SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS-DADE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Inégalités de normes avec poids

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 313-331
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__313_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

INEGALITES DE NORMES AVEC POIDS

par C. Doléans-Dade et P.A. Meyer

Cet exposé doit être considéré uniquement comme un travail de mise au point, sans aucune originalité : il a été commencé en 1976, rédigé deux fois, abandonné deux fois, et depuis lors ce qu'il pouvait contenir de nouveau (et qui n'était pas bien considérable) a été découvert par d'autres auteurs. En revanche, nous avons essayé dans cette dernière rédaction d'être aussi complets que possible.

Les inégalités de normes avec poids ont une longue histoire en analyse, où elles sont largement utilisées dans les travaux sur les fonctions maximales et les opérateurs intégraux singuliers. Citons les noms de Muckenhoupt, Hunt, Wheeden, Coifman, Fefferman... En probabilités, les principaux résultats ont été obtenus, soit par N. Kazamaki et ses élèves (M. Izumisawa, T. Sekiguchi, Y. Shiota), soit par A. Bonami et D. Lépingle. Nous ne sommes pas remontés aux sources en ce qui concerne l'analyse, mais nous nous sommes servis de l'excellente monographie de Reimann et Rychener [1] sur BMO.

1. DEFINITIONS FONDAMENTALES

Nous travaillons sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant aux conditions habituelles (nous supposons que $\underline{\underline{F}} = \bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$, et que $\underline{\underline{F}}_{0-}$ est dégénérée). Notre donnée principale est un processus $Z=(Z_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ adapté, à trajectoires càdlàg., strictement positif ainsi que le processus Z_- de ses limites à gauche. Dans la plupart des applications , Z sera une martingale $Z_t=E[Z_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$, mais il est commode de traiter le cas général.

<u>On dit que</u> Z <u>satisfait à la condition</u> b_λ, <u>où</u> λ <u>est un nombre</u> $\neq 0$, <u>s'il existe un nombre</u> $K \geq 1$ <u>tel que l'on ait pour tout</u> t (<u>y compris</u> t=0-)

$$\frac{1}{K}Z_t \leq E[Z_\infty^\lambda|\underline{\underline{F}}_t]^{1/\lambda} \leq KZ_t \quad \underline{\text{p.s.}} \tag{1}$$

<u>On dit que</u> Z <u>satisfait à la condition</u> b_λ^- (b_λ^+) <u>s'il satisfait à la demi-inégalité de gauche</u> (<u>de droite</u>).

Nous commenterons ces inégalités plus loin. Il est commode d'utiliser des notations abrégées telles que "$Z\in b_\lambda^+(K)$", pour exprimer que Z satisfait à la condition b_λ^+ avec la constante K.

Nous introduirons une autre condition, que nous n'utiliserons cependant que tout à la fin de l'exposé. Elle concerne les sauts de Z .

On dit que Z satisfait à la condition (S) s'il existe $K>0$ tel que

(2) $\frac{1}{K}Z_- \leqq Z \leqq KZ_-$ (à ensemble évanescent près).

Comme pour (1), on dédouble cette condition en sa moitié gauche (S^-), et sa moitié droite (S^+).

Ici encore, nous utiliserons des notations abrégées : $Z\in(S^+)$ ou $Z\in S^+(K)$.

2. COMMENTAIRES

a) Nous introduirons aussi la condition (moins importante)

$$B_\lambda \Longleftrightarrow (b_\lambda \text{ et } (S))$$

notée avec une majuscule, pour la raison suivante : les conditions multiplicatives que nous étudions sur Z sont (lorsque Z est une martingale) liées à des conditions additives portant sur le "logarithme stochastique" $M_t = \int_0^t dZ_s/Z_{s-}$ de Z. Par exemple, (S) équivaut à dire que M est une martingale locale à sauts bornés ; la condition B_λ est étroitement liée à l'appartenance de M à BMO, tandis que la condition b_λ est analogue à l'appartenance de M à l'espace noté maintenant $\underline{\underline{bmo}}$ (avec des minuscules) en théorie des martingales locales. Notre emploi des majuscules et des minuscules est donc conforme à l'usage de la théorie des martingales.

Dans les situations de l'analyse, en revanche (martingales dyadiques), les distinctions s'estompent, car toutes les martingales positives satisfont, sinon à la condition (S), du moins à (S^+)

b) Pourquoi a t'on pris $\lambda\neq 0$? En fait la condition b_0 existe, mais nous ne l'étudierons pas : c'est la condition

(3) $\frac{1}{K}Z_t \leqq \exp(E[\log Z_\infty|\underline{\underline{F}}_t]) \leqq KZ_t$

où l'espérance conditionnelle a un sens si $Z_\infty \in L^1$ (mais peut valoir $-\infty$).

c) Supposons $\lambda>0$. Alors la condition $b_\lambda(K)$ s'écrit aussi

$$\frac{1}{K^\lambda} Z_t^\lambda \leqq E[Z_\infty^\lambda|\underline{\underline{F}}_t] \leqq K^\lambda Z_t^\lambda$$

donc $Z\in b_\lambda(K) \Longleftrightarrow Z^\lambda \in b_1(K^\lambda)$, et plus précisément $Z\in b_\lambda^\pm(K) \Longleftrightarrow Z^\lambda \in b_1^\pm(K^\lambda)$. On a des résultats analogues pour $\lambda<0$.

