Thierry Jeulin
Marc Yor

Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 332-359
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__332_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis

T. Jeulin et M. Yor

Introduction.

En étudiant les grossissements de filtrations, nous avons failli tomber, à plusieurs reprises, dans des affirmations-pièges (deux en particulier!). Un de nos buts ici est de signaler ces embûches au lecteur. L'intérêt de ce travail se limiterait sans doute à cela, s'il ne se trouvait que l'étude de ces pièges est menée à l'aide d'une inégalité de Hardy [3] :

(1) si $f \in L^2([0,\infty])$, et $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du \quad (0 < x < \infty)$,

alors $\|F\|_{L^2} \leq 2\,\|f\|_{L^2}$,

et est liée de façon naturelle à celle de certaines intégrales singulières où figure le mouvement brownien.

De façon plus précise, (Ω, F, P) est un espace de probabilité complet, sur lequel on suppose données deux filtrations $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, constituées de sous tribus de F , vérifiant les conditions habituelles, ainsi que :

pour tout t , $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.

En 1977-1978, nous avons étudié, de façon assez systématique, de tels couples $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ pour lesquels :

(H') Toute $\mathcal{F}$ (semi-) martingale est une $\mathcal{G}$ semi-martingale [(+)] .

(voir les articles correspondants du Séminaire XII, ainsi que Jeulin-Yor [6]).

A diverses reprises, nous avons "rencontré" les assertions suivantes :

(FA 1) Pour que (H') soit réalisée, il suffit (et il est évidemment nécessaire) qu'un système générateur $\mathcal{N}$ (au sens des espaces stables) de l'espace des $\mathcal{F}$ martingales de carré intégrable soit constitué de $\mathcal{G}$ semi-martingales.

[Cette affirmation nous a longtemps semblé particulièrement "vraisemblable" dans le cas où Card($\mathcal{N}$) = 1].

(FA 2) Si une $\mathcal{F}$ martingale localement de carré intégrable X est également une $\mathcal{G}$ semi-martingale, l'unique processus $\mathcal{G}$-prévisible, à variation finie, A tel que X - A soit une $\mathcal{G}$ martingale locale vérifie :

$$P \text{ p.s.} , \quad dA_s(\omega) \ll d\langle X,X\rangle_s(\omega) \quad ,$$

où le processus croissant $\langle X,X\rangle$ est calculé relativement à $\mathcal{F}$.

[Cette seconde affirmation a pour origines, d'une part l'analogie qui existe entre grossissement d'une filtration et changement absolument continu de probabilités, et d'autre part, le célèbre théorème de Girsanov] .

(+) Nous conservons la notation (H') que nous avions introduite en [6], où (H) désignait l'assertion beaucoup plus restrictive :

(H) Toute $\mathcal{F}$ martingale (locale) est une $\mathcal{G}$ martingale locale .

En fait, comme notre notation veut l'indiquer, il s'agit de faux-amis;

- nous donnons un contre-exemple à (FA 1) au chapitre 2, fondé sur l'étude, menée au chapitre 1, de la filtration naturelle $\mathcal{F}$ du mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$, issu de 0, grossie à l'aide de la tribu engendrée par B_1 ;
- deux contre-exemples à (FA 2) sont exhibés au chapitre 3, l'un avec X martingale continue, l'autre avec X martingale à variation finie.

Comme nous l'a fait remarquer H. Föllmer, les résultats du chapitre 1 sont "classiques". Ils semblent toutefois assez méconnus, ce qui nous paraît justifier une publication concise.

Par contre, ceux du chapitre 2 nous ont surpris, et semblent nouveaux. En particulier, un des sous-produits de notre étude est :

si $(B_t, t \geq 0)$ désigne le mouvement brownien réel, une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi \in L^2([0,1])$ vérifie :

$$\int_0^1 |\varphi(u)| \frac{|B_u|}{u} du < \infty \quad P \text{ p.s.} \qquad \text{est que} \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(u)|}{\sqrt{u}} du < \infty .$$

<u>Notations</u>. Outre les notations déja introduites, on appelle filtration naturelle d'un processus réel $(X_t)_{t \geq 0}$, et on note $\mathcal{F}^X$, la famille de tribus $(\sigma\{X_s, s \leq t\})_t$ rendue continue à droite, et (F, P)-complète.

Si $\mathcal{F}$ est une filtration, $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ désigne la tribu prévisible sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ associée à $\mathcal{F}$; si X est un processus réel, on note, pour simplifier, $\mathcal{P}(X)$ au lieu de $\mathcal{P}(\mathcal{F}^X)$.

1. Les mouvement brownien et processus de Poisson comme semi-martingales.

1.1. Le cas brownien.

$\mathcal{F}$ désigne, dans ce paragraphe, la filtration naturelle $\mathcal{F}^B$ d'un mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0. On note, pour $t \geq 0$,

$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(B_1)\}$. On a alors le :

Théorème 1 : Il existe un $\mathcal{G}$ mouvement brownien $(\beta_t, t \geq 0)$ issu de 0, tel que

(2) pour tout t, $\quad B_t = \beta_t + \int_0^{t \wedge 1} \frac{(B_1 - B_s)}{1 - s} \, ds$.

En conséquence, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(B_{t \wedge N}, t \geq 0)$ est une $\mathcal{G}$ quasi-martingale.

Nous procédons à la démonstration du théorème par étapes.

Etape i) : l'intégrale de Riemann qui figure en (2) est absolument convergente, car

$$I \overset{\text{déf}}{=} E\left(\int_0^1 \frac{|B_1 - B_s|}{1 - s} \, ds \right) = c \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \qquad \left(c = \sqrt{2/\pi} \right).$$

Etape ii) Montrons que $\beta_t \overset{\text{déf}}{=} B_t - \int_0^{t \wedge 1} \frac{(B_1 - B_s)}{1 - s} \, ds$

est une $\mathcal{G}$ martingale.

Puisque $(B_t, t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}$ martingale, et $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$, pour $t \geq 1$, on peut se restreindre à l'intervalle de temps $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, posons $\mathcal{G}_t' = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1) = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1 - B_t)$.

Soient $0 \leq s < t \leq 1$. La tribu $\mathcal{F}_s$ étant indépendante du processus

$(B_{s+h} - B_s, h \geq 0)$, on a :

$$E(B_t - B_s \mid \mathcal{G}'_s) = E(B_t - B_s \mid B_1 - B_s) = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s) ,$$

la dernière égalité provenant du calcul élémentaire de la L^2-projection de $(B_t - B_s)$ sur $\{\lambda(B_1 - B_s) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Un passage à la limite dans L^1 (par exemple) entraine :

$$(3) \qquad E(B_t - B_s \mid \mathcal{G}_s) = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s) .$$

Il est alors immédiat de vérifier, à partir de (3) , que $(\beta_t, t \leq 1)$, et donc $(\beta_t, t \in \mathbb{R}_+)$ sont des $\mathcal{G}$ martingales.

