adjectif "optionnel" respectivement par "prévisible" et "progressivement mesurable" .

Le cas où L est la fin d'un ensemble optionnel a été particulièrement étudié. M.Barlow [4], C. Dellacherie [5] (et aussi T.Jeulin dans un travail non publié) ont remarqué[1] que l'on peut avoir simultanément

$$\underline{\underline{F}}^o_L = \underline{\underline{F}}^p_L \qquad ; \qquad \underline{\underline{F}}^o_L \neq \underline{\underline{F}}^{\pi}_L$$

Cela se produit, par exemple, lorsque L est le dernier zéro du mouvement brownien avant l'instant 1. Nous nous proposons d'englober ces résultats dans un cadre plus général.

PROPOSITION 10 . <u>Soit</u> X <u>une martingale continue, uniformément intégrable, nulle en</u> 0 , <u>mais non nulle</u> . <u>Soit</u> $\tau = \sup\{t \mid X_t=0\}$. <u>**Alors**</u> :

1) $\underline{\underline{F}}^o_{\tau}=\underline{\underline{F}}^p_{\tau}$
2) $E[X_{\infty} | \underline{\underline{F}}^o_{\tau}]=0$, $E[X_{\infty} | \underline{\underline{F}}^{\pi}_{\tau}] \neq 0$. <u>En conséquence,</u> $\underline{\underline{F}}^{\pi}_{\tau} \neq \underline{\underline{F}}^o_{\tau}$.

(Pour simplifier, on suppose que τ est p.s. fini dans la démonstration).

<u>Démonstration</u> : On a montré en [2] que si $\mathbf{H}=\{s|X_s=0\}$, et $\mathbf{H}^{\rightarrow}$ désigne l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à $\mathbf{H}$, alors l'ensemble $[S]\cap\mathbf{H}^{\rightarrow}$ est évanescent pour tout temps d'arrêt S. Comme le point $\tau(\omega)$ appartient à $\mathbf{H}^{\rightarrow}$, on a $P\{S=\tau\}=0$ pour tout temps d'arrêt S.

Soit K un processus optionnel borné, et soit J sa projection prévisible. L'ensemble $\{K \neq J\}$ est alors réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt, et il résulte de ce qui précède que l'on a $K_{\tau}=J_{\tau}$ p.s., donc $\underline{\underline{F}}^o_{\tau} \subset \underline{\underline{F}}^p_{\tau}$, et

1. Ainsi que P. Millar [15]

enfin $\underline{\underline{F}}^o_\tau = \underline{\underline{F}}^p_\tau$.

2) Il nous suffit donc de montrer que $E[X_\infty | \underline{\underline{F}}^p_\tau]=0$. D'après le théorème 1, pour tout processus prévisible borné (Z_t), $(Z_{\tau_t} X_t)$ est une martingale uniformément intégrable. Donc

$$E[Z_\tau X_\infty] = E[Z_0 X_0] = 0$$

et cela exprime que $E[X_\infty | \underline{\underline{F}}^p_\tau] = 0$.

Mais d'autre part, définissons un processus progressivement mesurable Z par

$$Z_t = \overline{\lim}_{h\downarrow\downarrow 0} 1_{\{X_{t+h}>0\}} - \overline{\lim}_{h\downarrow\downarrow 0} 1_{\{X_{t+h}<0\}}$$

et remarquons que $Z_{\tau_t} X_t = |X_t|$. Nous avons donc

$$E[|X_\infty| | \underline{\underline{F}}^\pi_\tau] = Z_\tau E[X_\infty | \underline{\underline{F}}^\pi_\tau]$$

X étant non nulle, le côté gauche n'est pas nul, donc $E[X_\infty | \underline{\underline{F}}^\pi_\tau] \neq 0$.

REMARQUE. Conformément au résultat de Stricker mentionné dans la remarque 3) suivant le théorème 1, on constate que le processus $(Z_{\tau_t} X_t)$ est une semi-martingale. Mais ce n'est pas une martingale, et la formule (2) ne peut donc être correcte lorsque Z est progressivement mesurable.

