

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

## Démonstration simple d'un résultat sur le temps local

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 13 (1979), p. 441-442

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1979\\_\\_13\\_\\_441\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__441_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DEMONSTRATION SIMPLE D'UN RESULTAT SUR LE TEMPS LOCAL

par CHOU Ching-Sung

Dans le cours de P.A. Meyer sur les intégrales stochastiques ([1], p. 365 ), on démontre : si  $X$  est une semimartingale, la somme

$$(1) \quad \sum_{0 \leq s \leq t} I_{\{X_{s-} \leq 0\}} X_s^+ + I_{\{X_{s-} > 0\}} X_s^-$$

est p.s. finie pour  $t$  fini. Ce résultat avait aussi été démontré par P. Millar [2] pour les processus à accroissements indépendants. P.A. Meyer a posé le problème d'arriver à comprendre pourquoi cette somme est finie, et C. Stricker a suggéré une relation avec les nombres de montées et descentes de Doob. En suivant cette idée nous allons arriver ici à une démonstration très facile à comprendre.

D'abord, d'après C. Stricker [3], nous pouvons changer de loi pour nous ramener au cas où  $X = X_0 + M + A$ , où  $X_0 \in L^1$ ,  $M$  est une martingale de carré intégrable sur  $[0, t]$ ,  $A$  un processus à variation intégrable sur  $[0, t]$ . Puis en remplaçant  $X$  par le processus arrêté  $X^t$ , nous pouvons supposer que cette décomposition existe sur  $[0, \infty]$ . Il est très facile de vérifier que toutes les intégrales stochastiques  $\int_0^\infty \varphi_s dX_s$ , où  $\varphi$  est prévisible et  $0 \leq \varphi \leq 1$ , sont bornées dans  $L^1$  par un même nombre  $m$ .

Soit  $a > 0$ . Considérons les temps d'arrêt  $T_0^a = 0$ , puis

$$\begin{aligned} T_1^a &= \inf\{t > T_0^a : X_t \leq \frac{a}{2}\} \quad , \quad T_2^a = \inf\{t > T_1^a : X_t \geq a\} \\ T_3^a &= \inf\{t > T_2^a : X_t \leq \frac{a}{2}\} \quad , \quad T_4^a = \inf\{t > T_3^a : X_t \geq a\} \quad , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

La somme  $(X_{T_2^a} - X_{T_1^a}) + (X_{T_4^a} - X_{T_3^a}) + \dots$  est une intégrale  $\int_0^\infty \varphi_s dX_s$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$ , donc elle est intégrable, et son espérance est majorée par  $m$ . D'autre part, tous les termes de cette somme ( qui n'a qu'un nombre fini de termes  $\neq 0$  ) sont positifs, sauf peut être le dernier terme non nul, majoré par  $2X^*$  en valeur absolue. On en déduit que  $E[U^a] \leq m + 2E[X^*]$ , avec

$$U^a = |X_{T_2^a} - X_{T_1^a}| + |X_{T_4^a} - X_{T_3^a}| + \dots$$

Posons aussi

$$V^a = \sum_{0 \leq s} I_{\{X_{s-} \leq 0, X_s \geq a\}} X_s$$

Si  $s > 0$  est tel que  $X_{s-} \leq 0$ ,  $X_s \geq a$ , soit  $2k$  le dernier entier pair tel que  $T_{2k}^a < s$ . La condition  $X_{s-} \leq 0$  entraîne  $T_{2k+1}^a < s$ , et comme  $T_{2k+2}^a \geq s$ ,  $X_s \geq a$  on a  $T_{2k+2}^a = s$ . Donc  $V^a \leq U^a$  et

$$E[V^a] \leq m + 2E[X^*] \text{ indépendamment de } a$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre  $a$  vers 0, pour trouver que la somme (1) est intégrable.

Dans le travail de N. El Karoui Sur les montées des semi-martingales, le cas discontinu ( Temps locaux, Astérisque n°52-53, S.M.F. 1978 ), la théorie du temps local est reliée aux nombres de montées. Le seul résultat de la théorie du temps local utilisé est le suivant : si  $J$  est un ensemble optionnel tel que  $\{s : s \in J, X_{s-} = 0\}$  soit à coupes dénombrables, alors  $\int_0^t 1_J(s) 1_{\{X_{s-} = 0\}} dX_s$  est à variation finie. Il suffit de démontrer pour cela que :

Proposition . Si  $X$  est une semi-martingale, de décomposition  $X=M+A$ , alors  $\int_0^t 1_{\{X_{s-} = 0\}} dM_s^d$  est un processus à variation finie.

M. Stricker nous a signalé que cette proposition se déduit facilement de ce qui précède.

Démonstration. Soit  $(N_t)$  la martingale locale purement discontinue

$$N_t = \int_0^t 1_{\{X_{s-} = 0\}} dM_s^d . \text{ Nous avons}$$

$$\Delta N_t = 1_{\{X_{t-} = 0\}} \Delta M_t = 1_{\{X_{t-} = 0\}} [\Delta X_t - \Delta A_t]$$

Comme  $\sum_{t \leq u} 1_{\{X_{t-} = 0\}} |\Delta X_t| < \infty$  pour  $u$  fini, on a le même résultat pour  $\sum_{t \leq u} |\Delta N_t|$ . D'après un théorème de Yoeurp ( Séminaire X, p. 440, lemme 1.5), cela entraîne que  $N$  est à variation finie.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.A. Meyer . Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob. X, Lecture Notes in M. 511, Springer 1976.
- [2] P.W. Millar . Stochastic integrals and processes with stationary independent increments. Proc. 6-th Berkeley Symp., Vol. III, p. 307-332 ( 1972 ).
- [3] C. Stricker . Quasimartingales, martingales locales, semi-martingales et filtration naturelle. ZfW 39, 1977, p. 55-64.

Mathematics Department  
National Central University  
Chung-Li , Taiwan