Nota bene : le lecteur "érudit" aura déduit de (3) que $(\beta_t, t<1)$ est une $\mathcal{G}$ martingale, après avoir remarqué que les " $\mathcal{G}$ Laplaciens approchés" de $(B_t, t<1)$, soit :

$$A_t^h = \int_0^t \frac{E(B_{s+h} - B_s \mid \mathcal{G}_s)}{h} ds \quad , \quad h \geq 0 ,$$

sont, pour t fixé, indépendants de h (dès que $h < 1 - t$), et égaux à $\int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds$.

Etape iii) . A nouveau, l'ensemble des temps est $\mathbb{R}_+$ tout entier. Il résulte de l'approximation du processus croissant associé à une martingale continue par des sommes de carrés d'accroissements de cette martingale, et de la définition de β , que :

$$\langle \beta, \beta \rangle_t = \langle B, B \rangle_t = t ,$$

où le processus $\langle \beta, \beta \rangle$ (resp. $\langle B, B \rangle$) est calculé relativement à $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}$) .

Il est alors classique que $(\beta_t, t \geq 0)$ est un $\mathcal{G}$ mouvement brownien.

Etape iv) . La seconde assertion du théorème découle de la formule (2), si l'on remarque que $V_{\mathcal{G}}(B) = I$ (cf. étape 1)) ,

où $V_{\mathcal{G}}(B) = \sup_{\substack{t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq 1 \\ n \in \mathbb{N}}} E\left(\sum_{i=1}^{i=n-1} \left| E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{G}_{t_i}) \right| \right)$.

<u>Remarque</u> : il peut être intéressant - pour d'éventuelles applications - de noter que le théorème 1 est encore valable si l'on suppose seulement que (B_t) est un $(\mathcal{F}_t)$.mouvement brownien.

On peut considérer la formule (2) comme une équation linéaire, où la fonction inconnue est $B_{\cdot}(\omega)$, et où les données sont $\beta_{\cdot}(\omega)$ et $B_1(\omega)$. A l'aide de la méthode de variation des constantes, on obtient immédiatement le :

<u>Corollaire 1 .1</u> : <u>Le pont brownien</u> $\{B_t - t.B_1 \;, t<1\}$ <u>est lié au</u> $\mathcal{G}$ <u>mouvement brownien</u> $(\beta_t, t<1)$ <u>par la formule</u> :

$$B_t - tB_1 = (1 - t) \int_0^t \frac{d\beta_s}{1 - s} \quad . \tag{4}$$

<u>En conséquence, les deux processus</u> $(B_t - tB_1 \;, t<1)$ <u>et</u> $(\beta_t, t<1)$ <u>ont même filtration naturelle</u>.

La formule (4) donne la "clé" de la structure de la filtration $\mathcal{G}$, que l'on explicite en cinq points :

a) $\mathcal{G}$ <u>est identique à la filtration naturelle du processus</u> $\{B_1 + \beta_t, t \geq 0\}$ (immédiat, d'après la formule (4)).

b) <u>La variable</u> B_1 <u>et le processus</u> β <u>sont indépendants</u> .

En effet, d'après le théorème 1 , $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ est un $\mathcal{G}$ mouvement brownien, qui est donc indépendant de $\mathcal{G}_0 \supseteq \sigma(B_1)$.

Ainsi, d'après la formule (4) , on a retrouvé le résultat suivant, obtenu par V.Mackevičius [15] :

<u>pour tout</u> $x \in \mathbb{R}$, <u>la loi du mouvement brownien réel</u> $(B_t)_{0 \leq t < 1}$, <u>issu de</u> 0, <u>conditionnellement à</u> $(B_1 = x)$, <u>est celle du processus</u> $\left(tx + (1-t)\int_0^t \frac{d\beta_s}{(1-s)}, t<1 \right)$,<u>où</u> $(\beta_t, t \leq 1)$ <u>désigne un mouvement brownien réel</u>.

La conjonction de a) et b) entraine aisément :

c) $\mathcal{G}_0$ est égale à la tribu complétée de $\sigma(B_1)$.

d) Tout processus $\mathcal{G}$ prévisible H est indistinguable d'un processus de la forme $K(B_1(\omega), s, \omega)$, où $K : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\beta)$ mesurable.

Démonstration : Un argument de classe monotone permet - à l'aide de a) et b) - de ne considérer que les processus

$$H(s,\omega) = f(s)\, E(\, g(B_1)\, u \mid \mathcal{G}_{s-})(\omega) ,$$

où $f \in b(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $g \in b(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $u \in b(\mathcal{F}^{\beta}_{\infty})$, et $(E(\, v \mid \mathcal{G}_{s-}), s \geq 0)$ désigne une version continue à gauche de la martingale $(E(\, v \mid \mathcal{G}_s), s \geq 0)$ associée à $v \in b(F)$.

Toujours d'après a) et b), on a donc :

$$H(s,\omega) = f(s)\, g(B_1)\, E(\, u \mid \mathcal{F}^{\beta}_{s-})(\omega)$$

à une indistinguabilité près.

L'assertion d) s'ensuit.

Enfin, une légère variation du théorème d'Ito sur la représentation des martingales du mouvement brownien permet d'énoncer :

e) Toute $\mathcal{G}$ martingale de carré intégrable $(X_t)_{t \geq 0}$ peut se représenter comme : $X_t = f(B_1) + \int_0^t H(s,\,.)\, d\beta_s$,

où $f \in L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\, dx)$, et $H \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathcal{G}), dP\, ds)$

On considère maintenant le processus $\{\hat{B}_t = B_{(1-t)}, t \leq 1\}$, et sa filtration naturelle, notée $\{\hat{\mathcal{F}}_t\}_{t \leq 1}$. Les résultats obtenus précedemment ont une traduction immédiate à ce processus, lorsque l'on a remarqué que le processus $(\, U_t = B_{(1-t)} - B_1 \;, t \leq 1\,)$ est un mouvement brownien, vérifiant $U_1 = -B_1 = -\hat{B}_0$; donc, avec les notations du théorème 1, la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\leq 1}$ est la filtration $(\mathcal{G}_t, t\leq 1)$ associée à $(U_t, t\leq 1)$. On peut donc énoncer - en particulier - le :

<u>Corollaire 1.2</u> : <u>Il existe un</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ <u>mouvement brownien réel</u> $(\hat{\beta}_t, t\leq 1)$ <u>issu de</u> 0, <u>tel que, pour tout</u> $t \in [0,1]$, <u>on ait</u> :

$$(5) \qquad \hat{B}_t = \hat{B}_0 + \hat{\beta}_t - \int_0^t \frac{\hat{B}_s}{1-s}\, ds .$$

<u>Remarque</u> : en comparant les formules (2) et (5), on obtient aisément, à l'aide de la formule (4) :

$$(6) \qquad \hat{\beta}_t = \beta_{(1-t)} - \beta_1 + \int_{1-t}^1 ds\left(\frac{1}{s}\int_0^s \frac{d\beta_u}{1-u}\right) .$$

Après avoir étudié les processus $(B_t, t\leq 1)$ et $(\hat{B}_t, t\leq 1)$ en rapport avec les filtrations $(\mathcal{G}_t)$ et $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ respectivement, il nous a semblé naturel de comparer les intégrales stochastiques, sur l'intervalle de temps $T = [0,1]$, par rapport à dB_s et $d\hat{B}_s$, de façon à obtenir une version stochastique de l'égalité :

$$\forall \varphi \in b(\mathcal{B}([0,1])), \quad \int_0^1 \varphi(s)\, ds = -\int_0^1 \varphi(1-s)\, d(1-s) .$$

A cet effet, remarquons que l'on ne peut prendre pour intégrands $(\varphi(t,\omega), t\leq 1)$ que des processus vérifiant : $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$, et $\hat{\varphi} \in \mathcal{P}(\hat{\mathcal{F}})$, où l'on note $\hat{\varphi}(t,\omega) = \varphi(1-t,\omega)$ $(t\leq 1)$. Or, on montre aisément que la tribu $\hat{\mathcal{F}}_{(1-t)} \cap \mathcal{G}_t$ $(t\leq 1)$ est la P-complétée de la tribu $\sigma\{B_1, B_t\}$. Ainsi, la classe des intégrands φ figurant dans l'énoncé de la proposition suivante est raisonnablement vaste .