On notera que si Z est une martingale, Z^λ n'en est plus une en général. C'est pour cela qu'il est intéressant de sortir du cas des martingales.

d) Même si la v.a. Z_∞^λ n'est pas intégrable, le processus $E[Z_t^\lambda|\underline{\underline{F}}_t]$ est la limite d'une suite croissante de martingales, et par conséquent admet une version càdlàg. Nous supposerons dans la suite qu'une telle version a été choisie ; alors les inégalités b_λ, $b_\lambda^\pm$ peuvent être interprétées comme des inégalités entre processus càdlàg., vraies hors d'un ensemble évanescent.

e) On peut aussi s'étonner du rôle particulier joué par Z_∞ dans (1). En réalité, il n'est pas bien grand - du moins, tant qu'on ne sépare pas b_λ^+ de b_λ^-. En effet, nous avons la petite propriété suivante :

<u>Si</u> $Z \in b_\lambda(K)$, <u>pour tout t. d'a.</u> S <u>le processus arrêté</u> Z^S <u>satisfait à</u> $b_\lambda(K^2)$.

DEMONSTRATION. Posons $Y=Z^S$. D'après c) nous pouvons supposer $\lambda=1$. Nous avons d'après b_1^- et la remarque d) ci-dessus

$$\frac{1}{K}Z_S \leq E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_S]$$

Le côté gauche vaut Y_∞. Conditionnons par rapport à $\underline{\underline{F}}_t$ et appliquons b_1^+

$$\frac{1}{K}E[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \leq E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_S | \underline{\underline{F}}_t] = E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_{S\wedge t}] \leq KZ_{S\wedge t} = KY_t$$

nous avons donc établi que $Y \in b_1^+(K^2)$. On raisonne de même pour l'autre demi-inégalité.

f) [sans grande importance pour la suite] . Revenons à la remarque a) ci-dessus. Si l'on a B_λ , on a aussi pour tout t. d'a. T une inégalité de la forme suivante (noter l'analogie avec la définition de BMO)

$$\frac{1}{C}Z_{T-} \leq E[Z_\infty^\lambda | \underline{\underline{F}}_T] \leq CZ_{T-} \text{ p.s.} \tag{4}$$

où C ne dépend que des constantes figurant dans b_λ et (S). Inversement, supposons (4) satisfaite, et introduisons le processus càdlàg. $M_t = (E[Z_\infty^\lambda | \underline{\underline{F}}_t])^{1/\lambda}$ (remarque d)). Alors (4) s'écrit $\frac{1}{C}Z_- \leq M \leq CZ_-$, d'où $\frac{1}{C}Z \leq M \leq CZ$, c'est à dire $b_\lambda(C)$. D'autre part on vérifie comme en e) que (4) est préservée par arrêt à S, quitte à remplacer C par C^2. Prenant alors S=T, on trouve

$$\frac{1}{C^2}Z_{T-} \leq Z_T \leq C^2 Z_{T-}$$

c'est à dire $S(C^2)$. Ainsi (4) équivaut à B_λ .

3. INTERPRETATION DE b_λ^- , $\lambda<0$. CAS GENERAL

Nous supposons dans les n^os 3 et 4 que $\lambda<0$. La fonction x^λ étant alors convexe, toute martingale positive satisfait à $b_\lambda^+(1)$, et la moitié importante de b_λ est la condition b_λ^- . C'est à elle que nous allons nous intéresser.

Nous associons à $\lambda<0$ le nombre $p>1$

$$p = 1 - \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{-1}{p-1} \tag{5}$$

La condition $b_\lambda^-(K)$ s'écrit alors

$$a_p(K) \quad : \quad Z_t . E[(\frac{1}{Z_\infty})^{\frac{1}{p-1}} | \underline{\underline{F}}_t]^{p-1} \leq K \tag{6}$$

qui est apparue maintes fois en analyse sous le nom de <u>condition</u> (A_p) <u>de</u>

Muckenhoupt (nous la notons a_p avec une minuscule, d'après la remarque 2 a)).

La fonction $E[X^r \mid \underline{\underline{F}}_t]^{1/r}$ est croissante pour $r\in]0,\infty[$, quelle que soit la v.a. positive X. Il en résulte que $E[(\frac{1}{Z_\infty})^{1/p-1} | \underline{\underline{F}}_t]^{p-1}$ est une fonction décroissante de p, et que la condition a_p devient donc de plus en plus faible. On écrit souvent $Z\in a_\infty$ pour exprimer qu'il existe un p et un K tels que $Z\in a_p(K)$.

PROPOSITION 1. Le processus Z satisfait à la condition $b_\lambda^-(K)=a_p(K)$ si et seulement si les opérateurs

(7) $\qquad X \longmapsto Z_t^{1/p}\, E[XZ_\infty^{-1/p} | \underline{\underline{F}}_t]$ [1]

sont bornés sur L^p, avec une norme ne dépassant pas $K^{1/p}$.

DEMONSTRATION. Si la condition $a_p(K)$ est satisfaite, on a pour $X\geq 0$

$$E[XZ_\infty^{-1/p} | \underline{\underline{F}}_t] \leq E[X^p | \underline{\underline{F}}_t]^{1/p}\, E[Z_\infty^{-q/p} | \underline{\underline{F}}_t]^{1/q}$$

où q est l'exposant conjugué de p. Donc

$$Z_t E[XZ_\infty^{-1/p} | \underline{\underline{F}}_t]^p \leq E[X^p | \underline{\underline{F}}_t](Z_t E[Z_\infty^{-q/p} | \underline{\underline{F}}_t]^{p/q})$$

mais $q/p = 1/p-1$, de sorte que la dernière parenthèse est majorée par K d'après (6), et l'opérateur (7) a une norme au plus égale à $K^{1/p}$.

