SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 407-426

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__407_0>

EN CHERCHANT UNE DÉFINITION NATURELLE DES INTÉGRALES STOCHASTIQUES OPTIONNELLES

Marc YOR

Introduction :

On obtient, au paragraphe 1, une variante de l'inégalité de Fefferman. On utilise cette inégalité pour associer à tout processus optionnel (mince) H, tel que le processus croissant $(\sum_{s\leq\cdot} H_s^2)^{1/2}$ soit localement intégrable, une martingale locale ${}^mH$: cette construction contient à la fois le théorème de Chou et Lépingle (cf, Chou [1] et Lépingle [6]), la théorie des intégrales stochastiques optionnelles par rapport à une martingale locale (P.A. Meyer [7], page 343), et une bonne partie de la théorie de l'intégration stochastique par rapport à une mesure aléatoire (voir, par exemple, Jacod [5], et les travaux plus anciens de Skorokhod [9] relatifs aux diffusions, et K. Ito [3] pour les P.A.I.).

Au paragraphe 2, on esquisse une nouvelle définition des intégrales stochastiques optionnelles qui permet d'éliminer les "défauts" de l'intégrale $H\cdot M$ construite par P.A. Meyer en [7] (rappelons que, si M est une martingale locale, si H et K sont deux processus optionnels bornés, on a, en général : $\Delta(H\cdot M) \neq H\Delta M$, et $H\cdot(K\cdot M) \neq (HK)\cdot M)$).

Disons tout de suite que la clé de ces difficultés nous semble être de définir $H\cdot M$ (on notera plutôt le nouvel objet $H*M$) comme <u>semi-martingale</u>, même si M est une martingale locale.

Les "défauts" précédents disparaissent alors, mais il y a un revers à la médaille : il faut se restreindre à certaines sous-classes de processus optionnels (voir la définition 2.1 pour plus de précision).

0. Notations :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. On emploie souvent l'abréviation "t.a" pour : $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt.

$\mathcal{O}$ (resp : $\mathcal{P}$) désigne la tribu optionnelle (resp : prévisible) sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

$\mathcal{S}$ (resp : $\mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{V}$) désigne l'espace des semi-martingales,

resp :
- des martingales locales.
- des processus adaptés à variation bornée.
- des processus prévisibles à variation bornée.

Si Z est un processus mesurable borné, on note ${}^oZ$ (resp : $\tilde{Z}$) sa projection optionnelle (resp : prévisible). On conservera la notation $\tilde{Z}$ pour l'extension de la projection prévisible faite en 1.2.

1. Une remarque sur l'inégalité de Fefferman et quelques conséquences :

1.1. Adoptons un point pédagogique : supposons que, connaissant la théorie des intégrales stochastiques par rapport à une martingale continue, le lecteur, ignorant de la théorie "discontinue", cherche à construire les intégrales stochastiques optionnelles.

Si $M \in \mathcal{L}$, et $H \in b(\mathcal{O})$, l'intégrale $H \cdot M$, à définir, devra vérifier, par linéarité :

$$H \cdot M = H\, 1_{(\Delta M \neq 0)} \cdot M + H\, 1_{(\Delta M = 0)} \cdot M$$

$$= (H\, 1_{\Delta M \neq 0}) \cdot M^d + H \cdot M^c$$

(au moins par analogie avec les intégrales de Stieltjes !)

L'intégrale $H \cdot M^c = (\tilde{H}) \cdot M^c$ étant définie, il ne reste plus qu'à construire l'intégrale stochastique de processus optionnels minces (ici : $H\, 1_{\Delta M \neq 0}$) par rapport à une martingale somme compensée de sauts.

En fait, l'idée conductrice - pour la suite - est de considérer globalement le processus $H\, \Delta M$, plutôt que $H\, 1_{(\Delta M \neq 0)}$ et la martingale M^d.

A ce propos, signalons que "l'esprit" du paragraphe 1 est très voisin de celui de l'article de Jacod (5), mais les méthodes employées dans ces deux articles sont très différentes.

.2. Soit Z un processus optionnel tel que le processus croissant $\Sigma_t = (\sum_{s \leq t} Z_s^2)^{1/2}$ soit localement intégrable.

D'après la proposition 2 de l'article de Chou (1), il existe une suite de t.a prévisibles T_n, croissant P ps vers + ∞, tels que $E\left[\Sigma_{T_n}\right] < \infty$. Pour tout n, et tout t.a T, on a alors :

$$E\left[|Z_{T \wedge T_n}|\right] < \infty.$$

Les t.a T_n étant prévisibles, il suffit, pour définir la projection prévisible $\tilde{Z}$ de Z, de définir celles des Z^{T_n}, pour tout n (et celles-ci se recolleront bien).

Or, pour n fixé, si $Z' = Z^{T_n}$, il existe un processus prévisible $(\tilde{Z}')$, unique à une indistinguabilité près, tel que :

pour tout t.a prévisible S, $E\left[Z'_S \mid \mathcal{F}_{S-}\right] = \tilde{Z}'_S$ P p.s sur $(S < \infty)$.

