Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Marc Yor

Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^n$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 427-440

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__427_0>

LES FILTRATIONS DE CERTAINES MARTINGALES
DU MOUVEMENT BROWNIEN DANS $\mathbb{R}^n$

Marc YOR (*)

INTRODUCTION :

Si X est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, issu de l'origine, et A une matrice $n \times n$, à coefficients réels, on étudie la filtration $\mathcal{M}^A$ de la martingale $M^A = \int_0^{\cdot} (AX_s , dX_s)$.

On obtient principalement les résultats suivants :

- Si A est symétrique, $\mathcal{M}^A$ est la filtration d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, issu de 0, où k est le nombre de valeurs propres distinctes et non nulles de A.
- Les seules matrices A pour lesquelles toute martingale relative à $\mathcal{M}^A$ puisse se représenter comme intégrale stochastique par rapport à M^A sont les matrices $A = c\tilde{R}I_r R$, où R est une matrice orthogonale, c une constante, et I_r la matrice $n \times n$, diagonale, dont les r premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, et les $(n-r)$ autres égaux à 0.

(*) Membre du Laboratoire associé au C.N.R.S, n° 224
"Processus Stochastiques et Applications".
Tour 56, 4, Place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05.

1. PRELIMINAIRES.

1.1 Notations et remarques :

- (Ω,F,P) est un espace de probabilité complet, muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles. Toute sous-filtration $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :
toute filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ telle que, pour tout t, $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ (ce que l'on note aussi $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$), utilisée dans la suite, vérifie également les conditions habituelles.

- Soit $Z : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^p$ un processus. On note $\mathcal{F}(Z)$ la filtration naturelle de Z, c'est-à-dire :
$(\mathcal{F}^o_t(Z) = \sigma\{Z_s \, , \, s \leq t\} \, , \, t \geq 0)$ rendue (F,P) complète et continue à droite.

- Si Z et Z' sont deux tels processus, respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, on dit que :

  - Z domine Z' (ou : Z' est dominé par Z) si $\mathcal{F}(Z') \subseteq \mathcal{F}(Z)$

  - Z équivaut à Z' (ou : Z et Z' sont équivalents)

  si : $\mathcal{F}(Z') = \mathcal{F}(Z)$.

- Dans tout l'article, X est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, vérifiant $X_o = 0$, et dont les composantes sont notées X^i $(1 \leq i \leq n)$[1].

---

(1) Soulignons l'importance qu'il y a -en particulier dans cet article- à distinguer un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de n mouvements browniens réels $(X^i)_{1 \leq i \leq n}$, qui ne sont pas -en général-indépendants.

On note $\mathbb{M}_n$ l'ensemble des matrices réelles $n \times n$. L'objet de l'article est l'étude de la filtration $\mathcal{M}^A = \mathcal{G}(M^A)$, où

$M^A = \int_0^{\cdot} (AX_s , dX_s)$, $A \in \mathbb{M}_n$, et $(\, , \,)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Nous énonçons maintenant deux lemmes de domination, particulièrement importants dans la suite.

Lemme 1 : Pour toute matrice $\Gamma \in \mathbb{M}_n$, les processus $(\Gamma X,X)$ et $M^{\Gamma+\tilde{\Gamma}}$ sont équivalents. En particulier, si Γ est symétrique, $(\Gamma X,X)$ équivaut à M^{Γ}.

Démonstration :

C'est une conséquence de l'identité :

$$(\Gamma X_t,X_t) = \int_0^t ((\Gamma+\tilde{\Gamma}) X_s, dX_s) + \operatorname{trace}(\Gamma)t,$$

obtenue à l'aide de la formule d'Ito.

Lemme 2 : Si M et N sont deux martingales continues telles que M domine N, alors M domine également $\langle M,N\rangle$.

