

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN

MARC YOR

Sur l'expression de la dualité entre H^1 et BMO

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 360-370

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__360_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur l'expression de la dualité entre H^1 et BMO

T. Jeulin et M. Yor

Introduction

Un théorème de représentation, dû à Herz et Lépingle constitue un des piliers de l'étude sur la topologie $\mathcal{O}(H^1, BMO)$ menée en [1], et nous a incité ensuite à apporter quelques précisions sur l'expression de la dualité entre H^1 et BMO.

Ainsi, on étudie dans cette note la question suivante :

pour quels couples de martingales $(X, Y) \in H^1 \times BMO$, a-t-on

$$E(|X_\infty Y_\infty|) < \infty \quad \text{et} \quad (X, Y)_{H^1 \times BMO} = E(X_\infty Y_\infty) ?$$

0 - Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré, où (\mathcal{F}_t) est une filtration vérifiant les conditions habituelles. On suppose, de plus, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$, ce qui permet d'identifier systematiquement une variable $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$ avec la martingale càdlàg uniformément intégrable $X_t = E(X | \mathcal{F}_t)$.

1 - Le critère suivant d'appartenance à BMO est le pendant, en théorie des martingales, du résultat analogue sur l'espace fonctionnel $BMO(\mathbb{R}^d)$ (cf [2], p.136, lemme 3).

Proposition 1: Soit $X \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$.

X appartient à BMO si, et seulement si, il existe un processus adapté, continu à gauche Z , et une constante c tels que: pour tout $t \leq T$,
 $1_{(T < \infty)} Z_T \in L^2$ et $E\{(X - Z_T)^2 | \mathcal{F}_T\} \leq c^2$, sur $(T < \infty)$.

De plus, on a alors: $\|X\|_{BMO} \leq 2c$.

Démonstration:

a) Si $X \in \text{BMO}$, le processus $Z = X_-$ et la constante $c = \|X\|_{\text{BMO}}$ vérifient les conditions demandées.

b) Inversement, s'il existe un processus Z et une constante c satisfaisant les hypothèses, on a, pour tout t.a. T , sur $(T < \infty)$:

$$(E(X|_{\mathcal{F}_T}) - Z_T)^2 \leq E\{(X - Z_T)^2 | \mathcal{F}_T\} \leq c^2.$$

D'après le théorème de section optionnel, on a donc: $(X_t - Z_t)^2 \leq c^2$, hors d'un ensemble évanescent.

La continuité à gauche de Z entraîne que: $(X_{t-} - Z_t)^2 \leq c^2$, hors du même ensemble.

Pour tout t.a. T , on a donc, sur $(T < \infty)$:

$$E\{(X - X_{T-})^2 | \mathcal{F}_T\} \leq 2E\{(X - Z_T)^2 + (Z_T - X_{T-})^2 | \mathcal{F}_T\} \leq 4c^2.$$

X appartient donc à BMO , et $\|X\|_{\text{BMO}} \leq 2c$.

On déduit de la proposition 1 deux résultats de stabilité relatifs à l'espace BMO :

Corollaire : a) Si $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne, et si f^1, \dots, f^n sont n variables de BMO , alors $L(f^1, \dots, f^n) \in \text{BMO}$.

De plus, si k est une constante de Lipschitz de L

(pour la norme euclidienne), on a:

$$\|L(f^1, \dots, f^n)\|_{\text{BMO}} \leq 2k \left\{ \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{\text{BMO}}^2 \right\}^{1/2}$$

b) Si $f \in \text{BMO}$, alors $f^* = \sup_t |f_t| \in \text{BMO}$, et $\|f^*\|_{\text{BMO}} \leq 4 \|f\|_{\text{BMO}}$.