Inversement, supposons que l'opérateur (7) ait une norme $\leq K^{1/p}$ dans L^p, ce qui s'écrit

$$E[Z_t E[XZ_\infty^{-1/p} | \underline{\underline{F}}_t]^p] \leq KE[X^p]$$

Prenons pour X la v.a. $I_A Z_\infty^{-1/p(p-1)} I_{\{Z_\infty > a\}}$, avec $a>0$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$. Comme A est arbitraire, on en déduit

$$Z_t E[Z_\infty^{-1/p-1} I_{\{Z_\infty > a\}} | \underline{\underline{F}}_t]^p \leq KE[Z_\infty^{-1/p-1} I_{\{Z_\infty > a\}} | \underline{\underline{F}}_t]$$

L'espérance conditionnelle au second membre étant bornée, on en tire

$$Z_t E[Z_\infty^{-1/p-1} I_{\{Z_\infty > a\}} | \underline{\underline{F}}_t]^{p-1} \leq K$$

et il ne reste plus qu'à faire tendre a vers 0 pour obtenir (6).

REMARQUE. La proposition 1 suggère une manière naturelle de définir la condition $a_1(K)$: on écrit que les opérateurs $X \longmapsto Z_t E[XZ_\infty^{-1} | \underline{\underline{F}}_t]$ sont de norme $\leq K$ dans L^1, c'est à dire

$$E[XZ_t/Z_\infty] \leq KE[X]$$

et enfin $Z_t/Z_\infty \leq K$. Cela suggère encore de compléter la famille des conditions $b_\lambda(K)$ par l'inégalité suivante

---

1. A priori, le second membre n'est défini que pour $X\geq 0$. C'est donc seulement après prolongement à L^p qu'on peut parler d'opérateur en toute rigueur. Le lecteur nous pardonnera.

$$(8) \qquad b_{-\infty}(K) \quad : \quad \frac{1}{K}Z_t \leqq Z_\infty \leqq KZ_t$$

et les demi-inégalités correspondantes $b^{\pm}_{-\infty}(K)$. Cette remarque est due à A. Uchiyama.

Que peut être alors $b_{+\infty}(K)$? Lorsque λ est fini (aussi pour $\lambda=0$) on a $Z\epsilon b_\lambda(K)$ si et seulement si $Z^{-1}\epsilon b_{-\lambda}(K)$; $Z\epsilon b_\infty(K)$ signifie donc que $\frac{1}{KZ_t} \leqq \frac{1}{Z_\infty} \leqq \frac{K}{Z_t}$, inégalité qui en fait est équivalente à (8).

REMARQUES. a) L'inégalité $b^-_\lambda(K) \;=\; a_p(K)$ reste vraie lorsqu'on remplace t par un temps d'arrêt T ; les opérateurs $X \longmapsto Z_T^{1/p}E[XZ_\infty^{-1/p}|\underline{\underline{F}}_T]$ ont donc tous une norme $\leqq K^{1/p}$ dans L^p.

b) Ecrivons cela sous la forme suivante ($X\geqq 0$)

$$E[Z_T E[XZ_\infty^{-1/p}|\underline{\underline{F}}_T]^p] \leqq KE[X^p]$$

puis remplaçons X par XI_A, $A\epsilon\underline{\underline{F}}_T$. Nous avons aussitôt

$$Z_T E[XZ_\infty^{-1/p}|\underline{\underline{F}}_T]^p \leqq KE[X^p|\underline{\underline{F}}_T]$$

Introduisons une martingale positive arbitraire $Y_t=E[Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ et appliquons l'inégalité précédente avec $X = Y_\infty Z_\infty^{1/p}$. Il vient

$$(9) \qquad Z_T Y_T^p \leqq KE[Z_\infty Y_\infty^p|\underline{\underline{F}}_T]$$

Inversement, si cette inégalité est satisfaite, on peut remonter les calculs jusqu'à (7). L'inégalité (9) signifie que, pour <u>toute</u> martingale Y positive, ZY^p satisfait à $b_1^-(K)$.

4. CAS DES MARTINGALES : b_λ^- COMME INEGALITE DE NORME AVEC POIDS

Nous allons supposer maintenant que Z est une martingale positive (ce qui sous-entend que Z_∞ est intégrable : nous supposerons de plus que $E[Z_\infty]=1$ pour simplifier). Nous commençons par introduire quelques notations.

Nous désignons par $\hat{P}$ la loi de probabilité $Z_\infty P$, qui est équivalente à P : la martingale Z est la martingale fondamentale du changement de loi, et les espérances conditionnelles par rapport à la loi $\hat{P}$ sont notées de la manière suivante :

$$(10) \qquad \hat{E}[X|\underline{\underline{F}}_T] = \frac{1}{Z_T}E[XZ_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$$

D'une manière générale, il est commode de noter avec un ^ les éléments de la théorie des processus relatifs à $\hat{P}$ (par exemple, $\hat{L}^r$ pour $L^r(\hat{P})$). Il y a en fait une symétrie complète entre les deux lois P et $\hat{P}$, la martingale fondamentale du changement de loi inverse étant le processus $1/Z$.

Dans ces conditions, la proposition 1 admet l'interprétation suivante

PROPOSITION 1'. La martingale fondamentale Z du changement de loi satisfait à la condition $b_\lambda^-(K)=a_p(K)$ si et seulement si les opérateurs d'espérance conditionnelle $Y \mapsto E_t=E_P[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ ont une norme $\leqq K^{1/p}$ dans $\hat{L}^p$.