Démonstration :

Ce résultat découle immédiatement de l'approximation, en probabilité, pour tout t, de $\langle M,N\rangle_t$, par des expressions de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) (N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \quad (0 \le t_i \le t).$$

1.2 La filtration du processus de Bessel d'ordre n.

Théorème 1 :

Soit X mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, issu de l'origine.

1) Si $n=1$, $|X|$ équivaut au mouvement brownien

$$X' = \int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s .$$

2) <u>Si</u> $n > 1$, $|X| = (\Sigma(X^i)^2)^{1/2}$ <u>équivaut au mouvement brownien réel</u>

$$B = \int_0^{\cdot} |X_s|^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_s^i \, dX_s^i \right)$$

<u>Remarques</u> :

1) Pour tout n, et tout $t \leq +\infty$, on a :

$\mathcal{F}_t(|X|) \subsetneq \mathcal{F}_t(X)$.

2) En [3] (proposition 14), les résultats du théorème 1 ont été obtenus pour X mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, vérifiant $P(X_0 = x) = 1$, où $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Toutefois, la démonstration faite pour 1) est toujours valable lorsque $x = 0$; elle a été faite indépendamment par D. Lane [1].

<u>Démonstration (1) du théorème 1</u> :

D'après la seconde remarque, il suffirait de prouver 2). Cependant, la méthode utilisée ici est valable pour $n \geq 1$. Notons $\rho = |X|^2$.

D'après la formule d'Ito, on a, pour tout t : $\rho_t = 2 \int_0^t \rho_s \, dB_s + nt$ (on note encore B pour X' si $n = 1$).

On en déduit, tout d'abord, que ρ domine B, car ce dernier processus peut s'écrire : $B_t = \int_0^t \frac{1}{2\rho_s} d(\rho_s - ns)$.

Inversement, d'après T. Yamada [2], ρ est <u>la</u> solution de l'équation en H : $H_t = 2 \int_0^t f(H_s) \, dB_s + nt$, où $f(x) = \sqrt{|x|}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même, höldérienne d'ordre $1/2$; il s'ensuit, toujours d'après [2], que ρ est adapté à la filtration $\mathcal{F}(B)$.

---

(1) Cette démonstration est dûe à T. Jeulin, que je remercie vivement de m'avoir autorisé à la publier ici.

Du lemme 1, on déduit la conséquence suivante du théorème 1 :

Corollaire :

On utilise les notations du théorème 1.

La martingale $M^I = \int_0^{\cdot} \sum_{i=1}^{n} X_s^i \, dX_s^i$ équivaut à X' si n=1 et à B si $n > 1$.

2. Etude de la filtration $\mathcal{M}^A$, pour A matrice symétrique.

Remarquons tout d'abord que si A, $A' \in \mathbb{M}_n$ sont liées par la relation $A' = \tilde{R}AR$, où $R \in \mathbb{M}_n$ est une matrice orthogonale, les martingales

$$M^A = \int_0^{\cdot} (AX_s \, , \, dX_s) \quad \text{et} \quad M^{A'} = \int_0^{\cdot} (A'X_s \, , \, dX_s)$$

ont même loi ; en effet, on a aussi :

$M^{A'} = \int_0^{\cdot} (AX'_s \, , \, dX'_s)$, où $X' = RX$ est également un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\mathcal{M}^A$ et $\mathcal{M}^{A'}$ ont même structure.

On peut maintenant énoncer le :

Théorème 2 :

Si $A (\in \mathbb{M}_n)$ est symétrique, $\mathcal{M}^A$ est la filtration d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, issu de 0, où k est le nombre de valeurs propres distinctes et non nulles de A.

Démonstration :

– Montrons tout d'abord que M^A domine (A^pX,X), pour tout $p \geq 1$. D'après le lemme 2, M^A domine $\langle M^A, M^A \rangle$ et donc $\frac{d \langle M^A, M^A \rangle}{dt} = (A^2X,X)$.

D'autre part, d'après le lemme 1, (A^2X,X) équivaut à M^{A^2}.