$(\tilde{Z}'$ s'obtient par passage à la limite à partir des projections prévisibles des processus $(Z' \wedge n) \vee -n)$.

Enfin, on montre aisément que le processus $Z - \tilde{Z}$ est mince.

1.3. Soit Z un processus optionnel mince.

Utilisant toujours le processus Σ, on note, pour tout $p \in [1,\infty]$: $||Z||_{\Lambda^p} = ||\Sigma_\infty||_{L^p}$, et $||Z||_{\Lambda^*} = \left\| \underset{T}{\text{ess sup}} \, \{E(\Sigma_\infty^2 - \Sigma_{T-}^2 \,|\, \mathcal{F}_T)\}^{1/2}_{\text{t.a}} \right\|_{L^\infty}$,

puis on définit les espaces :

$\Lambda^p = \{Z$ processus optionnel/ $||Z||_{\Lambda^p} < \infty\}$ $(1 \leq p \leq \infty)$

et $\Lambda^* = \{Z$ processus optionnel/ $||Z||_{\Lambda^*} < \infty\}$.

Pour $1 \leq p < \infty$, on obtient aisément les résultats suivants :

- si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $Z \in \Lambda^p$, $Z' \in \Lambda^q$, on a :

$$E(\sum_s |Z_s Z'_s|) \leq ||Z||_{\Lambda^p} \, ||Z'||_{\Lambda^q},$$

d'après l'inégalité d'Hölder.

- Λ^p est un espace de Banach.
- si $1 < p < \infty$, le dual de Λ^p est Λ^q et la dualité entre ces espaces s'exprime au moyen de $(Z,Z')_{\Lambda^p \times \Lambda^q} = E(\sum_s Z_s Z'_s)$.

En ce qui concerne les espaces Λ^1 et Λ^*, on a le :

<u>Théorème 1.1.</u> : 1) <u>Pour tous</u> $Z \in \Lambda^1$, et $Z' \in \Lambda^*$, <u>on a</u> :

$$E(\Sigma_s |Z_s Z'_s|) \leq \sqrt{2}\, ||Z||_{\Lambda^1} \, ||Z'||_{\Lambda^*}.$$

2) <u>Le dual de</u> Λ^1 <u>est</u> Λ^*, <u>et la dualité entre ces deux espaces s'exprime au moyen de</u> :

$$(Z,Z')_{\Lambda^1 \times \Lambda^*} = E(\Sigma_s Z_s Z'_s).$$

Démonstration :

1) On suit, pas à pas, la démonstration de l'inégalité de Fefferman donnée par Meyer en [7] (p.337), en faisant les seuls changements suivants :

on note $C_t = \sum_{s \leq t} Z_s^2$, (U_t) le processus égal identiquement à 1, et on remplace $(N,N)_t$ par $\sum_{s \leq t} Z_s'^2$.

2) On s'inspire également de la démonstration donnée par Meyer en [7] (p.339) pour montrer que le dual de H^1 est BMO. Toutefois, ici, le raisonnement se simplifie beaucoup :

- d'après la première partie du théorème, Λ^* s'identifie à un sous-espace de $(\Lambda^1)'$.
- Inversement, soit $\ell \in (\Lambda^1)'$. Alors, $\ell|_{\Lambda^2}$ est continue pour la norme $||\cdot||_{\Lambda^2}$. Λ^2 étant un espace de Hilbert, il existe $V \in \Lambda^2$

tel que : pour tout $Z \in \Lambda^2$, $\ell(Z) = E(\Sigma_s Z_s V_s)$.

Montrons que $V \in \Lambda^*$, c'est à dire qu'il existe une constante γ telle que : $\underset{T \text{ t.a}}{\text{ess sup}}\ E(\sum_{s \geq T} V_s^2 / \mathcal{F}_T) \leq \gamma$, ou, ce qui est équivalent :

pour tout T t.a, $\quad E(\sum_{s \geq T} V_s^2) \leq \gamma\, P(T < \infty)$.

Si l'on note $Z = 1_{[T,\infty[}\, V$, on a :

$$||Z||_{\Lambda^1} \leq ||Z||_{\Lambda^2}\, P(T < \infty)^{1/2}.$$

Or, on a :
$$||Z||^2_{\Lambda^2} = E\left(\sum_s Z_s V_s\right) \leq C\, ||Z||_{\Lambda^1} \text{ , où}$$

C est une constante ne dépendant que de ℓ.

D'où :
$$||Z||^2_{\Lambda^2} \leq C\, ||Z||_{\Lambda^2}\, P(T < \infty)^{1/2}.$$

Si l'on divise par $||Z||_{\Lambda^2}$, on trouve : $||Z||_{\Lambda^2} \leq C\ P(T < \infty)^{1/2}$,

et on peut donc prendre $\gamma = C^2$.

Enfin, l'égalité $\ell(Z) = E(\Sigma_s Z_s V_s)$, valable pour tout $Z \in \Lambda^2$,

se prolonge à tout Λ^1, en vertu du lemme suivant.