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> $f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,x,y) & \longrightarrow & f(s,x,y) \end{array}$ <u>une fonction continue, telle que</u> $f'_x(s,x,y)$ <u>soit définie et continue</u>.

Alors :

$$(7) \quad \int_0^1 f(1-s, \hat{B}_s, \hat{B}_0)\, d\hat{B}_s = - \int_0^1 f(s,B_s,B_1)\, dB_s - \int_0^1 ds\, f'_x(s,B_s,B_1)$$

Démonstration :

- par régularisation en f, et passage à la limite en probabilité, il suffit de démontrer la formule (7) pour $f \in C^\infty$.

- si $f \in C^\infty$, on applique la formule d' Ito à $F(s,\hat{B}_s,\hat{B}_0)$,entre 0 et 1 , où $F(s,x,y) = \int_0^x f(1-s,u,y)\, du$,

et où l'on considère $(\hat{B}_s,\hat{B}_0)$ comme une $(\hat{\mathcal{F}}_s)_{s\leq 1}$ semi-martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ($\hat{B}_0$ est une semi-martingale constante !).

On fait de même avec $G(s,B_s,B_1)$, entre 0 et 1 , où $G(s,x,y) = \int_0^x f(s,u,y)\, du$, la filtration de référence étant ici $(\mathcal{G}_s, s \leq 1)$.

- La formule (7) découle alors de la comparaison des deux formules ainsi obtenues, et de ce que :

$F(1 ,\hat{B}_1 ,\hat{B}_0) - F(0,\hat{B}_0,\hat{B}_0) = G(0,B_0,B_1) - G(1 ,B_1 ,B_1)$.

Remarque : on peut également écrire la formule (7) sous la forme :

$$(7') \quad \int_0^1 f(1-s,\hat{B}_s,\hat{B}_0)\, d\hat{B}_s = - \mathcal{E}_1 \cdot \int_0^1 f(s,B_s,B_1)\, dB_s ,$$

où le symbole $\mathcal{E}_1 \cdot \int$ désigne l'intégrale de Stratonovitch, pour laquelle on prend, dans une subdivision $\tau = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1)$ de $[0,1]$, non pas le pointage usuel de Stratonovitch $s_i = \frac{1}{2}(t_i+t_{i+1})$, mais $s_i = t_{i+1}$ (voir [14] pour toutes ces définitions, et les résultats correspondants).

Notons encore que l'on aurait pu démontrer directement (7') en approximant le membre de gauche par des sommes du type

$$\sum_{i=0}^{n} f(1-s_i,\hat{B}_{s_i},\hat{B}_0)\, (\hat{B}_{s_{i+1}} - \hat{B}_{s_i}) ,$$

où $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m+1} = 1$, et en faisant le changement de variables $t_i = 1 - s_i$.

1.2. Le cas poissonnien.

Nous adoptons des notations semblables à celles du paragraphe 1.1 : $\mathcal{F}$ désigne la filtration naturelle du processus de Poisson $(N_t, t \geq 0)$ issu de 0, et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(N_1)\}$.

On note encore $\tilde{N}_t = N_t - t$ la $\mathcal{F}$ martingale compensée du processus croissant (N_t).

Le principal intérêt du théorème suivant réside sans doute dans la comparaison des similitudes et des différences qu'il présente avec son analogue brownien, le théorème 1 .

Théorème 1' : Il existe une $\mathcal{G}$ martingale à variation finie $(\tilde{\eta}_t, t \geq 0)$ telle que :

$$(8) \qquad \tilde{N}_t = \tilde{\eta}_t + \int_0^{t \wedge 1} \left(\frac{\tilde{N}_1 - \tilde{N}_s}{1 - s} \right) ds ,$$

formule que l'on peut encore écrire :

$$(8') \qquad N_t = \tilde{\eta}_t + \int_0^{t \wedge 1} \left(\frac{N_1 - N_s}{1 - s} \right) ds + (t - 1)^+ .$$

De plus, l'amplitude des sauts de $\tilde{\eta}$ est 1 , mais $\tilde{\eta}$ n'est pas un $\mathcal{G}$ processus de Poisson, le processus croissant $\mathcal{G}$ prévisible attaché à $\tilde{\eta}$ étant identique à :

$$(8'') \qquad \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle_t = \int_0^{t \wedge 1} \left(\frac{N_1 - N_s}{1 - s} \right) ds + (t - 1)^+ .$$

Démonstration :

- la démonstration de la formule (8) est très semblable à celle de la formule (2), et repose essentiellement sur le résultat suivant : si $0 < s < t < 1$, on a :

$$E(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s \vee \sigma(N_1)) = E(N_t - N_s \mid N_1 - N_s) = \frac{t-s}{1-s} (N_1 - N_s) .$$

- La formule (8') découle immédiatement de (8).
- Il résulte de (8'), par exemple, que :

$[\tilde{\eta},\tilde{\eta}] = [N,N] = N$, et donc, $\langle \tilde{\eta},\tilde{\eta} \rangle$ est le $\mathcal{G}$ compensateur prévisible de N, soit, toujours d'après (8') :

$$\int_0^{t\wedge 1} \left(\frac{N_1 - N_s}{1 - s}\right) ds + (t - 1)^+ \quad .$$

Le lecteur établira maintenant sans peine les corollaires du théorème 1 ', analogues aux corollaires 1.1 et 1.2, après avoir remarqué que $(U'_t = N_1 - N_{(1-t)-}, t \leq 1)$ est un processus de Poisson.

Nous terminons ce paragraphe par une remarque importante : toute $\mathcal{F}$ martingale locale étant à variation finie, c'est également une $\mathcal{G}$ semi-martingale (i.e. l'hypothèse (H') est vérifiée). Nous verrons au chapitre 2 que, par contre, (H') n'est pas vérifiée dans le cas brownien étudié en 1.1 .

2. Intégrales stochastiques et semi-martingales.

Dans tout ce second chapitre, nous nous plaçons dans le "cas brownien" étudié au paragraphe 1.1 , dont nous reprenons les notations; rappelons que $(\mathcal{F}_t)$ désigne la filtration naturelle du mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0, et pour tout t, on note :

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \left\{ \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(B_1) \right\} \quad .$$

2.1 . $\mathcal{F}$ martingales et $\mathcal{G}$ semi-martingales.