DEMONSTRATION. Il s'agit d'exprimer que les opérateurs (7), pour X positif, ont une norme $\leqq K^{1/p}$ sur L^p, soit

$$E[Z_t E[XZ_\infty^{-1/p}|\underline{\underline{F}}_t]^p] \leqq KE[X^p] \quad (X\geqq 0)$$

Prenant $X=YZ_\infty^{1/p}$ $(Y\geqq 0)$ cela équivaut à

$$E[Z_t E[Y|\underline{\underline{F}}_t]^p] \leqq KE[Z_\infty Y^p]$$

ou encore à $\hat{E}[(E_tY)^p] \leqq K\hat{E}[Y^p]$.

REMARQUES. a) La propriété vaut aussi pour les opérateurs d'espérance $E_T = E[.|\underline{\underline{F}}_T]$ aux t.d'a. T.

b) La proposition 1' exprime que certains opérateurs importants (ici les $E[.|\underline{\underline{F}}_T]$; il y en a d'autres, tels que les opérateurs maximaux des martingales, qui sont non-linéaires) sont bornés, non seulement dans les L^p ordinaires, mais dans les $\hat{L}^p$, qui sont des espaces L^p avec poids. De là le nom d'inégalités de normes avec poids.

c) Si l'on remplace Y par YI_A $(A\in\underline{\underline{F}}_t)$ dans la dernière inégalité de la démonstration, on obtient (en posant $Y_t=E_tY$)

(11) $$Y_t^p \leqq K\hat{E}[Y_\infty^p]$$

autrement dit, la martingale (Y_t) satisfait à la condition $\hat{b}_p^-(K^{1/p})$, le $\hat{b}$ signifiant que la condition est relative à $\hat{P}$. Plus généralement, on peut montrer que

si un processus Y satisfait à une condition b_μ^- $(\mu>0)$ par rapport à P, il satisfait à une condition $\hat{b}_{\mu p}^-$ par rapport à $\hat{P}$.

On peut multiplier les remarques de ce genre, mais présentent elles un intérêt quelconque ?

A toute v.a. $X\in L^1$ associons la martingale $X_t=E[X|\underline{\underline{F}}_t]$ (càdlàg.) et posons $X^* = \sup_t|X_t|$; l'opérateur non linéaire $X\mapsto X^*$ est l'opérateur maximal des P-martingales. L'inégalité de Doob nous donne aussitôt le corollaire suivant :

COROLLAIRE . Si Z satisfait à a_p, l'opérateur maximal des P-martingales est borné dans $\hat{L}^r$ pour tout $r>p$.

DEMONSTRATION. Si $X\in L^r(\hat{P})$, on a $|X|^p\in L^{r/p}(\hat{P})$, donc $\sup_t \hat{E}[|X|^p|\underline{\underline{F}}_t]\in\hat{L}^{r/p}$ d'après l'inégalité de Doob (le lecteur écrira les constantes). Or nous déduisons de (11) que $|X_t|^p \leqq \hat{E}[|X|^p|\underline{\underline{F}}_t]$, donc $X^{*p} \leqq \sup_t\hat{E}[|X|^p|\underline{\underline{F}}_t]$ et finalement $X^{*p}\in\hat{L}^{r/p}$, $X^*\in\hat{L}^r$.

Que se passe t'il lorsque r=p ? Nous verrons plus loin que lorsque

Z satisfait à une condition (S), l'opérateur maximal est effectivement borné dans L^p. Mais on a le résultat suivant, dû à A. Uchiyama, qui montre que la condition $Zea_p(K)$ est <u>équivalente</u> au fait que l'opérateur maximal est de type <u>faible</u> (p,p) relativement à $\hat{P}$.

PROPOSITION 2. <u>Pour que</u> Z <u>satisfasse à</u> $a_p(K)$, <u>il faut et il suffit que l'on ait, pour toute</u> P-<u>martingale positive</u> $Y_t=E[Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$

(12) $$c^p\,\hat{P}\{Y^*\geqq c\}\leqq K\hat{E}[Y^p_\infty] \qquad (c\geqq 0)$$

DEMONSTRATION. Pour montrer que $(Zea_p(K))\Rightarrow(12)$, nous écrivons la proposition 1' en un t. d'a. T

$$\hat{E}[Y^p_T]\leqq K\hat{E}[Y^p_\infty]$$

et nous prenons $T=\inf\{t : Y_t\geqq c\}$. Alors le côté gauche domine $c^p\hat{P}\{Y^*>c\}$, et le signe $\geq$ s'obtient par un passage à la limite.

Dans l'autre sens, nous fixons t, et nous appliquons (12) à la martingale $Y'_s = E[I_AY_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$, qui coincide avec I_AY sur $[t,\infty[$. Nous en déduisons

$$c^p\,\hat{P}\{Y_t\geqq c,\ A\}\leqq K\hat{E}[Y^p_\infty I_A]$$

et comme A est arbitraire

$$c^pI_{\{Y_t\geqq c\}}\leqq K\hat{E}[Y^p_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$$

Soit c rationnel, et soit $A=\{K\hat{E}[Y^p_\infty|\underline{\underline{F}}_t]<c^p\}$; cette inégalité ne peut avoir lieu sur A que si $Y_t<c$ p.s. sur A, ce qui entraîne, en faisant parcourir à c l'ensemble des rationnels

$$Y^p_t\leqq K\hat{E}[Y^p_\infty|\underline{\underline{F}}_t] \text{ p.s.}$$

d'où aussitôt $\hat{E}[Y^p_t]\leqq K\hat{E}[Y^p_\infty]$, et $Zea_p(K)$ d'après la proposition 1'.