D'après le lemme 2, M^A domine donc $\frac{d \langle M^A, M^{A^2} \rangle}{dt} = (A^3X,X)$, et

$\frac{d \langle M^{A^2}, M^{A^2} \rangle}{dt} = (A^4X,X)$.

Lorsque l'on itère ce procédé, il apparaît que M^A domine (A^pX,X), pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

- D'après la remarque débutant le paragraphe 2, on peut supposer A identique à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

De plus, on peut supposer que les p_1 premiers termes λ_i sont égaux (à $\mu_1 \neq 0$), les p_2 suivants égaux (à $\mu_2 \neq 0$) et ainsi de suite jusqu'à k, avec $p_1 + \ldots + p_k = r$, $p_i \in \mathbb{N}^*$, les réels μ_i étant deux à deux distincts, et enfin que les (n-r) derniers termes diagonaux sont nuls.

Notons $Z_1 = \sum_{i=1}^{p_1} (X^i)^2$, et plus généralement :

$$Z_\ell = \sum_{p_1 + \ldots + p_{\ell-1} + 1}^{p_1 + \ldots + p_\ell} (X^i)^2 \qquad (1 \leq \ell \leq k)$$

A l'aide de ces notations, on peut écrire, pour tout $p \geq 1$:

$$(A^pX,X) = \sum_{\ell=1}^{k} \mu_\ell^p \, Z_\ell$$

Les réels μ_ℓ $(1 \leq \ell \leq k)$ étant 2 à 2 distincts et non nuls, le

déterminant $\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_k \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_k^2 \\ \vdots & & & \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \ldots & \mu_k^k \end{vmatrix}$ n'est pas nul, car il est égal au produit de $\prod_{\ell=1}^{k} \mu_\ell$ par le déterminant de Van der Monde de paramètres $(\mu_1, \dots, \mu_k)$. Donc, les processus Z_ℓ $(1 \leq \ell \leq k)$ sont dominés par M^A, et inversement, M^A, qui équivaut à $(AX,X) = \sum_{\ell=1}^{k} \mu_\ell Z_\ell$, est dominé par le processus $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$.

D'après le théorème 1, chaque processus Z_ℓ équivaut à un mouvement brownien réel, issu de 0, X'_ℓ. Les processus Z_ℓ étant indépendants, les mouvements browniens X'_ℓ le sont aussi, et finalement $X' = (X'_1, \dots, X'_k)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, équivalent à M^A.

Corollaire 1 :

$\mathcal{F}(X^1 X^2)$ est la filtration d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0. Plus précisément, si l'on note Y le mouvement brownien de composantes :

$Y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^1 + X^2)$ et $Y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^1 - X^2)$, la filtration $\mathcal{F}(X^1 X^2)$ est celle du mouvement brownien $Y' = (Y'^1, Y'^2)$, où :

$$Y'^1 = \int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(Y_s^1)\, dY_s^1 \quad \text{et} \quad Y'^2 = \int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(Y_s^2)\, dY_s^2.$$

Démonstration :

D'après la formule d'Ito, $X^1 X^2 = M^A$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice se diagonalise sous la forme $A = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R$,

avec $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Remarquons que $Y = RX$, et $M^A = \int_0^{\cdot} Y^1\, dY^1 - Y^2\, dY^2$.

D'après la démonstration du théorème 2, M^A équivaut au processus $((Y^1)^2, (Y^2)^2)$, lui-même équivalent à Y' (théorème 1).