Démonstration: a) Par définition de k , on a, pour tout t.a. T , en posant

$$f = (f^1, \dots, f^n): \quad E\{(L(f) - L(f_{T-}))^2 | \mathcal{F}_T\} \leq c^2,$$

$$\text{où } c = k \left\{ \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{\text{BMO}}^2 \right\}^{1/2}.$$

On applique la proposition 1, avec $Z = L(f_-)$.

b) Soit $f \in \text{BMO}$, et soit T un temps d'arrêt. D'après l'inégalité de Doob pour $p = 2$, utilisée pour toutes les martingales

$$f_t^* = f_{S+t} - f_{S-}, \text{ avec } S = T_A, A \in \mathcal{F}_T, \text{ on a:}$$

$$E[(f^* - f_{T-}^*)^2 | \mathcal{F}_T] \leq 4 E[(f_{\infty} - f_{T-})^2 | \mathcal{F}_T] \leq 4 \|f\|_{\text{BMO}}^2.$$

(f_t^* désigne ici le processus croissant $\sup_{s \leq t} |f_s|$).

On applique la proposition 1, avec $Z = f_-^*$, et $c = 2$.

2 - Rappelons la représentation de BMO obtenue par Herz et Lépingle (cf [3]) :

si $Y \in \text{BMO}$, il existe un processus $(B_t, t \geq 0)$, non adapté en général, à variation bornée, tel que :

a) $\int_0^\infty |dB_s| \leq C \|Y\|_{\text{BMO}}$, où C est une constante universelle ;

b) $Y = A_\infty$, où A est la projection duale optionnelle de B ;

c) pour tout $X \in H^1$, on a :

$$(1) \quad E([X, Y]_\infty) = E\left(\int_0^\infty X_s dB_s\right)$$

(l'intégrale figurant en (1) a bien un sens ; car

$$E\left(\int_0^\infty |X_s| |dB_s|\right) \leq E(X^*) \left\| \int_0^\infty |dB_s| \right\|_{L^\infty}.$$

Pour illustrer le paragraphe précédent, cherchons une représentation de Herz pour $|Y|$, si $Y \in \text{BMO}$ est représenté au moyen de B , vérifiant a), b), c) .

On a, d'après b) ,

$$\begin{aligned} |Y| &= |A_\infty| = \int_{[0, \infty]} \text{sgn}(A_{s-}) dA_s + \sum_{0 \leq s} \{|A_s| - |A_{s-}| - \text{sgn}(A_{s-}) \Delta A_s\} \\ &= \int_{[0, \infty]} H_s dA_s, \end{aligned}$$

si l'on pose $A_{0-} = 0$, et

$$H_s = \text{sgn}(A_{s-}) \begin{cases} 1 & (\Delta A_s = 0) \\ + 1 & (\Delta A_s \neq 0) \end{cases} \frac{|A_s| - |A_{s-}|}{\Delta A_s}.$$

H étant optionnel, borné, on peut prendre pour B' , représentation de Herz de $|Y|$: $B'_t = \int_{[0, t]} H_s dB_s$.

Revenons à la formule (1), pour justifier l'égalité :

$$(1') \quad \text{si } X \in H^1, Y \in \text{BMO}, \quad E([X, Y]_\infty) = E\left(\int_0^\infty X_s dA_s\right)$$

En effet, on a :

$$(2) \quad E\left(\int_0^\infty |X_s| |dA_s| \right) < \infty \quad .$$

Pour montrer cela, on peut supposer B (et donc A) croissant, quitte à décomposer B en $\int_0^\infty |dB_s| = \left(\int_0^\infty dB_s \right) - B$. On a donc :

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^\infty |X_s| dA_s\right) &= \lim_n \uparrow E\left(\int_0^\infty (|X_s| \wedge n) dA_s\right) \\ &= \lim_n \uparrow E\left(\int_0^\infty (|X_s| \wedge n) dB_s\right) \\ &\leq E(X^*) \left\| \int_0^\infty dB_s \right\|_{L^\infty} . \end{aligned}$$

(2) étant vraie, on obtient, en approximant X_s par $X_s^{(n)} = (X_s \wedge n) \vee (-n)$:

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^\infty X_s dA_s\right) &= \lim_n E\left(\int_0^\infty X_s^{(n)} dA_s\right) \\ &= \lim_n E\left(\int_0^\infty X_s^{(n)} dB_s\right) = E\left(\int_0^\infty X_s dB_s\right), \text{ d'où (1')}. \end{aligned}$$

Il est maintenant tentant d'écrire, d'après (1') :

$$(3?) \quad E([X, Y]_\infty) = E\left(\int_0^\infty X_s dA_s\right) \stackrel{(\alpha)}{=} E(X_\infty Y_\infty),$$

en invoquant, pour "justifier" (α), le fait que la projection optionnelle du processus constant X_∞ est X_s ! Or, le membre de droite de (3?) n'est en général pas défini, car $XY \notin L^1$.

Toutefois, on a la :

Proposition 2 : si X est une variable positive de H^1 , et $Y \in BMO$,
on a : $E(X|Y|) < \infty$ et

$$(3_+) \quad E([X, Y]_\infty) = E(XY) .$$

Démonstration :

Comme précédemment, on peut supposer que le processus B figurant dans la décomposition de Herz est croissant (ce qui entraîne $Y \geq 0$).

D'après la formule (1'), on a , en prenant pour $X_s^{(n)}$ une version càdlàg de $E(X \wedge n | \mathcal{F}_s)$:

$$\begin{aligned} E([X, Y]_\infty) &= \lim_n \uparrow E\left(\int_0^\infty X_s^{(n)} dA_s\right) \\ &= \lim_n \uparrow E((X \wedge n) Y) \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

On a ainsi montré, en même temps, les deux résultats cherchés, car $E(|[X,Y]_\infty|)$ est fini, ce qui provient de l'inégalité de Fefferman.

On déduit de la proposition 2 le :

Corollaire : soit X une variable aléatoire telle qu'il existe $Y \in \text{BMO}$ vérifiant $E(|XY|) = \infty$. Alors, $|X| \notin H^1$.

Autrement dit, en général, contrairement à l'espace BMO (voir ci-dessus) et aux espaces H^p , pour $1 < p < +\infty$ (rappelons qu'alors $H^p \simeq L^p$), la fonction "valeur absolue" $x \rightarrow |x|$ ne conserve pas l'espace H^1 . Il en est de même pour la multiplication par une fonction $\varphi \in L^\infty$ (si $X \in H^1$, mais $|X| \notin H^1$, prendre $\varphi = \text{sgn}(X)$).

Remarque : l'opération de multiplication par n'importe quelle $\varphi \in L^\infty$ ne conserve pas non plus, en général, l'espace BMO, comme l'a remarqué Dellacherie, en étudiant l'exemple d'espace filtré qui termine l'article [1] .

3 - Les résultats précédents incitent à s'intéresser à l'espace de Banach $K^1 = \left\{ X / \|X\|_{K^1} = \| |X| \|_{H^1} < \infty \right\}$

Remarquons immédiatement que $K^1 = H_+^1 - H_+^1$.

D'autre part, on a la caractérisation suivante de K^1 :

Proposition 3 , soit $X : (\mathcal{L}, \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $X \in K^1$
- ii) $\forall Y \in \text{BMO}, \quad E(|XY|) < +\infty$.

Démonstration

D'après la proposition 2, i) implique ii) .

Inversement, supposons ii) vérifiée. On peut évidemment supposer $X \geq 0$. Rappelons que $E(X^*) = \sup_L E(X_L)$, où L varie parmi toutes les variables aléatoires positives .

Si $E(X^*) = \infty$, il existe donc, pour tout n , une variable positive $L^{(n)}$ telle que $E(X_{L^{(n)}}) \geq 4^n$.

Notons $A^{(n)}$ la projection duale optionnelle du processus croissant (non adapté en général) $1_{(L^{(n)} \leq \cdot)}$, et $A_\infty^{(n)} = Y^{(n)}$.