5. INTERPRETATION DE b^+_q , $q>1$

Nous revenons au cas général, avec une proposition semblable à la proposition 1, mais moins utile. Nous désignons par p et q deux exposants conjugués, et λ et p restent liés par (5).

PROPOSITION 3. <u>Le processus</u> Z <u>satisfait à</u> $b^+_q(K)$ <u>si et seulement si les opérateurs</u>

(13) $$X\mapsto Z_t^{-1}E[XZ_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$$

<u>sont bornés dans</u> L^p, <u>avec une norme au plus égale à</u> K.

DEMONSTRATION. On peut procéder directement, à la manière de la prop.1. Nous raisonnerons plutôt ainsi : on a $Zeb^+_q(K)$ ssi $Z^{-p}eb^-_{-q/p}(K^p)$ (la vérification est immédiate sur (1)). Or $-q/p=\lambda$, donc on retrouve $b^-_\lambda(K^p) = a_p(K^p)$, et d'après la proposition 1 tout revient à écrire que les opérateurs

$$X\mapsto (Z_t^{-p})^{1/p}\,E[X(Z_\infty^{-p})^{-1/p}|\underline{\underline{F}}_t]$$

sont de norme au plus $(K^p)^{1/p}$ dans L^p. Cela équivaut à l'énoncé.

Dans le cas des martingales, nous reprenons les notations du n°4 :

PROPOSITION 3'. <u>La martingale fondamentale</u> Z <u>du changement de loi satisfait à la condition</u> $b_q^+(K)$ <u>si et seulement si les opérateurs d'espérance conditionnelle</u> $\hat{E}_t=\hat{E}[.|\underline{\underline{F}}_t]$ <u>ont une norme</u> $\leqq K$ <u>dans</u> L^p.

DEMONSTRATION. Evidente : les opérateurs $\hat{E}_t$ sont les opérateurs (13).

REMARQUE. En rapprochant les propositions 3' et 1', on voit que

$$(Z \text{ vérifie } b_q^+(K)) \iff (1/Z \text{ vérifie } \hat{a}_p(K^p)=\hat{b}_\lambda^-(K^p))$$

6. LE <<LEMME DE GEHRING >>

Pour la première fois, nous allons faire intervenir les conditions sur les <u>sauts</u> de Z, et démontrer des résultats un peu fins. Notre version du "lemme de Gehring" , établie indépendamment par Lépingle, est une synthèse entre le lemme de Gehring tel qu'il est énoncé par Reimann-Rychener (où (Z_t) est une martingale, et dans l'énoncé $\lambda=1$ et $\mu>1$) et la "reverse Hölder inequality" de Coifman-Fefferman, dans laquelle (Z_t) satisfait à une condition $a_p=b_\lambda^-$ ($\lambda<0$) et Z est une martingale ($\mu=1$).

PROPOSITION 4. <u>Supposons que</u> Z <u>possède la propriété</u> S^+. <u>Alors si</u> Z <u>satisfait à la fois à</u> b_λ^- <u>et à</u> b_μ^+ , <u>avec</u> $\lambda<\mu$, $0<\mu$, <u>il existe</u> $\varepsilon>0$ <u>tel que</u> Z <u>satisfasse à</u> $b_{\mu+\varepsilon}^+$. [Z n'est pas nécessairement une martingale ici]

Si ce résultat est intéressant, c'est bien sûr parce que $b_{\mu+\varepsilon}^+$ est plus forte que b_μ^+ si $\mu>0$. Quitte à remplacer Z par $Z^{1/\mu+\varepsilon}$, cela revient en effet à dire que b_1^+ est plus forte que b_θ^+ si $0<\theta<1$, ce qui résulte aussitôt de la concavité de la fonction x^θ.

Nous établissons d'abord des résultats auxiliaires.

LEMME 1. <u>Soit</u> U <u>une v.a. positive</u>. <u>On suppose qu'il existe trois constantes</u> $K\geqq 0$, $\beta>0$, ε ($0<\varepsilon\leqq 1$) <u>telles que</u>

$$(14)\qquad \int_{\{U>\lambda\}} UP \leqq K\lambda^\varepsilon \int_{\{U>\beta\lambda\}} U^{1-\varepsilon}P$$

<u>Alors il existe une constante</u> C <u>et un nombre</u> $r>1$ (<u>dépendant de</u> K,β,ε) <u>tels que l'on ait</u>

$$(15)\qquad E[U^r]^{1/r} \leqq CE[U] .$$

DEMONSTRATION. Nous pouvons toujours diminuer β, car cela ne fait qu'augmenter le second membre de (14) . Nous supposons donc $\beta<1$.

Nous allons commencer par construire C et r tels que

(16) si $E[U]\leqq 1$ et $E[U^r]<\infty$, alors $E[U^r]\leqq C^r$

Nous en déduirons (15) par homogénéité, en remplaçant U par tU, lorsque $E[U^r]<\infty$. Après quoi nous lèverons cette hypothèse grâce à un artifice, comme dans la démonstration de l'inégalité de Doob usuelle.

Nous multiplions les deux membres de (14) par $a\lambda^{a-1}$ ($a>0$) et nous intégrons de 1 à l'infini.

Côté gauche : $\int_{\{U>1\}} UP\int_1^U a\lambda^{a-1}d\lambda = \int_{\{U>1\}} (U^{1+a}-U)P$.