Lemme 1.2. : Λ^∞ (et donc $\Lambda^2 \ldots$) est dense dans Λ^1.

Démonstration :

Soit $Z \in \Lambda^1$. Si l'on note ${}_nZ = (Z \wedge n) \vee -n$ $(n \in \mathbb{N})$, alors le processus ${}_nZ$ appartient à Λ^1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite $\{{}_nZ\}$ converge vers Z dans Λ^1.

Pour n fixé, posons $Z' = {}_nZ$. Si l'on note :

$$T_p = \inf\{t \ / \sum_{s \leq t} (Z'_s)^2 \geq p\},$$

pour tout p, $Z'^{(p)} = 1_{[0,T_p]}\ Z'$ appartient à Λ^∞.

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $Z'^{(p)}$ converge vers Z' dans Λ^1, lorsque p tend vers $+\infty$.

Voici une conséquence importante du théorème 1.1. :

Théorème 1.3. :

Soit Z un processus optionnel tel que le processus croissant $\Sigma_t = (\sum_{s \leq t} Z_s^2)^{1/2}$ soit localement intégrable

(Z est donc un processus mince, et on écrit par la suite : $Z \in \Lambda^1_{loc}$).

Il existe alors une martingale locale, et une seule, valant Z_0 en 0, $L \overset{\text{déf}}{=} m_Z$ telle que, pour toute martingale bornée N, le processus $LN - \sum_{s \leq \cdot} Z_s \Delta N_s$ soit une martingale locale.

De plus, il existe des constantes universelles c_p (pour tout p, $1 \leq p < \infty$) et c_* telles que :

(1) $$||^m\mathcal{Z}||_{H^p} \leq c_p\, ||\mathcal{Z}||_{\Lambda^p}, \text{ et } ||^m\mathcal{Z}||_{BMO} \leq c_*\, ||\mathcal{Z}||_{\Lambda^*},$$

où H^p et BMO désignent les espaces usuels de martingales.

Démonstration :

Si $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0\, 1_{[0]}$, on prend $^m\mathcal{Z}$ la martingale locale constante, et égale à $\mathcal{Z}_0$.

Si $\mathcal{Z} \in \Lambda^1_{loc}$, quitte à décomposer ce processus en :

$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0\, 1_{[0]} + \mathcal{Z}\, 1_{]0,\infty[}$, on peut supposer $\mathcal{Z}_0 = 0$, ce que l'on fait dans la suite.

1) Remplaçons à nouveau (comme dans la démonstration du lemme 1.2.) le processus $\mathcal{Z}$ par les processus $_n\mathcal{Z} = (\mathcal{Z} \wedge n) \vee -n$ $(n \in \mathbb{N})$. Pour n fixé, notons $\mathcal{Z}' = {}_n\mathcal{Z}$. Le processus $\sum\limits_{s \leq t} (\mathcal{Z}'_s)^2$ est localement intégrable, et, le processus de ses sauts est majoré, en valeur absolue, par n : par arrêt, on peut donc supposer que $E\left[\sum\limits_s (\mathcal{Z}'_s)^2\right] < \infty$.
L'inégalité de Schwarz implique que, pour toute martingale N, on a :

$$E\left[\sum_s |\mathcal{Z}'_s \Delta N_s|\right]^2 \leq E\left[\sum_s (\mathcal{Z}'_s)^2\right] E\left[\sum_s (\Delta N_s)^2\right].$$

L'espace $\underline{\underline{M}}$ des martingales de carré intégrable est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(M,N) = E\left[M_\infty N_\infty\right] = E\left[[M,N]_\infty\right]$:
il existe donc une martingale $^m(\mathcal{Z}') \in \underline{\underline{M}}$ telle que :

(2) $$\forall N \in \underline{\underline{M}}, \qquad E\left[\sum_s \mathcal{Z}'_s \Delta N_s\right] = E\left[{}^m\mathcal{Z}'_\infty\, N_\infty\right]$$

2) Les martingales localement de carré intégrable $^m({}_n\mathfrak{z})$ ainsi construites par recollement, à partir de 1), revenons à $\mathfrak{z}$ que l'on arrête encore à une suite de t.a, de façon à pouvoir supposer :

$$E\left[\left(\sum_s \mathfrak{z}_s^2\right)^{1/2}\right] < \infty.$$

En faisant varier N parmi une famille de martingales bornées, faiblement denses dans la boule unité de BMO, et en appliquant le théorème 1.1. à $\mathfrak{z}' = \Delta N$, on a, d'après (2), pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|{}^m({}_p\mathfrak{z}) - {}^m({}_q\mathfrak{z})\|_{H^1} \leq C\, E\left[\left\{\sum_s ({}_p\mathfrak{z}_s - {}_q\mathfrak{z}_s)^2\right\}^{1/2}\right],$$

où C est une constante universelle.

La suite $\{{}_p\mathfrak{z}\}_{p \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\mathfrak{z}$ dans Λ^1, la suite $\{{}^m({}_p\mathfrak{z}),\ p \in \mathbb{N}\}$ est de Cauchy dans H^1. On note $^m\mathfrak{z}$ sa limite.