Conformément à ce que nous avons annoncé dans l'introduction, nous caractérisons maintenant les $\mathcal{F}$ martingales qui sont des $\mathcal{G}$ semi-martingales.

Théorème 3 : Soit $(X_t, t \geq 0)$ une $\mathcal{F}$ martingale locale, continue, nulle en 0. Il existe alors φ, processus $\mathcal{F}$ prévisible tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t \varphi^2(s)\, ds < +\infty \quad P \text{ p.s., et } \quad X_t = \int_0^t \varphi(s)\, dB_s \quad .$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est une $\mathcal{G}$ semi-martingale.

(ii) $\displaystyle\int_0^1 |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1 - s}\, ds < \infty$ P p.s.

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1-s}}\, ds < \infty$ P p.s.

De plus, si ces conditions sont réalisées, la $\mathcal{G}$ décomposition canonique de X est donnée par :

$$(\mathcal{S}) \quad X_t = \int_0^t \varphi(s)\, d\beta_s + \int_0^{t\wedge 1} \varphi(s) \frac{B_1 - B_s}{1 - s}\, ds \quad .$$

Avant de démontrer le théorème, nous en donnons deux conséquences immédiates.

Corollaire 3.1 : L'hypothèse (H') n'est pas vérifiée pour le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, i.e.: il existe des $\mathcal{F}$ martingales de carré intégrable qui ne sont pas des $\mathcal{G}$ semi-martingales.

Démonstration : ψ désignant une fonction définie sur $]0,1[$, posons $\varphi(s) = \psi(1-s)$ ($s \in]0,1[$), et $\varphi = 0$ sur $\complement]0,1[$.
Pour démontrer le corollaire, il suffit de construire $\psi \in L^2([0,1])$, et vérifiant $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\psi(s)|}{\sqrt{s}}\, ds = \infty$.
Les fonctions $\psi(s) = s^{-\frac{1}{2}} (-\log s)^{-\alpha} 1_{(0 < s < \frac{1}{2})}$ conviennent, lorsque $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

<u>Corollaire 3.2</u> : (10) $\displaystyle\int_{0+} \frac{B_u^2}{u^2}\, du = \int^{1^-} \frac{(B_1 - B_s)^2}{(1-s)^2}\, ds = \infty$ P p.s.

<u>Démonstration</u> : $(B_1 - B_{(1-u)}, u \leq 1)$ étant un mouvement brownien réel issu de 0, il suffit de montrer :

$$\int^{1^-} \frac{(B_1 - B_s)^2}{(1-s)^2}\, ds = \infty \quad \text{P p.s.}$$

Or, d'après la démonstration du corollaire précédent, il existe une fonction $\varphi \in L^2([0,1])$ telle que

$\displaystyle\int_0^1 |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s}\, ds$ ne soit pas P p.s. finie. En fait, d'après la loi 0-1, cette dernière intégrale est P p.s. infinie.

Donc, P p.s., la fonction $s \longrightarrow (B_1 - B_s)(\omega)\,(1-s)^{-1}$ n'appartient pas à $L^2([0,1])$, d'où (10).

<u>Remarque</u>: En supposant que $\displaystyle\int_{0+} \frac{B_u^2}{u^2}\, du < \infty$ P p.s, le lecteur obtiendra une démonstration par l'absurde, très rapide, de (10), par application de la formule d'Ito à $(B_t^2/2t)$ sur l'intervalle $[\varepsilon, a]$ $(0 < \varepsilon < a)$, et en faisant tendre ε vers 0.

<u>Début de la démonstration du théorème 3</u> :

1) Si φ est borné, l'intégrale stochastique de φ par rapport à B ne dépend pas de la filtration par rapport à laquelle B est une semi-martingale. On peut donc écrire, d'après la formule (2) :

$$(*) \quad X_t = \int_0^t \varphi(s)\, d\beta_s + \int_0^{t\wedge 1} \varphi(s) \frac{B_1 - B_s}{1-s}\, ds \, .$$

Si on suppose seulement que, pour tout t, $\displaystyle\int_0^t \varphi^2(s)\, ds < \infty$ P p.s., un passage à la limite (portant sur φ, pour la convergence en probabilité) permet de remarquer que la formule (*) est encore valide pour tout $t < 1$.

2) Montrons l'équivalence de (i) et (ii) :

- si la condition (ii) est vérifiée, l'égalité (✱), valable pour $t<1$, se prolonge par continuité à $t = 1$, et donc à tout $t \in \mathbb{R}_+$. X est donc une $\mathcal{G}$ semi-martingale, qui vérifie (✱) $\equiv$ (9) !

- inversement, si X est une $\mathcal{G}$ semi-martingale, l'unique processus $\mathcal{G}$ adapté , continu, à variation finie, A tel que X - A soit une $\mathcal{G}$ martingale locale, vérifie, d'après (✱) :

$$\forall\, t<1 ,\ A_t = \int_0^t \varphi(s)\ \frac{B_1 - B_s}{1 - s}\ ds \ .$$

On a donc : $\displaystyle\int_{]0,1]} |dA_s| = \int_0^1 ds\, |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1 - s}\ ds < \infty$ P p.s. ,

c' est à dire (ii) .

3) L'équivalence de (iii) et (ii) résulte en particulier de la

<u>Proposition 4</u> : <u>Soit</u> φ <u>un processus</u> $\mathcal{F}$ <u>prévisible tel que</u> $\forall t \geq 0,\ \int_0^t \varphi^2(s)\, ds < \infty$ P p.s. <u>Alors</u> :

$$\left\{\int_0^1 |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1 - s}\ ds < \infty\right\} = \left\{\int_0^1 \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1 - s}}\ ds < \infty\right\} \quad \text{P p.s.}$$

<u>Remarque 4'</u> : Il découle du point 1) de la démonstration du théorème 3 que, pour tout processus $\mathcal{F}$ prévisible φ tel que $\int_0^1 \varphi^2(s)\, ds < +\infty$ P p.s. ,

$$\lim_{t \uparrow\uparrow 1} \int_0^t \varphi(s)\ \frac{B_1 - B_s}{1 - s}\ ds \quad \text{existe et est finie P p.s.}$$

La démonstration de la proposition 4 repose sur quelques lemmes préliminaires. En particularisant beaucoup les résultats de Lenglart [8] , on peut énoncer comme suit le premier de ces lemmes :

Lemme 5 : Soient $(H_t)_{t \geqslant 0}$ et $(K_t)_{t \geqslant 0}$ deux processus positifs, nuls en 0, à trajectoires continues, adaptés à une filtration $\mathfrak{F}$, et vérifiant :

1) $\forall t$, $E(H_t + K_t) < +\infty$

2) $H - K$ est une $\mathfrak{F}$ martingale.

Alors $(\sup_t H_t < \infty) = (\sup_t K_t < \infty)$ P p.s.