Côté droit : $K\int_{\{U>\beta\}} U^{1-\varepsilon}P \int_1^{U/\beta} a\lambda^{a-1+\varepsilon}d\lambda = \frac{Ka}{a+\varepsilon}\int_{\{U>\beta\}} U^{1-\varepsilon}((\frac{U}{\beta})^{a+\varepsilon}-1)P$

$\leqq k\int_{\{U>\beta\}} U^{1+a}P$ où $k=\frac{Ka}{a+\varepsilon}\beta^{-a-\varepsilon}$

$\leqq k\int_{\{U>1\}} U^{1+a}P + k$ (en effet $\int_{\{1\geqq U>\beta\}} U^{1+a}P \leqq 1$)

Choisissons a assez petit pour que $k<1$, et posons $r=1+a$. Si $E[U^r]<\infty$, $E[U]\leqq 1$, nous pouvons passer $\int_{\{U>1\}} U^rP$ du côté gauche :

$$(1-k)\int_{\{U>1\}} U^rP \leqq E[U]+k \leqq 2$$

et enfin $E[U^r] \leqq 1+ 2/1-k$, l'inégalité (16) cherchée .

Pour passer au cas général, nous remarquons que la propriété que nous avons établie (C et r ayant le sens déterminé plus haut)

$((14)$ et $E[U^r]<\infty) \Rightarrow (E[U^r] \leqq C^rE[U]^r)$

vaut, non seulement lorsque P est de masse 1, mais aussi lorsque P est bornée de masse $\geqq 1$. Si U est bornée, il n'y a rien à prouver. Si U n'est pas bornée, soit m grand, tel qu'il existe x où $U(x)=m$. Posons

$$P' = I_{\{U<m\}}P + j\varepsilon_x \quad \text{où} \quad j = \frac{1}{m}\int_{\{U\geqq m\}} UP$$

La mesure P' est de masse $\geqq 1$, et U est bornée P'-p.s. par m. Vérifions que U satisfait à (14) relativement à P' . Il en résultera que $E'[U^r] \leqq E'[U]^r=E[U]^r$, après quoi on fera tendre m vers $+\infty$.

(14) est évidente si $\lambda\geqq m$, le côté gauche étant nul. Nous voulons vérifier :

i) $\int_{\{U>\lambda\}} UP' \leqq \int_{\{U>\lambda\}} UP$. Comme les deux mesures sont égales sur $\{U<m\}$, cela revient à voir que $\int_{\{U\geqq m\}} UP' \leqq \int_{\{U\geqq m\}} UP$, ou que $jm\leqq \int_{\{U>m\}} UP$. En fait on a l'égalité.

ii) $\int_{\{U>\beta\lambda\}} U^{1-\varepsilon}P' \geqq \int_{\{U>\beta\lambda\}} U^{1-\varepsilon}P$. Comme les deux mesures coïncident sur $\{U<m\}$, et $\beta\lambda<m$, cela revient à voir que $\int_{\{U\geqq m\}} U^{1-\varepsilon}P' \geqq \int_{\{U\geqq m\}} U^{1-\varepsilon}P$, ou que $jm^{1-\varepsilon} \geqq \int_{\{U\geqq m\}} U^{1-\varepsilon}P$, ou enfin que

$\int_{\{U\geqq m\}} \frac{U}{m}P \geqq \int_{\{U\geqq m\}} (\frac{U}{m})^{1-\varepsilon}P$, ce qui est évident.

Nous donnons une autre forme du lemme 1 :

LEMME 2. Soit Z une v.a. positive, et soit $q>1$. On suppose qu'il existe une constante $K\geqq 0$, une constante $h\in]0,1[$ telles que

(17) $$\int_{\{Z>\mu\}} Z^q P \leqq K\mu^{q-1}\int_{\{Z>h\mu\}} ZP$$

Alors il existe une constante C et un exposant $q'>q$ (dépendant de q,K, h) tels que $\|Z\|_{L^{q'}} \leqq C\|Z\|_{L^q}$.

DEMONSTRATION. On pose $U=Z^q$, $\lambda=\mu^q$, $\beta=h^q$, et l'on a

$$\int_{\{U>\lambda\}} UP \leqq K\lambda^{(q-1)/q}\int_{\{U>\beta\lambda\}} U^{1/q}P$$

et on applique le lemme 1. On voit que $\varepsilon=1-\frac{1}{q}$: le lemme 2 est presque équivalent au lemme 1, mais laisse échapper le cas $\varepsilon=1$, qui est très important.

DEMONSTRATION

1) $0<\lambda<\mu$. On peut se ramener à $\lambda=1$, $\mu=q>1$ (c'est le lemme de Gehring proprement dit).

Nous posons $T = \inf\{s : Z_s\geqq\lambda\}$, et nous écrivons d'abord la propriété b_1^- :

$$\lambda P\{T<\infty\} \leqq \int_{\{T<\infty\}} Z_T P \leqq k\int_{\{T<\infty\}} Z_\infty P,$$

$$= k\Big(\int_{\{T<\infty,Z_\infty>h\lambda\}} Z_\infty P + \int_{\{T<\infty,Z_\infty\leqq h\lambda\}} Z_\infty P \Big) \qquad (kh<1)$$

$$\leqq k\int_{\{Z_\infty>h\lambda\}} Z_\infty P + kh\lambda P\{T<\infty\}$$

d'où notre première inégalité

(*) $$\lambda P\{T<\infty\} \leqq \frac{k}{1-kh}\int_{\{Z_\infty>h\lambda\}} Z_\infty P$$