On a alors :

$$(3) \qquad \forall N \in \mathrm{BMO}\ , \quad E\left[[{}^m\mathfrak{z},N]_\infty\right] = E\left[\sum_s \mathfrak{z}_s\ \Delta N_s\right].$$

Remplaçant N par N^T (T t.a), on obtient, par un argument classique, que les processus $[{}^m\mathfrak{z},N] - \sum_{s\leq \cdot} \mathfrak{z}_s \Delta N_s$, et donc $^m\mathfrak{z}N - \sum_{s\leq\cdot} \mathfrak{z}_s\Delta N_s$ sont des martingales locales.

3) L'existence des constantes c_p $(1 \leq p < \infty)$ découle aisément de l'égalité (3), où l'on fait varier N parmi une famille de martingales bornées, denses dans la boule unité de H^q (si $1 \leq p < \infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on faiblement denses dans la boule unité de BMO (si $p = 1$, et l'on applique encore le théorème 1.1.).

4) Soit $\mathfrak{z} \in \Lambda^*$.

D'après le théorème 1.1., l'application $M \longrightarrow E\left[\sum_s (\Delta M_s)\mathfrak{z}_s\right]$ est continue sur H^1. Il existe donc une martingale, que l'on note $\mathfrak{z}^m$, qui appartient à BMO, et telle que :

$$(4) \qquad \forall M \in H^1 , \qquad E\left[[M,\mathfrak{z}^m]_\infty\right] = E\left[\sum_s \Delta M_s \mathfrak{z}_s\right]$$

Comme $E\left[\sum_s \mathfrak{z}_s^2\right] < \infty$, on sait, d'après le théorème 1.2., que ${}^m\mathfrak{z} \in \underline{\underline{M}}$, et que :

$$\forall M \in \underline{\underline{M}} , \qquad E\left[[M,{}^m\mathfrak{z}]_\infty\right] = E\left[\sum_s \Delta M_s \mathfrak{z}_s\right].$$

Finalement, on a donc :

$$\forall M \in \underline{\underline{M}} , \qquad E\left[[M,\mathfrak{z}^m]_\infty\right] = E\left[[M,{}^m\mathfrak{z}]_\infty\right]$$

D'où : ${}^m\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^m \in \text{BMO}$.

On déduit alors de l'égalité (4) l'existence d'une constante universelle c_* telle que : $\qquad ||{}^m\mathfrak{z}||_{\text{BMO}} \leq c_* \, ||\mathfrak{z}||_{\Lambda^*}$.

<u>Remarque</u> : Il découle des parties 3) et 4) de la démonstration du théorème 1.3. que l'égalité :

$$E\left[[{}^m\mathfrak{z},N]_\infty\right] = E(\Sigma_s \, \mathfrak{z}_s \, \Delta N_s)$$

est vérifiée dès que :
- $\mathfrak{z} \in \Lambda^p$ $(1 < p < \infty)$ et $N \in H^q$
- $\mathfrak{z} \in \Lambda^1$ et $N \in \text{BMO}$
- $\mathfrak{z} \in \Lambda^*$ et $N \in H^1$.

Notons maintenant quelques propriétés remarquables de l'application $\mathfrak{z} \longrightarrow {}^m\mathfrak{z}$, définie sur l'espace :

$$\Lambda^1_{loc} = \{\mathfrak{z} \in \mathcal{G} \mid \Sigma = (\sum_{s \leq \cdot} \mathfrak{z}_s^2)^{1/2} \text{ est localement intégrable}\},$$

et à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}$ des martingales locales :

Π.1) si $Z \in \Lambda^1_{loc}$, $^m Z$ est somme compensée de sauts.

Π.2) si $Z \in \Lambda^1_{loc}$, on calcule aisément le processus des sauts de $^m Z$ comme suit :

(σ-1) - si T est un t·a totalement inaccessible ,

$$\Delta(^m Z)_T = Z_T \text{ sur } (T < \infty)$$

(σ-2) - si T est un t·a prévisible, $\Delta(^m Z)_T = Z_T - \tilde{Z}_T$, sur $(0 < T < \infty)$.

Mais, $\tilde{Z}$ étant un processus prévisible mince, on a $\tilde{Z}_T = 0$ pour tout t·a T totalement inaccessible.

Ainsi, on peut écrire : (5) $\Delta(^m Z) = Z - \tilde{Z}$ sur $]0,\infty[$.

Indiquons succintement la démonstration des points (σ-1) et (σ-2) : en vertu de l'inégalité (1) (théorème 1.3., pour $p = 1$), et par convergence dans H^1 , on peut supposer $Z \in \Lambda^2$.