Le lemme suivant, très simple, établit un lien entre les projections optionnelle, et duale prévisible, d'un processus croissant :

Lemme 6 : Soient $\mathfrak{F}$ une filtration, et A un processus croissant, non nécessairement $\mathfrak{F}$ adapté, tel que $\forall t$, $E(A_t) < \infty$. Alors :

a) ${}^oA - A^p$ est une $\mathfrak{F}$ martingale.

b) $(A_\infty < \infty) \supseteq (A^p_\infty < \infty)$ P p.s.

Démonstration : a) pour tout couple (s,t) vérifiant: $0 \leqslant s < t$, on a :

$E({}^oA_t - {}^oA_s \mid \mathfrak{F}_s) = E(A_t - A_s \mid \mathfrak{F}_s) = E(A^p_t - A^p_s \mid \mathfrak{F}_s)$.

b) Soient T_n les temps d'arrêt prévisibles définis par

$T_n = \inf(t, A^p_t \geqslant n)$.

$(A^p < +\infty) = \bigcup_n (T_n = +\infty)$ et $E(A_{T_n -}) = E(A^p_{T_n -}) \leqslant n$,

soit $A_\infty < +\infty$ sur $\bigcup_n (T_n = \infty)$.

Enfin, dans le dernier lemme préliminaire, on présente l'inégalité de Hardy [3] (1) sous une forme qui nous convient pour la suite. On passe de la forme "classique" de l'inégalité de Hardy à l'énoncé ci-dessous par un changement de variable élémentaire.

---

(1) voir aussi Rudin ([12], p.72).

Lemme 7 : Soit $f \in L^2([0,1])$. Pour tout $x \in [0,1[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(u)}{1-u}\, du \quad . \text{ Alors :}$$

a) $(1-x)^{\frac{1}{2}} F(x) \longrightarrow 0$ quand $x \uparrow\uparrow 1$.

b) $\|F\|_{L^2([0,1])} \leq 2 \|f\|_{L^2([0,1])}$

Démonstration de la proposition 4 :

Quitte à arrêter le processus $\int_0^t \varphi^2(s)\, ds$, nous pouvons supposer que $E(\int_0^\infty \varphi^2(s)\, ds) < \infty$. En conséquence, pour tout $t < 1$, on a :

$$E\left(\int_0^t |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s}\, ds\right) = c\, E\left(\int_0^t |\varphi(s)| \frac{ds}{\sqrt{1-s}}\right) < \infty \qquad \left(c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right).$$

Nous prenons maintenant pour intervalle de temps $T = [0,1[$ et nous allons utiliser les lemmes 5 et 6 avec la filtration $\mathcal{F}$ (on se ramène de $[0,\infty[$ à $[0,1[$ par le changement de temps $t \to \frac{t}{1+t}$).

Posons alors $A_t = \int_0^t |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s}\, ds$.

Avec les notations du lemme 6, on a pour tout t :

$${}^oA_t = E(A_t \mid \mathcal{F}_t) = \int_0^t \frac{ds\, |\varphi(s)|}{1-s} E(|B_1 - B_s| \mid \mathcal{F}_t)$$

$$\text{et} \quad A_t^p = \int_0^t |\varphi(s)| \frac{{}^o(|B_1 - B_.|)_s}{1-s}\, ds = c \int_0^t \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1-s}}\, ds \quad .$$

On peut maintenant appliquer le lemme 5 à $H = {}^oA$ et $K = A^p$, car K est continu, ainsi que H, puisque H - K , martingale pour la filtration brownienne $(\mathcal{F}_t)_{t<1}$, est continue.

Il résulte alors du lemme 5 que :

$$\left\{\sup_t H_t < \infty\right\} = \left\{\int_0^1 ds \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1-s}} < \infty\right\} \quad P \text{ p.s.}$$

Le processus $(H_t, t<1)$ étant continu, il nous suffit de démontrer que :

$$\left\{\limsup_{t\uparrow\uparrow 1} H_t<\infty\right\} = \left\{\int_0^1 ds\,|\varphi(s)|\frac{|B_1 - B_s|}{1-s}<\infty\right\} \quad P \text{ p.s.}$$

En fait, nous allons prouver :

$$(11)\quad \limsup_{t\uparrow\uparrow 1} H_t \leqslant \int_0^1 ds\,|\varphi(s)|\,\frac{|B_1 - B_s|}{1-s} \qquad P \text{ p.s.} ,$$

ce qui terminera la démonstration grâce au lemme 6-b) .

Majorons d'abord H_t comme suit :

$$H_t \leqslant \int_0^t ds\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s}\,\left\{E(|B_1 - B_t|\,|\,\mathcal{F}_t) + |B_t - B_s|\right\} .$$

$$(12)\quad H_t \leqslant c\sqrt{1-t}\int_0^t ds\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s} + |B_1 - B_t|\int_0^t ds\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s} + \int_0^1 ds|\varphi(s)|\frac{|B_1 - B_s|}{1-s}$$

Or, d'après le lemme 7-a), $\limsup_{t\uparrow\uparrow 1} \sqrt{1-t}\int_0^t ds\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s} = 0$.

En outre, la fonction déterministe $s \to E(|\varphi(s)|)$ appartient à $L^2([0,1])$ et donc, le lemme 7-a) entraine :

$$\limsup_{t\uparrow\uparrow 1} E\left(|B_1 - B_t|\int_0^t ds\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s}\right) = \limsup_{t\uparrow\uparrow 1} c\sqrt{1-t}\int_0^t \frac{E(|\varphi(s)|)}{1-s}ds = 0 .$$

Nous allons montrer maintenant que

$$(B_1 - B_t)\int_0^t ds\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s} \quad \text{converge } P \text{ p.s. lorsque } t\uparrow\uparrow 1 .$$

Cette expression convergeant dans L^1 vers 0, elle converge donc P p.s. vers 0 . Posons à cet effet

$$\Phi(t) = \int_0^t ds\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s} \quad ;$$

il vient d'après la formule d'Ito, pour tout $t<1$:

$$(B_1 - B_t)\,\Phi(t) = -\int_0^t \Phi(s)\,dB_s + \int_0^t ds\,(B_1-B_s)\,\frac{|\varphi(s)|}{1-s} .$$

L'intégrale de Riemann converge p.s. lorsque $t\uparrow\uparrow 1$ d'après la remarque 4'. D'autre part, d'après le lemme 7-b), $\int_0^1 \Phi^2(s)\,ds <\infty$ P p.s., et donc l'intégrale stochastique $\int_0^t \Phi(s)\,dB_s$

converge P p.s. lorsque $t \uparrow\uparrow 1$ vers $\int_0^1 \Phi(s)\, dB_s$. Finalement, l'inégalité (11) découle de la majoration (12), et des résultats établis à sa suite.