On sait alors que $Y^{(n)} \in \text{BMO}$, et il existe une constante universelle C telle que $\|Y^{(n)}\|_{\text{BMO}} \leq C$ ([4], th.4, p.334).

Posons maintenant $Y = \sum_n 2^{-n} Y^{(n)}$.

Cette série converge normalement dans BMO , vers Y , qui appartient à BMO_+ . D'autre part, on a :

$$E(XY) = \sum_n 2^{-n} E(XY^{(n)}) = \sum_n 2^{-n} E(X_{L^{(n)}}) = \infty,$$

ce qui contredit ii).

Si $X \in H^1$, mais $X \notin K^1$, il est maintenant naturel de chercher à déterminer les variables $Y \in \text{BMO}$, pour lesquelles on a l'égalité (3) $E([X, Y]_\infty) = E(XY)$.

On a, à ce sujet, la réponse partielle suivante :

Proposition 4 : soit $X \in H^1$. Si $Y \in \text{BMO}$, et admet une représentation de Herz $Y_\infty = A_\infty$, avec A , processus optionnel à variation bornée, tel que :

$$E(|X| \int_0^\infty |dA_s|) < \infty,$$

alors, on a :

$$E(|XY|) < \infty, \text{ et } (3) : E([X, Y]_\infty) = E(XY).$$

Démonstration

On a $|Y| = |A_\infty| \leq \int_0^\infty |dA_s|$, d'où $E(|XY|) < \infty$.

D'autre part, on a : $E([X, Y]_\infty) = E(\int_0^\infty X_s dA_s)$
 $= \lim_n E(\int_0^\infty X_s^{(n)} dA_s),$

où $X_s^{(n)}$ est une version càdlàg de $E((X \wedge n) \vee (-n) | \mathcal{F}_s)$.

La dernière égalité est en effet justifiée par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque

$|X_s^{(n)}| \leq E(|X| | \mathcal{F}_s)$, et $E\left(\int_0^\infty E(|X| | \mathcal{F}_s) dA_s\right) = E(|X| \int_0^\infty dA_s) < \infty$,
par hypothèse.

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } E([X, Y]_\infty) &= \lim_n E(X_\infty^{(n)} A_\infty) \\ &= \lim_n E(X_\infty^{(n)} Y_\infty) = E(XY). \end{aligned}$$

Remarque : on ne sait pas si (3) est vraie sous la seule condition $E(|XY|) < +\infty$.

D'après la stabilité de BMO par l'application valeur absolue, on peut toujours se ramener au cas où Y est positif. Mais, ceci ne résoud pas le problème posé, car il semble improbable que tout $Y \in \text{BMO}_+$ puisse admettre une représentation de Herz à l'aide d'un processus croissant A.

4 - Nous nous proposons maintenant d'établir quelques résultats sur $(K^1)'$, le dual de K^1 , et la dualité $K^1 \times (K^1)'$.

Auparavant, indiquons quelques résultats immédiats sur l'espace K^1 :

- on a les injections continues suivantes :

$$(4) \quad L \log^+ L \hookrightarrow K^1 \hookrightarrow H^1;$$

- K^1 est stable par multiplication par L^∞ ;

- il résulte des propositions 2 et 3 que,

$$\text{sur } K^1, \text{ la norme } H^1 \text{ équivaut à } X \rightarrow \sup_{\|Y\|_{\text{BMO}} \leq 1} E(XY)$$

Par contre, on déduit aisément de la proposition (1') que la norme de K^1 (définie sur K^1) équivaut à :

$$X \rightarrow \sup_{\|Y\|_{\text{BMO}} \leq 1} E(|XY|).$$

Contrairement à ce qui se passe pour le couple (H^1, BMO) , la dualité entre K^1 et $(K^1)'$ s'exprime très simplement :

Proposition 5 : toute forme linéaire continue sur K^1 peut se représenter au moyen d'une variable L par la formule :

$$\ell(X) = E(XL) \quad (X \in K^1) ,$$

L vérifiant : $E(|XL|) < +\infty$, pour toute variable $X \in K^1$.