Notons $\underline{\underline{M}}(T)$ l'espace (stable) des martingales de carré intégrable, sommes compensées des sauts, continues hors de $[T]$. On sait que $\underline{\underline{M}}(T)^{\perp}$ est constitué des martingales de carré intégrable qui ne sautent pas en T. Ainsi, si l'on pose $Z^{(T)} = Z_T 1_{(T \leq t)} - A_t$, où A_t est le compensateur prévisible de $Z_T 1_{(T \leq t)}$, lorsque T est totalement inaccessible, resp : $Z^{(T)} = (Z_T - \tilde{Z}_T) 1_{(0<T\leq t)}$ lorsque T est prévisible, tout revient à montrer que $^m Z - Z^{(T)}$ est orthogonale à $\underline{\underline{M}}(T)$, ce qui découle immédiatement de la caractérisation de $^m Z$ (théorème 1.3.).

Les propriétés Π.1) et Π.2) ont, bien sûr, de nombreuses conséquences : en particulier,

- si $Z \in \Lambda^1_{loc}$, et est, de plus, prévisible, alors : $^m Z = Z_0$.
- si $Z \in \Lambda^1_{loc}$, et H est un processus prévisible localement borné, alors : $H Z \in \Lambda^1_{loc}$, et $^m(HZ) = \int_{0-}^{\cdot} H_s \, d\, ^m Z_s$.

Toutefois, la conséquence la plus importante de $\Pi.1)$ et $\Pi.2)$ est, à notre avis, la suivante :

Proposition 1.4. :

Il existe des constantes universelles c'_p $(1 \leq p < \infty)$ et c'_* telles que, pour tout $Z \in \Lambda^1_{loc}$, on ait :

$$\|\tilde{Z}\|_{\Lambda^p} \leq c'_p \|Z\|_{\Lambda^p} \quad ; \quad \|\hat{Z}\|_{\Lambda^*} \leq c'_* \|Z\|_{\Lambda^*}.$$

Remarque :

En (11), D. Lépingle a donné une démonstration de l'existence de c'_1, différente de celle-ci.

Démonstration :

Comme $\tilde{Z}_0 = Z_0$, on peut se ramener au cas où $Z_0 = 0$. D'après (5), on a donc, pour $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned}\|\tilde{Z}\|_{\Lambda^p} &\leq \|\Delta(^m Z)\|_{\Lambda^p} + \|Z\|_{\Lambda^p}\\ &\leq \|^m Z\|_{H^p} + \|Z\|_{\Lambda^p}\\ &\leq (c_p+1)\,\|Z\|_{\Lambda^p}, \text{ d'après les inégalités (1).}\end{aligned}$$

On fait un raisonnement analogue pour Λ^*.

Pour conclure cette section, énonçons encore une conséquence du théorème 1.3.

Proposition 1.5.

Soit H un processus optionnel.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) H est $\mathcal{P}$-approchable, c'est à dire : il existe $H' \in \mathcal{P}$, tel que : $H - H' \in \Lambda^1_{loc}$.

b) il existe une martingale locale N et un processus prévisible P tels que : $H = N + P$.

Démonstration : b) $\Longrightarrow$ a) : prendre $H' = P + N_-$

a) $\Longrightarrow$ b) : on peut évidemment remplacer H par $H-H'$, et supposer ainsi que $H \in \Lambda^1$. D'après la formule (5), on a donc :

$$H = \Delta({}^mH) + \tilde{H}$$
$$= {}^mH + (\tilde{H} - {}^mH_-)$$

On a donc b), avec $N = {}^mH$, et $P = \tilde{H} - {}^mH_-$

Remarque :

On peut remplacer b) par la variante équivalente :

b') il existe une martingale locale N', somme compensée de sauts, et un processus prévisible P' tels que : $H = N' + P'$.

Cette décomposition de H est unique, si l'on suppose $N'_0 = 0$.

1.4. Retournons au début de la section 1.3. : ayant étudié les espaces $\Lambda^p (1 \leq p < \infty)$ et Λ^* de processus optionnels (minces), il est naturel de s'intéresser aux espaces $\tilde{\Lambda}^p (1 \leq p < \infty)$ et $\tilde{\Lambda}^*$ de processus prévisibles (minces) définis comme suit :

$$\tilde{\Lambda}^p = \{z \in \mathcal{P} \mid \quad ||z||_{\tilde{\Lambda}^p} \overset{\text{déf}}{=} ||z||_{\Lambda^p} < \infty\}$$

$$\tilde{\Lambda}^* = \{z \in \mathcal{P} \mid \quad ||z||_{\tilde{\Lambda}^*} = \Big\| \underset{T \ \text{t.a prévisible}}{\text{ess sup}} \ (E\{\sum_{s \geq T} z_s^2 \mid \mathcal{F}_{T-}\})^{1/2} \Big\|_{L^\infty} < \infty\}$$

Il est très aisé d'obtenir la version prévisible des résultats déjà connus pour les espaces $\Lambda^p (1 \leq p < \infty)$ et Λ^* (début de la section 1.3., jusqu'au lemme 1.2. compris).