L'équivalence entre (ii) et (iii) [théorème 3] suggère diverses généralisations, dont celle-ci :

<u>Proposition 8</u> : <u>Soit</u> φ <u>un processus</u> $\mathcal{F}$ <u>prévisible tel que</u> : $\int_0^1 \varphi^2(s)\,(1-s)\, ds < \infty$ P <u>p.s. Alors</u> :

$$\left\{\int_0^1 ds\ |\varphi(s)| < \infty\right\} = \left\{\int_0^1 ds\ \frac{|\varphi(s)|}{1-s}(B_1 - B_s)^2 < \infty\right\} \quad \text{P } \underline{\text{p.s.}}$$

La démonstration repose sur un résultat élémentaire d'intégration, à savoir :

<u>Lemme 9</u> : <u>Soit</u> $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ <u>une fonction continue décroissante, telle que</u> $g(1) = 0$. <u>Alors, pour toute</u> $f \geqslant 0$ <u>vérifiant</u> $\int_0^1 f(u)\, g(u)\, du < \infty$, <u>on a</u> $\lim_{t \uparrow\uparrow 1} g(t) \int_0^t f(u)\, du = 0$.

<u>Démonstration</u> : g étant décroissante,

$$g(t)\, f(u)\, 1_{[0,t]}(u) \leqslant f(u)\, g(u) ,$$

et $\forall u \leqslant 1$, $g(t)\, f(u)\, 1_{[0,t]}(u) \leqslant g(t)\, f(u) \xrightarrow[(t\to 1)]{} 0$;

le résultat découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

<u>Démonstration de la proposition 8</u> :

On peut évidemment supposer $\varphi \geqslant 0$, et, par localisation , renforcer l'hypothèse initiale en $E(\int_0^1 \varphi^2(s)\,(1-s)\, ds) < \infty$.

On peut alors écrire, pour tout $t < 1$:

$$\int_0^t ds \, \frac{\varphi(s)}{1-s} (B_1 - B_s)^2 = -\int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s) d\beta_s + \int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s) dB_s$$

$$= -\int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s) d\beta_s + (B_1 - B_t)\int_0^t \varphi(s) dB_s + \int_0^t (\varphi . B)_u dB_u + \int_0^t \varphi(u) du ,$$

soit $\int_0^t ds \, \frac{\varphi(s)}{1-s} (B_1 - B_s)^2 - \int_0^t \varphi(s) ds = a_t + b_t + c_t$,

où a_t est la $\mathcal{G}$ martingale locale $-\int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s)\, d\beta_s$,

b_t la $\mathfrak{F}$ martingale locale $\int_0^t (\varphi . B)_u \, dB_u$

et $c_t = (B_1 - B_t) \int_0^t \varphi(s) \, dB_s$.

Remarquons que $(a_t, t<1)$ et $(b_t, t<1)$ sont de carré intégrable, puisque, pour tout $t<1$,

$$E([a,a]_t) = E\left(\int_0^t \varphi^2(s)(B_1 - B_s)^2 ds\right) = E\left(\int_0^t \varphi^2(s)(1-s)\, ds\right)$$

$$\leqslant E\left(\int_0^1 \varphi^2(s)\,(1-s)\, ds\right) < \infty , \text{ et}$$

$$E([b,b]_t) = E\left(\int_0^t (\varphi . B)_u^2 \, du\right) = E\left(\int_0^t \left(\int_0^u \varphi^2(s) ds\right) du\right)$$

$$= E\left(\int_0^t \varphi^2(s)\,(t-s)\, ds\right) \leqslant E\left(\int_0^1 \varphi^2(s)\,(1-s)\, ds\right) < \infty .$$

D'autre part, on a :

$$E(c_t^2) = (1-t)\, E\left(\int_0^t \varphi^2(s) ds\right) = (1-t)\int_0^t E(\varphi^2(s))\, ds,$$

expression qui converge vers 0 quand $t \to 1$ d'après le lemme 9 .

Par suite, le processus $\left(\int_0^t ds \, \frac{\varphi(s)}{1-s} (B_1 - B_s)^2 - \int_0^t ds \, \varphi(s) , \; t<1\right)$

converge dans L^2 vers $-\int_0^1 \varphi(s)(B_1 - B_s) d\beta_s + \int_0^1 (\varphi . B)_u \, dB_u$,

d'où la proposition 8 .

2.2. Sur la convergence de certaines intégrales riemanniennes.

Nous avons essayé de généraliser la proposition 8 en étudiant des intégrales du type $\int_0^1 \varphi(s)\, |B_1 - B_s|^p \, ds$; nous n'avons obtenu de résultats que dans le cas déterministe, résultats que nous présentons après avoir changé s en $(1-s)$!

Proposition 10 : Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$, telle que $\int_a^1 f(u)du < \infty$ pour tout $a > 0$. Notons $B_t^* = \sup_{s \leq t} |B_s|$, $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ et L_t le temps local de B en 0, pris en t. Alors, pour tout $p > 0$, les cinq intégrales suivantes sont simultanément finies, ou infinies P p.s. :

(i) $\int_0^1 f(u)\, |B_u|^{2p} \, du$, (ii) $\int_0^1 f(u)\, S_u^{2p} \, du$,

(iii) $\int_0^1 f(u)\, L_u^{2p} \, du$, (iv) $\int_0^1 f(u) (B_u^*)^{2p} du$, (v) $\int_0^1 f(u)\, u^p \, du$.

Démonstration : 1) notons encore $T_t = \sup_{s \leq t} (-B_s)$; T, S et L ont même loi et $T \leq B^*$, $S \leq B^*$, $|B| \leq B^* \leq T + S$. En outre, d'après un théorème de Paul Lévy, $S - B$ a même loi que $|B|$; soit c_p une constante universelle telle que :

$(x + y)^{2p} \leq c_p(x^{2p} + y^{2p})$ $\quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$; alors :

$$\int_0^1 f(u)\, S_u^{2p} \, du \leq c_p \left\{ \int_0^1 f(u)\, (S_u - B_u)^{2p} \, du + \int_0^1 f(u)\, |B_u|^{2p} \, du \right\}.$$

(i), (ii), (iii) et (iv) convergent (ou divergent) donc simultanément. De même,

$$E\left(\int_0^1 f(u)\, |B_u|^{2p} \, du \right) = \left(\int_0^1 f(u)\, u^p \, du \right) \cdot E(|B_1|^{2p})$$

et la convergence de (v) implique celle de (i) .

2) Nous supposons maintenant que (i) converge. $(B_1 - B_{(1-u)}, u \leq 1)$ a même loi que $(B_u, u \leq 1)$; par suite, (i) et (iv) convergeant simultanément, $\int_0^1 f(1-u) \sup(|B_1 - B_s|^{2p}, u \leq s \leq 1)\, du$ est P p.s. finie ; en particulier, d'après le lemme 9 ,

$$(13) \quad \limsup_{t \to 1_-} \left\{ |B_1 - B_t|^{2p} \int_0^t f(1-v)\, dv \right\}$$
$$\leq \limsup_{t \uparrow\uparrow 1} \left\{ \sup(|B_1 - B_s|^{2p}, t \leq s \leq 1) \int_0^t f(1-v)\, dv \right\} = 0 .$$