Démonstration

Soit ℓ une forme linéaire continue sur K^1 ; $\ell|_{H^2}$ est continue pour la norme H^2 .

Il existe donc $L \in L^2$ telle que : $\forall X \in H^2, \ell(X) = E(XL)$.

Notons $b = \text{sgn}(L)$, en posant, par exemple, $\text{sgn}(0) = 1$.

Alors, on a, pour tout $X \in H^2$, $\ell(bX) = E(X|L|)$.

Soit maintenant $X \in K_+^1 = H_+^1$. Les variables $(X \wedge n)$ convergent vers X dans K^1 ; en effet, $X - (X \wedge n) = (X - n)^+$ vérifie :

$$P([(X - n)^+]^* \geq c) \leq \frac{1}{c} E((X - n)^+) ,$$

d'après l'inégalité de Doob.

Ainsi, la suite $[(X - n)^+]^*$ converge en probabilité vers 0 et est dominée dans L^1 par X^* ; elle converge donc dans K^1 , ce qui est le résultat cherché.

D'après la continuité de ℓ et le théorème de Beppo-Levi, on a donc :

$$\forall X \in K_+^1, \ell(bX) = E(X|L|)$$

(en particulier, pour tout $X \in K^1, E(|XL|) < \infty$) .

Par différence, on a donc :

$$\forall X \in K^1, \ell(bX) = E(X|L|) ,$$

et finalement $\ell(X) = \ell(b(bX)) = E(bX|L|) = E(XL)$.

Les injections continues duales de (4) permettent de préciser les propriétés d'intégrabilité de $L \in (K^1)'$.

Proposition 6 : soit $L \in (K^A)'$; notons $\|L\|_*$ sa norme dans $(K^A)'$.

On a alors :

$$E(\exp|L|) \leq \frac{1}{1 - e \|L\|_*} \quad \text{si} \quad \|L\|_* < \frac{1}{e}.$$

Démonstration

On a $\| |L| \|_* = \|L\|_*$; en outre, pour tout $p, 1 < p < +\infty$, on a, d'après l'inégalité de Doob (q conjugué de p) :

$$|E(LX)| \leq \|L\|_* E(|X|^q) \leq \|L\|_* \| |X|^q \|_p \leq q \|L\|_* \|X\|_p.$$

Par suite, pour tout $q \geq 1$, $E(|L|^q) \leq q^q \|L\|_*^q$, d'où

$$\begin{aligned} E(\exp|L|) &= \sum_n \frac{1}{n!} E(|L|^n) \leq \sum_n \frac{1}{n!} n^n \|L\|_*^n \\ &\leq \sum_n (e \|L\|_*)^n = \frac{1}{1 - e \|L\|_*} \quad \text{si} \quad \|L\|_* < \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Etudions maintenant quelques propriétés de stabilité de $(K^A)'$:

- L^∞ opérant continument (par multiplication) sur K^A , il fait de même sur son dual $(K^A)'$;
- on a aussi la :

Proposition 7 : soit L une variable aléatoire . Dès que l'une des trois variables L , $|L|$ et L^* appartient à $(K^A)'$, il en est de même des deux autres.

Démonstration :

Il est clair que $\|L\|_* = \| |L| \|_* \leq \|L^*\|_*$.

Considérons alors $L \in (K^A)'$; pour toute variable θ , et pour tout X de K^A , on a :

$$E(X L_\theta) = E\left(\int_0^\infty L_s dC_s\right)$$

où C est la projection duale optionnelle de X^A ($\theta \leq s$).