En particulier, l'inégalité de Fefferman "prévisible" s'énonce : pour tous $z \in \tilde{\Lambda}^1$ et $z' \in \tilde{\Lambda}^*$, on a :

$$E(\sum_s |z_s z'_s|) \leq \sqrt{2} \ ||z||_{\tilde{\Lambda}^1} \ ||z'||_{\tilde{\Lambda}^*}.$$

De plus, $\tilde{\Lambda}^* = \{Z \in \mathcal{P} \mid Z \in \Lambda^*\}$.

Toutefois, si la norme $\tilde{\Lambda}^p$ est, pour tout $p \in [1,\infty[$, la restriction de la norme Λ^p à $\tilde{\Lambda}^p$, il n'en est pas de même des normes $\tilde{\Lambda}^*$ et Λ^*.

Cependant, on a le :

Lemme 1.6. :

Si Z est un processus prévisible, on a :

$$||Z||_{\tilde{\Lambda}^*} \leq ||Z||_{\Lambda^*} \leq \sqrt{2}\ ||Z||_{\tilde{\Lambda}^*}.$$

Démonstration :

L'inégalité $||Z||_{\tilde{\Lambda}^*} \leq ||Z||_{\Lambda^*}$ découle de l'inclusion : $\mathcal{F}_{T-} \subseteq \mathcal{F}_T$, utilisée ici pour T t•a prévisible.

Inversement, pour tout t•a prévisible T, Z_T est $\mathcal{F}_{T-}$ mesurable, et donc : $|Z_T| \leq ||Z||_{\tilde{\Lambda}^*}$. D'après le théorème de section prévisible, on a donc : $|Z| \leq ||Z||_{\tilde{\Lambda}^*}$, hors d'un ensemble évanescent.

Si T est un t•a quelconque, on a donc :

$$E(\sum_{s \geq T} Z_s^2 \ |\mathcal{F}_T) \leq ||Z||^2_{\tilde{\Lambda}^*} + E(\sum_{s>T} Z_s^2 \ |\mathcal{F}_T)$$

Or, $$E(\sum_{s>T} Z_s^2 \ |\mathcal{F}_T) = \lim_{n\uparrow\infty} E(E\{\sum_{s \geq T+\frac{1}{n}} Z_s^2 \ |\mathcal{F}_{(T+\frac{1}{n})-}\}|\mathcal{F}_T)$$

$$\leq ||Z||^2_{\tilde{\Lambda}^*}.$$

Finalement, on a donc : $||Z||_{\Lambda^*} \leq \sqrt{2}\ ||Z||_{\tilde{\Lambda}^*}$.

1.5. Dégageons maintenant les rapports qui existent entre le théorème 1.3., et les différentes constructions d'intégrales stochastiques optionnelles.

r-1) si $Z \in \Lambda^1_{loc}$, ${}^mZ$ est l'unique martingale locale, valant Z_o en 0 somme compensée de sauts, dont le processus de sauts est $Z-\tilde{Z}$(sur $]o,\infty[$).
Ainsi, avec une construction différente, on a retrouvé la martingale locale construite par Chou (1) et Lépingle (6), lorsque $Z \in \Lambda^1_{loc}$, et $\tilde{Z} = 0$.

r-2) Si M est une martingale nulle en 0, somme compensée de sauts, et H un processus optionnel tel que $H\,\Delta M \in H^1$, la martingale locale ${}^m(H\,\Delta M)$ n'est autre que l'intégrale stochastique optionnelle $H \cdot M$.

r-3) Enfin, les liens entre intégration stochastique par rapport à une mesure aléatoire et le théorème de Chou et Lépingle ont été étudiés par J. Jacod en [5].

Soulignons encore que l'apport du présent paragraphe est essentiellement de donner une autre démonstration du théorème de Chou et Lépingle.

1.6. Remarque : Pour compléter l'étude menée dans ce paragraphe, signalons une autre variante de l'inégalité de Fefferman, qui se démontre aussi en suivant pas à pas P.A. Meyer en [7] (p. 337) : si M,N sont deux martingales locales, U et V deux processus optionnels, on a :

$$E\left[\int_0^\infty |U_s||V_s|\,|d[M,N]_s|\right]$$

$$\leq \sqrt{2}\; E\left[\left(\int_0^\infty U_s^2\, d[M,M]_s\right)^{1/2}\right] \left\{\sup_{T\ \text{t.a}} \frac{\left(E\int_{[T,\infty]} V_s^2\, d[N,N]_s\right)}{P(T<\infty)}\right\}^{1/2} .$$

De plus, si N est une martingale locale, et V un processus optionnel tels que :
$$\sup_{T\ \text{t.a}} \frac{E\left(\int_{[T,\infty]} V_s^2\, d[N,N]_s\right)}{P(T<\infty)} < \infty ,$$
la martingale $V \cdot N$ - qui appartient à $\underline{\underline{M}}$ - appartient en fait à BMO, et l'on a :

$$\forall M \in H^1 , \quad E((V\cdot[M,N])_\infty) = E([M, V\cdot N]_\infty)$$

2. Une définition naturelle de certaines intégrales stochastiques optionnelles:

2.1. Soit X une semi-martingale.

Nous aurons besoin de la

Définition 2.1.