Corollaire 2 : (1)

Si $A \in \mathbb{M}_n$, $A \neq 0$, la filtration $\mathcal{M}^A$ est celle de $(k+1)$ mouvements browniens réels $(Y^i)_{1 \leq i \leq k+1}$, issus de 0, où :

- k est le nombre de valeurs propres distinctes et non nulles de $B = \tilde{A}A$.
- Dans le cas général, $(Y^1 ,-, Y^k)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, équivalent à (BX,X).
- Dans le cas où $\tilde{A}A^2 = 0$, $(Y^1 ,-, Y^{k+1})$ est le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

Remarque :

Dans le dernier cas, on montre aisément que la dimension de l'image de B , et donc k , sont inférieurs ou égaux à la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Démonstration :

Quitte à effectuer un changement de base orthogonale, on peut supposer dans toute la démonstration, que B est une matrice diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

,où pour tout i, $1 \leq i \leq r$ $(r \leq n)$, on a $\lambda_i \neq 0$.

Remarquons que le processus $|AX_s|^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (X_s^i)^2$ s'annule au plus, $dP(\omega)$ p.s, sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle : en effet, les coefficients λ_i sont strictement positifs, et un mouvement brownien réel ne s'annule, $dP(\omega)$ p.s, que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. La martingale locale $\int_0^t \frac{(AX_s, dX_s)}{|AX_s|}$ est donc bien définie, et a pour processus croissant t : c'est donc un mouvement brownien réel, que l'on note Y^{k+1}.

(1) Comme on l'a signalé en 1.1, la distinction entre un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et p mouvements browniens réels est essentielle.

D'après le théorème 2, le processus $|AX|^2 = (BX,X)$ est équivalent à un mouvement brownien $(Y^1 ,-, Y^k)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, où k est défini dans l'énoncé.

Comme $|AX|$ est dominé par M^A, et que inversement, $M^A = \int_0^\cdot |AX_s| dY_s^{k+1}$, on en déduit le résultat pour le cas général.

Dans le cas où $\tilde{A}A^2 = 0$, l'image de la matrice A est donc contenue dans $\mathrm{Ker}(B)$, et on a :

$$Y^{k+1} = \sum_{i=r+1}^{n} \int_0^\cdot \frac{(AX)_s^i \, dX_s^i}{|AX_s|}$$

Par ailleurs, d'après les théorèmes 1 et 2, tout mouvement brownien $(Y^1 ,-, Y^k)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, équivalent à $|AX|$, est une intégrale stochastique matricielle par rapport à $(X^1 ,-, X^r)$.

On en déduit que deux quelconques des mouvements browniens réels Y^i $(1\leq i\leq k+1)$ sont orthogonaux, en tant que martingales, et donc que $(Y^1 ,-, Y^{k+1})$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$ ∎

3. Les martingales M^A qui ont la propriété de représentation prévisible.

3.1 Une définition et un contre-exemple :

Rappelons que, si N est une $(\mathcal{F},P)$ martingale locale continue (réelle), c'est aussi une $(\mathcal{F}(N),P)$ martingale locale continue : en effet, les $\mathcal{F}(N)$ -temps d'arrêt $T_n = \inf \{t \,/\, |N_t| \geq n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ réduisent N. On peut alors poser la :

Définition :

On dit que N a la propriété de représentation prévisible si toute $(\mathcal{F}(N),P)$ martingale réelle bornée L peut s'écrire :

$L = c + \int_0^\cdot \phi_s \, dN_s$, où $c \in \mathbb{R}$, et ϕ est un processus $\mathcal{F}(N)$-prévisible, convenablement intégrable.

Remarques :

1) Il est équivalent, dans la définition, de remplacer "martingale bornée" par "martingale locale". (cf. [4], théorème 2).

2) En [1], D. Lane a étudié, dans le cas $n = 1$, la propriété de représentation prévisible pour les martingales $M^f = \int_0^{\cdot} f(X_s)\, dX_s$, où f varie dans une classe importante de fonctions réelles continues.

En relation avec la définition, rappelons brièvement que :

- d'après un célèbre théorème d'Ito, le mouvement Brownien réel possède la propriété de représentation prévisible.
- plus généralement, il y a identité entre les martingales locales (continues ou non) qui ont la propriété de représentation prévisible, et celles dont la loi est extrémale dans l'ensemble des lois de toutes les martingales locales (voir par exemple [4], théorème 1).