On peut donc écrire :

$$|E(X L_\theta)| = |E(C_\infty L)| \leq \|L\|_* \|C_\infty\|_{K^1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } E(|C_\infty|_{\frac{F}{t}}) &\leq E\left(\int_0^\infty |dC_s| \mid \frac{F}{t}\right) \\ &\leq E(|X|_{\mathcal{A}}(t < \theta) \mid \frac{F}{t}) + \int_0^t |dC_s|, \text{ d'où :} \end{aligned}$$

$$(|C_\infty|)^* \leq \int_0^\infty |dC_s| + |X|^* \quad \text{et} \quad \|C_\infty\|_{K^1} \leq \|X\|_{K^1} + \|X\|_{L^1};$$

on a donc $\|L_\theta\|_* \leq 2 \|L\|_*$;

en outre, il existe une suite θ_n telle que $|L_{\theta_n}|$ croisse vers L^* .

On obtient ainsi $\|L^*\|_* \leq 2 \|L\|_*$.

Compte tenu des remarques faites précédemment, l'espace $(K^1)'$ contient l'ensemble $L^\infty \times \text{BMO} = (g = \varphi f \mid \varphi \in L^\infty, f \in \text{BMO})$.

De plus, on a le :

Lemme : $L^\infty \times \text{BMO}$ est un espace vectoriel.

Démonstration : le seul problème est de montrer que $\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2$ ($\varphi_1 \in L^\infty, f_1 \in \text{BMO}$) peut se mettre sous la forme φf (avec des notations évidentes). Pour cela il suffit de prendre :

$$\varphi = \frac{\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2}{|f_1| + |f_2|} \quad \mathcal{A} \quad \text{qui appartient} \\ \quad \quad \quad (|f_1| + |f_2| \neq 0)$$

bien à L^∞ et $f = |f_1| + |f_2|$, qui appartient à BMO , d'après la proposition 1.

Reprenons l'exemple étudié en [1] :

$(\mathcal{L}, \frac{F}{t})$ est l'intervalle $]0, 1[$, muni de sa tribu borélienne, P est la mesure de Lebesgue; $(\frac{F}{t})$ est la plus petite famille de tribus continue à droite pour laquelle la variable aléatoire

$$S : w \rightarrow S(w) = 1 - w \quad (w \in]0, 1[)$$

est un temps d'arrêt. On complète pour la mesure de Lebesgue et on

adjoind les ensembles de mesure nulle aux F_t^0 , ce qui donne la filtration (F_t) . On se limite à $t \leq 1$.

Soit $X \in L^1$; on note $MX(w) = \frac{1}{w} \int_0^w X(u) du$.

On peut alors prendre :

$$\|X\|_{H^1} = \|X\|_{L^1} + \|MX\|_{L^1}$$

$$\|X\|_{BMO} = \|X\|_{L^1} + \|X - MX\|_{L^\infty}.$$

A l'aide du théorème de Fubini, on montre que l'appartenance de X à K^1 équivaut à :

$$\|X.B_0\|_{L^1} < +\infty$$

où B_0 est l'élément de BMO défini par $B_0(w) = \log \frac{e}{w}$ ($w \in]0, 1[$).

Par suite $(K^1)' = \{ V \mid V = B_0 \times L, L \in L^\infty \}$.

On a dans cet exemple $(**)$ $(K^1)' = L^\infty \times BMO$.

Il est naturel de se demander si ce résultat est vrai en général. Nous ne savons pas répondre à cette question.

Références :

- [1] DELLACHERIE C., MEYER P.A., YOR M. : Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO. Séminaire de Probabilité XII, Lecture Notes in Math. **649**, Springer (1978).
- [2] MEYER P.A. : Le dual de $H^1(\mathbb{R}^d)$: démonstrations probabilistes. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Math. n°581, Springer (1977).
- [3] MEYER P.A. : Sur un théorème de C. Herz et D. Lépingle. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Math. n° 581, Springer (1977).
- [4] MEYER P.A. : U. cours sur les intégrales stochastiques, Chapitre V: Les espaces H^1 et BMO. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. n° 541, Springer (1976).