Un processus optionnel H est dit $\mathcal{P}$-approchable pour X s'il existe un processus H' prévisible, localement borné, tel que : (a-1) $H-H'$ <u>est un processus mince</u>

(a-2) <u>pour tout t,</u> $\sum_{s\leq t} |(H_s - H'_s)\, \Delta X_s| < \infty$

On dit alors que H' approche H, pour X.

Remarquons que :

- l'ensemble des processus optionnels $\mathcal{P}$-approchables pour X est un espace vectoriel.
- si l'on se restreint aux processus $\mathcal{P}$-approchables pour X, qui sont, de plus, localement bornés, ils forment une algèbre.
- un processus optionnel localement borné est $\mathcal{P}$-approchable pour X si, et seulement si, il l'est pour une martingale locale M qui apparaît dans une décomposition additive de $X = M + A (M \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{A})$.

<u>2.2.</u> Indiquons maintenant deux propriétés que l'on souhaiterait être vérifiées par les intégrales optionnelles $H * X$ (que l'on se propose de définir ; voir l'introduction) :

(p-1) si H est un processus prévisible localement borné,

$$H * X = H \cdot X$$

(p-2) si H est un processus optionnel mince

tel que : $\forall t$, $\sum_{s\leq t} |H_s \Delta X_s| < \infty$,

alors : $(H * X)_t = \sum_{s\leq t} H_s \Delta X_s$.

Ainsi, si H est un processus optionnel $\mathcal{P}$-approchable (et si H' approche H) pour X, on doit définir, par linéarité, d'après (p-1) et (p-2) :

$$(6) \quad H * X = H' \cdot X + \sum_{s\leq \cdot} (H_s - H'_s)\, \Delta X_s .$$

Cette définition est bien licite, comme le prouve la

Proposition 2.2. :

La formule (6) est cohérente, i.e : elle ne dépend pas du processus prévisible H' qui approche H pour X.

Démonstration :

Soit $X = M + A$ une décomposition additive de X, avec $M \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{A}$.

Soit H'' un second processus prévisible qui approche H pour X.

L'intégration par rapport à dA ne posant aucun problème, tout revient à montrer l'égalité :

$$(7) \qquad (H'-H'') \cdot M = \sum_{s \leq \cdot} (H'_s - H''_s) \Delta M_s .$$

Or, le processus prévisible $H' - H''$ étant mince (d'après (a-1)), l'ensemble aléatoire $(H' \neq H'')$ est une réunion dénombrable de graphes disjoints de t.a prévisibles ([2], p. 138).

Ainsi, la martingale locale $N = (H' - H'') \cdot M$ est une somme compensée de sauts, n'a que des sauts prévisibles, et vérifie :
$\forall t, \ \sum_{s \leq t} |\Delta N_s| < \infty$.

D'après la thèse de Yoeurp ([10], théorème 1.6.,3) , on a alors :

$N_t = \sum_{(s \leq t)} (\Delta N_s)$, c'est à dire (7) ■

2.3. Montrons maintenant le caractère "naturel" de la formule - définition (6) :

(n-1) si $A \in \mathcal{A}$, et $H \in b(\mathcal{O})$, l'intégrale $H * A$ est bien définie : en effet, H est $\mathcal{P}$-approchable pour A, par sa projection prévisible $H' = \tilde{H}$. De plus, $H * A$ coïncide avec l'intégrale de Stieltjes $\int_0^\cdot H_s \, dA_s$ (heureusement !).

(n-2) si $X \in \mathcal{A}$, et H est $\mathcal{P}$-approchable pour X, on a :

$$\Delta(H * X) = H\,\Delta X$$

(n-3) si $H, K \in b(\mathcal{G})$, et sont $\mathcal{P}$-approchables pour $X \in \mathcal{A}$ (respectivement par H' et K'), alors $H*(K*X)$ et $HK * X$ sont bien définies (c'est facile) et sont égales.

En effet, on a :

$$H*(K*X) = H * \left[K'\bullet X + \sum_{s\leq \bullet} (K_s - K'_s)\,\Delta X_s\right]$$

$$= H * (K'\bullet X) + \sum_{s\leq \bullet} H_s (K_s - K'_s)\Delta X_s, \text{ d'après (n-1).}$$

$$= H'K'\bullet X + \sum_{s\leq \bullet} (H_s - H'_s)K'_s \Delta X_s + \sum_{s\leq \bullet} H_s(K_s - K'_s)\,\Delta X_s$$

$$= (H'K')\bullet X + \sum_{s\leq \bullet} (H_s K_s - H'_s K'_s)\,\Delta X_s$$

$$= HK * X.$$

2.4. Faisons maintenant le lien entre les deux intégrales stochastiques optionnelles $H * M$ et $H \cdot M$: supposons donc que M soit une martingale locale nulle en 0, et que H soit $\mathcal{P}$-approchable pour M (par H'). On a la

Proposition 2.3. :

$H * M$ est une semi-martingale spéciale si, et seulement si, le processus $\sum_{s\leq \bullet} |(H_s - H'_s)\,\Delta M_s|$ est localement intégrable

Dans ce cas, l'intégrale optionnelle $H \cdot M$ est bien définie ; c'est, de plus, la martingale locale N qui figure dans la décomposition canonique de la semi-martingale spéciale $H * M$.