En 1975, H. Kunita m'a indiqué comme exemple de martingale n'ayant pas la propriété de représentation prévisible (1), celui de :

$Z = \int_0^{\cdot} X^1\, dX^2.$

En effet, d'après le lemme 2, Z domine $(X^1)^2$, qui équivaut, d'après le lemme 1, à : $\int_0^{\cdot} X^1\, dX^1.$

Or, cette martingale est orthogonale à Z, qui ne saurait donc avoir la propriété de représentation prévisible.

Le théorème 2 permet en fait de dégager complètement la structure de $\mathfrak{H}(Z)$.

Dans ce but, remarquons que : a) $Z = M^A$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = 0$.

---

(1) Cet exemple semble maintenant faire partie du folklore de l'étude des martingales continues. A. Shyriaev a cité le même exemple à J. Jacod, et D. Lane m'a signalé avoir construit un exemple très voisin avec S. Orey.

En conséquence, d'après le corollaire 2 du théorème 2, Z équivaut à un mouvement brownien Y, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et on déduit aisément de la démonstration de ce corollaire que l'on peut prendre pour Y le processus de composantes :

$$Y^1 = \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}(X_s^1)\, dX_s^1 \ , \text{ et } \ Y^2 = \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}(X_s^1)\, dX_s^2 .$$

3.2 <u>Caractérisation des martingales M^A qui ont la propriété de représentation prévisible.</u>

<u>Théorème 3</u> :

<u>Les matrices</u> $A \in \mathbb{M}_n$ <u>telles que</u> $M^A = \int_0^{\cdot} (AX_s \ , dX_s)$ <u>ait la propriété de représentation prévisible sont les matrices</u> $A = c\tilde{R} I_r R$, <u>où</u> $c \in \mathbb{R}$, $R \in \mathbb{M}_n$ <u>est une matrice orthogonale,</u> I_r <u>est la matrice diagonale, dont les</u> r $(1 \leq r \leq n)$ <u>premiers éléments diagonaux sont égaux à</u> 1 , <u>et les</u> $(n-r)$ <u>autres égaux à</u> 0.

<u>Démonstration</u> :

- Le cas A=0 (qui correspond dans l'énoncé à c=0) est trivial, et on suppose dans la suite $A \neq 0$.

- Soit $A \in \mathbb{M}_n$. D'après le lemme 2, le processus $\dfrac{d\langle M^A, M^A\rangle}{dt} = (BX,X)$,

  où $B = \tilde{A}A$, est dominé par M^A. Il en est donc de même de la martingale $M^B = \int_0^{\cdot} (BX_s \ , dX_s)$, d'après le lemme 1.

  Ainsi, si M^A a la propriété de représentation prévisible, il existe un processus ϕ , $\mathcal{M}^A$ prévisible, tel que :

(1) $$M^B = \int_0^{\cdot} \phi(s)\, dM_s^A$$

Remarquons que, comme pour tout t, $E\left((M_t^B)^2\right) < \infty$, on a :

$$\forall t,\ E\int_0^t \phi^2(s)\ (AX_s \ , AX_s)ds < \infty$$

De (1) , on déduit, en identifiant les intégrands par rapport à dX :

$$BX_s = \phi(s)\, AX_s \ , \ dP\ ds \text{ ps.}$$

Il existe donc s, réel strictement positif, tel que :

$$E\left(\phi^2(s)\ (AX_s\ ,\ AX_s)\right) < \infty$$

et

$$BX_s = \phi(s)\, AX_s \quad P \text{ ps.}$$

On peut donc prendre l'espérance conditionnelle par rapport à X_s des deux membres de la dernière égalité :
il existe alors une fonction borélienne $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
telle que $BX_s = \psi(X_s)\, AX_s \quad P$ ps.

et donc :

$$(2) \qquad Bx = \psi(x)\, Ax\ ,\ dx \text{ ps.}$$

On définit la fonction $\psi_o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, suivante :

si $x \in (\text{Ker } A)$, $\psi_o(x) = 0$

si $x \notin (\text{Ker } A)$, $\psi_o(x) = \dfrac{(Bx,Ax)}{|Ax|^2}$.