APPENDICE : CARACTERISATION DE CERTAINES SEMI-MARTINGALES POSITIVES

Comme cela a été annoncé dans le paragraphe 1, on caractérise ici les semi-martingales de (Σ^o_+).

THEOREME. <u>Soit</u> X <u>une semi-martingale continue, nulle en</u> 0, <u>à valeurs positives ou nulles. On note</u> X=N+V <u>la décomposition canonique de</u> X (N <u>est une martingale locale</u>, V <u>un processus continu à variation finie, nul en</u> 0). <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

i) <u>La mesure</u> dV_s <u>est portée par</u> $\mathbf{H}=\{s | X_s=0\}$.

ii) $\int_0^\cdot 1_{\{X_s\neq 0\}} dX_s$ <u>est une martingale locale</u>.

iii) <u>Il existe une martingale locale continue</u> M, <u>nulle en</u> 0, <u>telle que, si l'on note</u> $S_t = \sup_{s\leq t} M_s$, <u>on ait</u> X=S-M .

La classe des semi-martingales satisfaisant à la propriété i) a été notée (Σ^o_+) au paragraphe 1 (cf. la formule (6)) .

Nous commençons par quelques rappels. X=N+V étant une semi-martingale continue et nulle en 0, pour l'instant sans propriété supplémentaire, on montre dans [8], chap. VI, que le processus des temps locaux de X , soit $((L^a_t),\ t\geq 0,\ a\in\mathbb{R})$ vérifie la propriété suivante de densité d'occupation

(a) $\forall$f borélienne bornée, $\forall$t , $\int_0^t f(X_s)d\langle M,M\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} f(a)L^a_t\, da$

Prenant $f=1_{\{0\}}$, on en déduit que $\int_0^{\cdot} 1_{\{X_s=0\}} dN_s = 0$, et par conséquent

(b) $\int_0^{\cdot} 1_{\{X_s=0\}} dX_s = \int_0^{\cdot} 1_{\{X_s=0\}} dV_s$, processus continu à variation finie

Montrons alors l'équivalence de i) et ii). Si l'on a i), on a $V_t=\int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dV_s = \int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dX_s$, donc par différence $N_t=X_t-V_t=\int_0^t 1_{\{X_s\neq 0\}} dX_s$, et ii) est satisfaite. Inversement, si l'on a ii), la formule

$$X_t = \int_0^t 1_{\{X_s\neq 0\}} dX_s + \int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dX_s$$

donne une décomposition de X en une martingale locale et un processus à variation finie continue, qui doit être identique à la décomposition $X=N+V$. En particulier , on a d'après (b)

$$V_t = \int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dX_s = \int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dV_s$$

d'où la propriété i).

Il est clair que iii)=>i), car si $X=S-M$, on a $S=V$, $N=-M$, et la mesure $dS_s(\omega)$ est portée par l'ensemble $\{s|S_s=M_s\}=\{s|X_s=0\}$.

Reste l'implication i)=>iii), qui est la seule délicate. Tout d'abord, le calcul du temps local en 0 d'une semi-martingale positive et continue ([10] , proposition 2) permet d'écrire

$$L_t^0 = 2\int_0^t 1_{\{X_s=0\}} dV_s$$

Ce processus à variation finie est donc en fait croissant, et la propriété i) entraîne que V <u>est croissant</u> , et que $V=\frac{1}{2}L^0$. Les processus X,N,V sont donc liés par les relations

α) $X=N+V$

β) V est croissant, et dV_s est portée par $\{s|X_s=0\}$

Le couple (X,V) est donc l'unique solution du problème de la réflexion associé à N ([6], théorème I.1.2), et alors la forme explicite de la solution (même référence) est

$$V_t = \sup_{s\leq t} N_s^- \quad , \quad X_t = N_t+V_t$$

c'est à dire iii) avec $M=-N$.

REMARQUE. Il résulte de cette démonstration que le temps local en 0 de la semi-martingale $X=S-M$ est égal à 2S.