Démonstration :

La première assertion est immédiate, d'après (6). D'autre part, H' étant localement borné, $H \bullet M$ est définie dès que : $\{\sum_{s\leq \bullet} (H_s - H'_s)^2\,(\Delta M_s)^2\}^{1/2}$ est localement intégrable.

Or, ce processus est majoré par $\sum_{s\leq \bullet} |(H_s - H'_s)\,\Delta M_s|$, qui est localement intégrable, par hypothèse.

Enfin, d'après le lemme de Yoeurp ([10], lemme 2.3.), on a, pour toute martingale locale R :

$$[N,R] - [H * M, R] \in \mathcal{L}$$

Or, $[H * M,R] = H\cdot [M, R]$

D'où : $[N , R] - H\cdot [M, R] \in \mathcal{L}$. Or, cette propriété est caractéristique de $H\cdot M$, et donc : $H\cdot M = N$ ■

2.5. Donnons quelques exemples de calcul de $H * M$, lorsque M est une martingale locale :

- si T est un t•a, alors $H = 1_{[0,T[}$ est $\mathcal{P}$-approchable pour M, par $H' = 1_{[0,T]}$.

On a donc : $(1_{[0,T[} * M)_t = M_{t\wedge T} - \Delta M_T\, 1_{(T \leq t)}$

D'après la proposition 2.3., on a :

$$(8) \qquad (1_{[0,T[} \cdot M)_t = M_{t\wedge T} - \Delta M_T\, 1_{(T \leq t)} + B_t,$$

où $B = (\Delta M_T\, 1_{T\leq \cdot})^{\sim}$. (la formule (8) est dûe, à notre connaissance, à M. Pratelli ; cf [8], p. 416)

- si $H = N$ est une martingale locale, c'est un processus $\mathcal{P}$-approchable pour M, par $H' = \tilde{N} = N_-$.

On obtient alors $(N * M)_t = (N_-\cdot M)_t + \sum_{(s\leq t)} \Delta N_s\, \Delta M_s$

$$= (N_-\cdot M)_t + [N,M]^d_t$$

Dans le cas où $[N,M]$ est localement intégrable, on obtient, d'après la proposition 2.3. :

$$(9) \qquad N\cdot M = N_-\cdot M + [N,M] - \langle N,M\rangle$$

et donc : (10) $\Delta N \cdot M = [N,M] - \langle N,M\rangle$

(on retrouve ainsi la formule de Pratelli - Yoeurp, lorsque $N=M$; cf [7], 37, p.276).

Noter aussi que ΔN est $\mathcal{S}$-approchable pour M, par $H'=0$, et que l'on peut définir $N * M$ (et $\Delta N * M$) pour tout couple de martingales locales, sans condition d'intégrabilité (contrairement aux intégrales $N \cdot M$ et $\Delta N \cdot M$).

2.6. Finalement, cette présentation des intégrales stochastiques optionnelles me semble surtout être avantageuse d'un point de vue pédagogique (et je remercie J.Azéma et J. de Sam Lazaro, dont les questions et les préoccupations de cet ordre m'ont amené à écrire cette note) : en effet, dans de nombreux cas concrets, il est facile d'expliciter $H * M$, et donc d'en déduire $H \cdot M$, d'après la proposition 2.3. (voir les exemples).

Références :

[1] C.S. CHOU : Le processus des sauts d'une martingale locale Sém. Probas XI, Lect. Notes in Math n° 581, Springer (1977).

[2] C. DELLACHERIE : Capacités et processus stochastiques. Springer-Verlag (1972).

[3] K.ITO : Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. T.A.M.S. 1956, pp. 253-263.

[4] J. JACOD : Multivariate point processes : predictable projection, Radon - Nikodym derivatives, representation of martingales. Zeitschrift für Wahr., 31, 1975, pp. 235-253.

(5) J. JACOD : Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales. Sém. Probas XI, Lect. Notes in Math. n° 581, Springer (1977).

(6) D. LEPINGLE : Sur la représentation des sauts des martingales. Sém. Probas XI, Lect. Notes in Math. n° 581, Springer (1977).

(7) P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Probas X, Lect. Notes in Math n° 511, Springer (1976).

(8) M. PRATELLI : Espaces fortement stables de martingales de carré intégrable. Sém. Probas X, Lect. Notes in Math n° 511, Springer (1976)

(9) A.V. SKOROKHOD : Studies in the theory of random processes.

(10) CH. YOEURP : Décomposition de martingales locales et formules exponentielles. Sém. Probas X, Lect. Notes in Math n° 511, Springer (1976).

(11) D. LEPINGLE : Une inégalité de martingales. (à paraître au Séminaire de Probabilités XII, (1978)).