Ensuite, nous utilisons b_q^+ et (S^+) simultanément, sous la forme de l'inégalité $E[Z_\infty^q\,|\underline{\underline{F}}_T] \leqq KZ_{T-}^q$, majoré par $K\lambda^q$ sur $\{T<\infty\}$:

$$\int_{\{Z_\infty>\lambda\}} Z_\infty^q P \leqq \int_{\{T<\infty\}} Z_\infty^q P = \int_{\{T<\infty\}} E[Z_\infty^q\,|\underline{\underline{F}}_T]P \leqq K\lambda^q P\{T<\infty\}$$

$$\leqq K\frac{k}{1-kh}\lambda^{q-1}\int_{\{Z_\infty>h\lambda\}} Z_\infty P \text{ d'après } (*)$$

et le lemme 2 nous donne $E[Z_\infty^{q'}]^{1/q'} \leqq CE[Z_\infty^q]^{1/q}$. Ce n'est pas encore $b_{q'}^+$, mais si nous appliquons cela au processus $(Z_{t+s}/Z_t)_{s\geqq 0}=Y_s$, p.r. à la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_{t+s})_{s\geqq 0}$, et à la loi $\overline{P}(B)=P(B\cap A)/P(A)$ $(A\in\underline{\underline{F}}_t)$, nous voyons que Y satisfait à b_1^-,b_q^+,S^+ avec les mêmes constantes que Z, et que de plus $\overline{E}[Y_\infty^q\}$ reste borné uniformément. Donc $\overline{E}[Y_\infty^{q'}]$ l'est aussi, et c'est le résultat cherché.

2) $\lambda<0<\mu$. <u>On peut se ramener à</u> $\lambda<0$, $\mu=1$, <u>et noter que</u> $b_\lambda^-=a_p$ $(p=1-\frac{1}{\lambda})$. C'est le cas traité par Coifman et Fefferman, que nous décalquons ici.

Comme (Z_t) satisfait à a_p , nous avons pour tout temps d'arrêt T la propriété (9)

pour toute martingale positive (U_t) , $Z_T U_T^p \leqq kE[Z_\infty U_\infty^p | \underline{\underline{F}}_T]$

Prenons $U_\infty = I_{\{Z_\infty \leqq \beta Z_T\}}$ $(\beta<1)$. Alors

$$Z_T P\{Z_\infty \leqq \beta Z_T | \underline{\underline{F}}_T\}^p \leqq kE[Z_\infty I_{\{Z_\infty \leqq \beta Z_T\}} | \underline{\underline{F}}_T] \leqq k\beta Z_T$$

divisant par Z_T , il vient $P\{Z_\infty \leqq \beta Z_T | \underline{\underline{F}}_T\} \leqq (k\beta)^{1/p}$. Si β est assez petit nous pouvons appeler ce nombre 1-a, avec $0<a<1$, et alors

$$P\{Z_\infty > \beta Z_T | \underline{\underline{F}}_T\} \geqq a > 0 \qquad \text{d'où}$$

$$(*) \qquad P\{Z_\infty > \beta Z_T, T<\infty | \underline{\underline{F}}_T\} \geqq aI_{\{T<\infty\}}$$

Reprenons alors $T=\inf\{t : Z_t>\lambda\}$ et notons que $Z_T \leqq c\lambda$ d'après (S^+) sur $\{T<\infty\}$. Ecrivons la condition b_1^+

$$E[Z_\infty I_{\{Z_\infty>\lambda\}}] \leqq E[Z_\infty I_{\{T<\infty\}}] = E[E[\ldots | \underline{\underline{F}}_T]] \leqq E[KZ_T I_{\{T<\infty\}}]$$
$$\leqq Kc\lambda P\{T<\infty\} \leqq \frac{Kc}{a}\lambda P\{Z_\infty > \beta Z_T\} \text{ d'après } (*)$$

Appliquant le lemme 1 avec $\varepsilon=1$, nous avons un $r>1$ tel que $E[Z_\infty^r]^{1/r} \leqq cE[Z_\infty]$. Pour conclure à b_r^+ , on raisonne comme dans la première partie.

3) $\lambda=0<\mu$. Ce sera pour nous une occasion de petites remarques sur b_0^-.

La première, c'est que comme b_μ^+ est satisfaite , $E[Z_\infty^\mu | \underline{\underline{F}}_t]^{1/\mu} \leqq kZ_t$, donc $E[\log^+ Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t] < \infty$ p.s., et b_0^- a bien un sens. La seconde, c'est que Z satisfait à b_0^- si et seulement si Z^α satisfait à b_0^- $(\alpha>0)$. La troisième, c'est que $E[\log Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \leqq \log E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$, donc

b_0^- : $Z_t \leqq K\exp(E[\log Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t]) \Rightarrow Z_t \leqq KE[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$, i.e. $b_0^- \Rightarrow b_1^-$

Comme nous pouvons remplacer Z par Z^α (notre seconde remarque) nous voyons que b_0^- est plus forte que toutes les b_λ^- , $\lambda>0$, et le cas 3) est un corollaire du cas 1) (lemme de Gehring). Il figure d'ailleurs en tant que tel dans le livre de Reimann-Rychener.

COROLLAIRE. <u>Si</u> (Z_t) <u>satisfait à</u> (S^-) <u>et à une condition</u> a_p $(p>1)$, <u>ainsi qu'à une condition</u> b_θ^+ <u>avec</u> $\theta > -\frac{1}{p-1}$, <u>alors</u> (Z_t) <u>satisfait à une condition</u> $a_{p'}$, <u>avec</u> $1<p'<p$. [DEMONSTRATION : appliquer Gehring à 1/Z] .

Cela s'applique en particulier aux martingales $(\theta=1)$. Mais la condition (S^-) est moins naturelle que (S^+) pour les martingales positives.