On a donc, d'après (2), $Bx = \psi_o(x)\, Ax$ dx ps, sur $\complement(\text{Ker } A)$.
Or, $\complement(\text{Ker } A)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et sur cet ouvert, les fonctions $x \longrightarrow Bx$ et $x \longrightarrow \psi_o(x)\, Ax$ sont continues.
L'égalité .(3) $Bx = \psi_o(x)\, Ax$ a donc lieu partout sur $\complement(\text{Ker } A)$, et donc sur tout $\mathbb{R}^n$ (sur Ker A, les deux membres sont nuls).
$B = \tilde{A}A$ est symétrique, et donc diagonalisable dans une base orthogonale (pour $\mathbb{R}^n$) de vecteurs propres $(e_i)_{i \leq n}$ (avec la matrice de passage orthogonale R).

D'après (3), si la valeur propre λ_i (pour B) correspondant à e_i n'est pas 0, on a :

(4) $$\lambda_i e_i = \psi_o(e_i) A e_i \neq 0,$$

donc e_i est un vecteur propre de A.

Si $Be_i = 0$, on a alors $(\tilde{A}Ae_i, e_i) = 0$, et donc $|Ae_i| = 0$, c'est-à-dire $Ae_i = 0$.

A admet donc pour vecteurs propres, la même base (e_i) (orthogonale) de vecteurs propres que B : elle est donc symétrique.

D'après le théorème 2, et le théorème classique d'Ito sur la représentation des martingales d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, toute $\mathcal{M}^A$-martingale se représente donc comme la somme d'intégrales stochastiques par rapport à k mouvements browniens réels indépendants. Pour que toute martingale puisse se représenter comme intégrale stochastique par rapport à <u>une</u> martingale fondamentale (à savoir, M^A, sous notre hypothèse), il est nécessaire que $k = 1$, c'est-à-dire (théorème 2) que toutes les valeurs propres non nulles de A soient égales ; on en déduit que A peut s'écrire sous la forme annoncée.

Inversement, si A s'écrit sous cette forme, on peut supposer, d'après la remarque débutant le paragraphe 2, que $A = I_r$.

Autrement dit, quitte à prendre $n = r$, il s'agit de montrer que $M^I = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\cdot} X_s^i \, dX_s^i$ a la propriété de représentation prévisible.

Or, d'après le corollaire du théorème 1, M^I équivaut à un mouvement brownien réel γ (qui a la propriété de représentation prévisible), et les processus $\langle M^I, M^I\rangle_t$ et $\langle \gamma, \gamma\rangle_t (= t)$ sont équivalents (au sens des mesures positives sur la tribu prévisible associée à $\mathcal{F}(M^I)$!) : il est alors immédiat que M^I a la propriété de représentation prévisible.

Concluons ce travail par l'énoncé d'une conjecture : le théorème 2, et l'étude individuelle de filtrations $\mathcal{M}^A$ associées à certaines réduites de Jordan $A \in \mathbb{M}_n$, semblent indiquer que, pour toute $A \in \mathbb{M}_n$, M^A équivaut à un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ $(k = ?)$ issu de 0.

RÉFÉRENCES :

(1) D. LANE : "On the fields of some Brownian martingales". Annals of Proba. (à paraître).

(2) T. YAMADA : "Sur une construction des solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas non lipschitzien" Sém. Probas XII. Lect. Notes in Maths 649, Springer (1978).

(3) M. YOR : "Sur les théories du filtrage et de la prédiction". Sém. Probas XI. Lect. Notes in Maths. 581, Springer (1977).

(4) M. YOR : "Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques". Sém. Probas XI. Lect. Notes in Math. 581, Springer (1977).