COROLLAIRE. <u>Si</u> M <u>est une martingale locale continue</u>, <u>nulle en</u> 0, <u>la semi-martingale</u> $X=|M|$ <u>appartient à</u> (Σ_+^0).

En effet, la décomposition canonique de X est donnée par la formule de Tanaka, donc V est le temps local de M en 0, et on sait qu'il est porté par $\{s|M_s=0\}=\{s|X_s=0\}$.

Voici un dernier résultat qui complète ceux de [7]. Rappelons que si

$(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus réel, on appelle filtration naturelle de Y la plus petite filtration, continue à droite et P-complète, contenant la filtration $\underline{\underline{F}}_t^o = \sigma\{Y_s, s \leq t\}$. On peut maintenant énoncer

PROPOSITION. Soit X une semi-martingale de la classe (Σ_+^0), admettant la représentation X=S-M donnée par iii). Alors M est adaptée à la filtration naturelle de X.

Démonstration : Nous avons vu dans la démonstration précédente que

$$S=V = \int_0^{\cdot} 1_{\{X_s=0\}} dX_s \qquad (\text{ formule (b) }).$$

Or X est une semi-martingale par rapport à sa filtration naturelle, d'après un théorème général de Stricker, et l'intégrale stochastique est la même pour les deux filtrations. Donc S est adapté à la filtration naturelle de X, et il en est de même pour M=S-X.

REMARQUES. a) Inversement, il est évident que S est adapté à la filtration naturelle de M, et il en est de même pour X=S-M.

b) Du fait que M est une martingale locale continue, adaptée à la filtration naturelle de X, il est facile de déduire que M est une martingale locale par rapport à la filtration naturelle de X (la continuité joue ici un rôle essentiel). Donc X admet la même décomposition canonique

$$X = S-M = V+N \qquad (V=S,\ N=-M)$$

par rapport à la filtration de départ et par rapport à sa filtration naturelle (en particulier, X appartient aussi à la classe (Σ_+^0) par rapport à sa filtration naturelle).

REFERENCES

La référence TL désigne : Temps Locaux, Astérisque n°52-53, Soc. Math. France, 1978.

[1] J. Azéma : Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée. Z.f.W. 45, 1978, p. 191-212.

[2] J. Azéma et M. Yor : En guise d'introduction. TL, p. 3-16.

[3] J. Azéma et M. Yor : Une solution simple au problème de Skorokhod. A paraître, Sem. Prob. XIII, Lect. Notes in M., Springer 1979.

[4] M. Barlow : Study of a filtration expanded to include an honest time. Z.f.W. 44, 1978, p. 307-324.

[5] C. Dellacherie : Supports optionnel et prévisible d'une P-mesure et applications. Sém. Prob. XII, Lect. Notes in M. 649, Springer 1978.

[6] N. El Karoui et M. Maurel : Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$. TL, p. 117-144.

[7] M. Maurel et M. Yor : Les filtrations de $|X|$ et de X^+, lorsque X est une semi-martingale continue. TL, p. 193-196.

[8] P.A. Meyer : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob. X, Lect. Notes in M. 511, Springer 1976.

[9] C. Stricker et M. Yor : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Z.f.W. 45, 1978, p. 109-134.

[10] Ch. Yoeurp : compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales. TL, p. 197-218.

[11] M. Yor : Remarques sur les normes H^p de (semi-)martingales. C.R. A.S. Paris, 287, 1978, p. 461-464.

[12] M. Yor : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. TL, p. 23-36.

[13] M. Yor : Convergence de martingales dans L^1 et dans H^1. C.R.A.S. Paris, 286, 1978, p. 571-573.

[14] E. Lenglart : Relation de domination entre deux processus. Ann. Inst. Henri Poincaré, 13, 1977, p. 171-172.

[15] P. W. Millar : Germ σ-fields and the natural state space of a Markov process. Z. für W-th. 39, 1977, p. 85-101

Note sur les épreuves : le théorème 1 sous sa forme générale est établi indépendamment dans un article de Nicole El Karoui, plus haut dans ce même volume.