Particularisons encore : $|B_1 - B_t|^{2p} \int_0^t f(1-v)\, dv$ converge vers 0 en probabilité quand t tend vers 1 , d'où pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\lim_{t \uparrow\uparrow 1}}\, P\left(|B_1 - B_t|^{2p} \int_0^t f(1-v) dv > \varepsilon \right)$$
$$= \overline{\lim_{t \uparrow\uparrow 1}}\, P\left(|B_1|^{2p} > \varepsilon \left[(1-t)^p \int_0^t f(1-v)\, dv \right]^{-1} \right) = 0 ,$$

ce qui nécessite :

$$(14) \quad \overline{\lim_{t \uparrow\uparrow 1}}\, (1-t)^p \int_0^t f(1-v)\, dv = \overline{\lim_{t \to 0}}\, t^p \int_t^1 f(v)\, dv = 0 .$$

3) Supposant toujours que (i) converge, notons (voir la démonstration de la proposition 4) ,

$$A_t = \int_0^t f(1-v)\, |B_1 - B_v|^{2p}\, dv \qquad (E(A_t) < +\infty \quad \text{pour tout } t < 1) ,$$

$$H_t = {}^oA_t \ , \ K_t = A_t^{(p)} = \int_0^t (1-v)^p f(1-v)\, dv \qquad (t < 1) .$$

K est continu, H - K est une martingale (lemme 6-a)) de la filtration brownienne, donc est continue. Par suite (lemme 5), $\overline{\lim_{t \uparrow\uparrow 1}}\, H_t$ est fini si, et seulement si (v) converge.

Mais nous pouvons majorer (voir la démonstration de la proposition 4) H_t par :

$$(12') \quad c_p(1-t)^p\int_0^t f(1-v)dv + c_p^2\,|B_1-B_t|^{2p}\int_0^t f(1-v)\,dv$$
$$+\ c_p^2\int_0^t f(1-v)\,|B_1-B_v|^{2p}\,dv\ ;$$

d'après (13) et (14), on a donc :

$$\left\{\int_0^1 f(1-v)\,|B_1-B_v|^{2p}\,dv<\infty\right\}\subseteq\left\{\limsup_{t\uparrow\uparrow 1} H_t<\infty\right\}\ ;$$

la convergence de (i) implique donc celle de (v).

<u>Exemples</u> : 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{B_u^2}{u^2}\,du = \infty$ P p.s.

2) Si $f\in L^1_{loc}(]0,1])$, $f\geq 0$,

$\displaystyle\int_0^1 f(u)\frac{|B_u|}{u}du<\infty$ si, et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{\sqrt{u}}\,du<\infty$,

$\displaystyle\int_0^1 f(u)\,\frac{B_u^2}{u}\,du<\infty$ si, et seulement si $\displaystyle\int_0^1 f(u)\,du<\infty$;

on retrouve ainsi (heureusement!) les conclusions des propositions 4 et 8, dans le cas où φ est déterministe.

Divers théorèmes d'équivalence en loi nous permettent de déduire de la proposition 10 , la convergence ou la divergence d'autres intégrales riemanniennes.

<u>Proposition 11</u> : 1) <u>Soit</u> $(B_t, t\geq 0)$ <u>un mouvement brownien réel issu de</u> 0. <u>On note</u> $T_1 = \inf(t\geq 0,\ B_t = 1)$. <u>Alors, pour tout</u> p <u>tel que</u> $1\leq p<2$, <u>on a</u> : $\displaystyle\int_0^{T_1}\frac{ds}{(1-B_s)^p}<\infty$ P <u>p.s., mais</u> : $\displaystyle\int_0^{T_1}\frac{ds}{(1-B_s)^2}=\infty$ P <u>p.s.</u>

2) <u>Soit</u> $(R_3(t), t\geq 0)$ <u>un processus de Bessel d'ordre 3, issu de</u> 0 . <u>Alors, pour tout</u> p <u>tel que</u> $1\leq p<2$, <u>on a</u> :

$\displaystyle\int_{0+}\frac{du}{R_3(u)^p}<\infty$ P <u>p.s., mais</u> $\displaystyle\int_{0+}\frac{du}{R_3(u)^2}=\infty$ P <u>p.s.</u>

Démonstration : soit p tel que $1 \leq p \leq 2$.

1) La convergence de l'intégrale $\int_0^{T_1} ds\,(1-B_s)^{-p}$ équivaut évidemment à celle de $J \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{T_1} ds\, 1_{(B_s \geq 0)}\,(1-B_s)^{-p}$.

Si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $L^a_{T_1}$ désigne le temps local en a de $(B_t, t \geq 0)$, pris au temps $t = T_1$ (d'après le théorème de Trotter, il existe une version continue de: $a \longrightarrow L^a_{T_1}$), on a :

$$J = \int_0^1 da\,(1-a)^{-p}\, L^a_{T_1} .$$

Or, d'après un théorème de D. Ray [11] et F. Knight [7], le processus $(L^{1-a}_{T_1}, 0 \leq a \leq 1)$ a même loi que le carré d'un processus de Bessel d'ordre 2, issu de 0.

Ainsi, si (X,Y) désigne un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0, la variable J a même loi que

$$\int_0^1 da\,(1-a)^{-p}\left\{X^2_{(1-a)} + Y^2_{(1-a)}\right\} = \int_0^1 db\, b^{-p}\,(X^2_b + Y^2_b) .$$

Cette dernière intégrale est d'espérance finie si $1 \leq p < 2$, et on a prouvé ci-dessus qu'elle est infinie P p.s. si $p = 2$.

2) Rappelons que: $\lim_{t\to\infty} R_3(t) = \infty$ P p.s.

Donc, si l'on note $\tau_1 = \sup(t, R_3(t) = 1)$, on a $P(\tau_1 < \infty) = 1$.

Ainsi, la convergence de $\int_{0+} du\, R_3(u)^{-p}$ équivaut à celle de

$$K \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{\tau_1} du\, 1_{(R_3(u) \leq 1)}\, R_3(u)^{-p}$$

$$= \int_0^1 da\; a^{-p}\, \ell^a_{\tau_1} = \int_0^1 da\; a^{-p}\, \ell^a_\infty ,$$

où, pour tout $a > 0$, $(\ell^a_t, t \geq 0)$ désigne le temps local en a de R_3 (à nouveau, il existe une version bicontinue en (a,t) de ℓ).

Un second théorème dû à D. Ray et F. Knight affirme que le processus $(\ell^a_\infty, a \geq 0)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel d'ordre 2, d'où le résultat cherché, d'après l'argument utilisé dans la démonstration précédente.

Remarque : Le premier auteur étudie, dans un prochain article [5], l'hypothèse (H') relativement à la filtration naturelle $\mathcal{F}$ du mouvement brownien réel, et à $\mathcal{G}$ définie par :

pour tout t, $\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(T_1)\}$.

Il montre, en particulier, que (B_t) est une $\mathcal{G}$ semi-martingale, et l'intégrale $\int_0^{T_1} \frac{ds}{(1-B_s)^2}$ joue alors un rôle analogue à celui joué par $\int_0^1 \frac{(B_1 - B_s)^2}{(1-s)^2} ds$ dans notre étude du grossissement de $\mathcal{F}$ à l'aide de B_1 .

3. Grossissement de filtration et théorème de Girsanov.

On donne ici deux contre-exemples à (FA 2) (pour la formulation de cette assertion, se reporter à l'introduction).

3.1 . Le cas discontinu.

$\mathcal{G}$ désigne ici la filtration naturelle d'un mouvement brownien réel, issu de 0. D'après Dudley et Gutmann [2] , il existe un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$, nul en 0, adapté à la filtration $\mathcal{G}$. Notons $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle .

Alors, si $(\tilde{N}_t = N_t - t,\ t \geq 0)$ est la martingale compensée (pour $\mathcal{F}$) de (N_t), $\tilde{N}$ est un processus $\mathcal{G}$ prévisible à variation finie . Ainsi, (FA 2) n'est pas vérifiée, puisque $d\tilde{N}_t$ n'est pas absolument continue par rapport à $d\langle \tilde{N},\tilde{N}\rangle_t = dt$ (le crochet est évidemment relatif à la filtration $\mathcal{F}$).

Notons encore que, dans ce cas, l'hypothèse (H') est vérifiée, puisque toute $\mathcal{F}$ martingale (locale) est à variation finie .

3.2. Le cas continu.

$\mathcal{G}$ désigne encore la filtration naturelle d'un mouvement brownien réel B, issu de 0 . Pour tout $t \geq 0$, on note $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$, et $Y_t = 2\,S_t - B_t$. J. Pitman [10] a montré que Y est un processus de Bessel d'ordre 3. D'après ce résultat, si l'on désigne par $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle de Y, il découle de Jeulin [4] que $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien réel

$$(15) \qquad \beta = Y - \int_0^{\cdot} \frac{1}{Y_s}\, ds \quad .$$

D'après (15), β est une $\mathcal{G}$ semi-martingale telle que β - A soit une $\mathcal{G}$ martingale, si l'on note $A = 2S - \int_0^{\cdot} \frac{1}{Y_s}\, ds$.

Mais, (FA 2) n'est pas vérifiée, dA n'étant pas absolument continue par rapport à $d\langle \beta , \beta \rangle_s = ds$.

En effet, la propriété de densité de temps d'occupation pour les temps locaux d'une semi-martingale entraine que :

$$\text{pour tout } t, \int_0^t 1_{(S_s - X_s = 0)}\, ds = 0 \quad ;$$

$$\text{par contre, } \int_0^t 1_{(S_s - X_s = 0)}\, dA_s = 2 \int_0^t 1_{(S_s = X_s)}\, dS_s = 2\,S_t \neq 0 \;.$$

Pour être complets, notons que contrairement à ce qui se passait en 3.1 , la propriété (H') n'est pas vérifiée pour le couple ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$). En effet, une légére variante des arguments utilisés pour démontrer l'équivalence de (i) et (ii) au théorème 3 montre que, pour que (H') soit vérifiée, il faudrait, en particulier, que pour toute $f \in L^2_+([0,1], ds)$, l'intégrale $\int_{0+} f(s)\,|dA_s|$ soit convergente.

Les mesures dS_u et du étant étrangères (on vient de le remarquer), on a : $|dA_s| = 2\,dS_s + \frac{1}{Y_s}\,ds$.

D'où $\int_{0+} f(s)\,|dA_s| < \infty$ P p.s. $\Rightarrow \int_{0+} f(s)\,dS_s < \infty$ P p.s.

Soit alors $g(u) = u^{-\frac{1}{2}}(-\log u)^{-p}\,1_{(0 < u \leq \frac{1}{2})}$ $\quad (\frac{1}{2} < p \leq 1)$

et $f(s) \overset{\text{déf.}}{=} \int_s^1 \frac{g(u)}{u}\,du$.

$$\int_{0+} f(s)\,dS_s = \int_{0+} S_u \frac{g(u)}{u}\,du = \infty \quad \text{(Proposition 10) ;}$$

(H') n'est donc pas vérifiée .

3.3. Remarque finale.

Hormis les deux cas que nous venons d'étudier , de nombreux exemples de grossissement de filtration que nous avons rencontré vérifient (FA 2) ; citons, par exemple :

- le grossissement d'une filtration à l'aide d'une partition dénombrable d'ensembles $\mathcal{F}_\infty$ mesurables (P.A. Meyer [9]) ;
- le grossissement d'une filtration $\mathcal{F}$, pour faire d'une fin d'ensemble $\mathcal{F}$ optionnel un $\mathcal{G}$ temps d'arrêt (M. Barlow[1] et Jeulin-Yor [6] , par exemple) ;
- voir aussi le paragraphe A de [6]; etc...

Indiquons enfin que, si l'on tient encore, après les deux contre-exemples précédents, à rapprocher grossissement de filtration et changement de probabilités, via "le théorème de Girsanov", il faut s'autoriser à considérer des couples de probabilités P et Q quelconques (i.e. sans relation d'absolue continuité). La variante du théorème de Girsanov obtenue dans ce cadre général (Yoeurp-Yor [13]) ne fait plus alors apparaître de relation d'absolue continuité entre mesures aléatoires, comme c'était le cas lorsque $Q \ll P$.

Références. a) références générales .

[1] M. Barlow : Study of a filtration expanded to include an honest time . Z.für Wahr, 44(1978),307-323.

[2] R.M. Dudley et S. Gutmann : Stopping times with given laws. Séminaire de Probabilités XI,Lect. Notes in Math. 581 , 1977 .

[3] G.H. Hardy : Note on a theorem of Hilbert. Math. Zeitschrift 6 (1920), 314-317.

[4] T. Jeulin : Grossissement d'une filtration et applications (dans ce volume)

[5] T. Jeulin : Variables aléatoires et grossissement d'une filtration (en préparation).

[6] T. Jeulin et M. Yor : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus (à paraître aux Annales de l' ENS, 1978).

[7] F.B. Knight : Random walks and a sojourn density process of Brownian motion. TAMS 109 (1963), 56-86 .

[8] E. Lenglart : Convergence comparée de processus . (à paraître à : Stochastics , 1979).

[9] P.A. Meyer : Sur un théorème de J. Jacod (Séminaire de Probabilités XII,Lect. Notes in Math. 649, 1978).

[10] J. Pitman : One dimensional Brownian motion and the three dimensional Bessel process. Adv.in Proba. 7 (1975) 511-526 .

[11] D. Ray : Sojourn times of Diffusion processes
Illinois J. Math. 7 (1963), 615-630 .

[12] W. Rudin : Real and Complex Analysis. Mc Graw Hill (1966) .

[13] Ch. Yoeurp et M. Yor : Espace orthogonal à une semi-martingale, applications.(A paraître au Z.f.W. 1978).

[14] M. Yor : Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XI,Lect. Notes in Math. 581 , 1977 .

b)références relatives au paragraphe 1

[15] V.Mackevičius: Formula for Conditional Wiener Integrals. Int. Symposium on Stoch. Diff. Equations. August 28-Sept.2 ,1978, Vilnius. Abstracts of Communications.

[16] B.Jamison: The Markov Processes of Schrödinger . Z. fur Wahr. ,32, 323-331, 1975.

[17] J.Yeh: Inversion of Conditional Wiener Integrals. Pacific J.Math,59,2, 623-638, 1975 .

Université P. et M. Curie
Laboratoire de Probabilités
2, Place Jussieu - Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05