REMARQUE. Dans le cas des martingales dyadiques (en temps discret), on a les deux énoncés suivants :

- Toute martingale strictement positive Z qui satisfait à une condition b_q^+ $(q>1)$ satisfait à une condition $b_{q+\varepsilon}^+$ $(\varepsilon>0)$ (th. de Gehring)
- Toute martingale strictement positive Z qui satisfait à une condition a_p $(p>1)$ satisfait à une condition $a_{p-\varepsilon}$ $(0<\varepsilon<p-1)$ (th. de Muckenhoupt)

Ces deux énoncés semblent exactement semblables, mais la réalité est plus complexe . En effet, dans le cas dyadique , toutes les martingales positives satisfont à la condition (S^+), de sorte que le théorème de Gehring résulte de notre proposition 4. Mais Z ne satisfait pas nécessairement à la condition (S^-), de sorte qu'on ne peut pas appliquer la prop. 4 à $1/Z$. On tourne cette difficulté de la manière suivante.

Ecrivons la condition a_p pour Z

$$(18)\qquad E[Z_\infty|\underline{\underline{F}}_t].E[(\frac{1}{Z_\infty})^{1/p-1}|\underline{\underline{F}}_t]^{p-1} \leqq K$$

et posons $U_\infty=(1/Z_\infty)^{1/p-1}$, $Z_\infty=(1/U_\infty)^{1/q-1}$. Nous avons

$$(19)\qquad E[(\frac{1}{U_\infty})^{1/q-1}|\underline{\underline{F}}_t]^{q-1}E[U_\infty|\underline{\underline{F}}_t] \leqq K^{q-1}$$

et la martingale $U_t=E[U_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ satisfait à une condition a_q, c'est à dire à une condition b_μ^- $(\mu<0)$. Comme U satisfait à b_μ^- et b_1^+ , ainsi qu'à (S^+), la proposition 4 nous dit qu'elle satisfait à $b_{1+\varepsilon}^+$, c'est à dire (en posant $1+\varepsilon=\frac{p-1}{p'-1}$, $1<p'<p$)

$$E[U_\infty^{1+\varepsilon}|\underline{\underline{F}}_t]^{1/1+\varepsilon} \leqq CE[U_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$$

$$E[(\frac{1}{Z_\infty})^{1/p'-1}|\underline{\underline{F}}_t]^{p'-1} \leqq C^{p-1}E[(\frac{1}{Z_\infty})^{1/p-1}|\underline{\underline{F}}_t]^{p-1}$$

et en revenant à (18), après multiplication par $E[Z_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$

$$E[Z_\infty|\underline{\underline{F}}_t].E[(\frac{1}{Z_\infty})^{1/p'-1}|\underline{\underline{F}}_t]^{p'-1} \leqq KC^{p-1}$$

c'est à dire une condition $a_{p'}$, comme promis. Nous avons commis un léger abus de langage en parlant de la "martingale" (U_t) sans savoir que U_∞ est intégrable : ce n'est pas grave, car d'après (18), $E[U_\infty|\underline{\underline{F}}_0]$ est une v.a. p.s. finie . Or $\underline{\underline{F}}_0$ est triviale dans le cas classique.

Revenant alors au corollaire suivant la proposition 1', nous voyons que pour les martingales dyadiques, ce corollaire est valable pour $r=p$ aussi.

7. RETOUR AUX INEGALITES DE NORMES AVEC POIDS

Nous revenons à la situation du n° 4 : nous avons deux lois équivalentes P et $\hat{P}$, les martingales fondamentales du changement de loi

$$Z_t = E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \ (Z_\infty = d\hat{P}/dP) \quad , \quad \hat{Z}_t = \hat{E}[\hat{Z}_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \ (\hat{Z}_\infty = dP/d\hat{P})$$

liées par la relation $Z\hat{Z} = 1$. $\underline{\underline{F}}_{0-}$ étant triviale, $Z_{0-} = \hat{Z}_{0-} = 1$. Nous désignons par $\mathcal{E}$ l'exponentielle de C. Doléans, par $\mathcal{L}$ le logarithme stochastique :

$$(20) \qquad \mathcal{E}X_t = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t) \prod_{0 \leq s \leq t} (1+\Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \qquad (\mathcal{E}X_{0-} = 1)$$

$$(21) \qquad \mathcal{L}X_t = \int_{[0,t]} \frac{dX_s}{X_{s-}} \qquad (\mathcal{L}X_{0-} = 0)$$

Dans (20), $\langle X^c, X^c\rangle$ est le crochet de la partie martingale continue de la semimartingale X, et à ce titre il semble dépendre de la loi ; mais c'est aussi la partie continue du processus croissant $[X,X]$, qui n'en dépend pas.

Nous introduisons les deux processus

$$(22) \qquad M = \mathcal{L}Z \quad ; \quad \hat{M} = \mathcal{L}\hat{Z} \qquad (\text{ noter : } \Delta M = \Delta Z/Z_- \ , \ \Delta\hat{M} = -\Delta Z/Z\ )$$

M est une martingale locale/P , $\hat{M}$ une martingale locale/$\hat{P}$; M et $\hat{M}$ sont toutes deux nulles par convention pour $t=0-$. Compte tenu de l' identité de Yor [4]

$$(23) \qquad \mathcal{E}(U)\mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U+V+[U,V])$$

la relation $\mathcal{E}(M)\mathcal{E}(\hat{M})=1$ nous donne

$$(24) \qquad M+\hat{M}+[M,\hat{M}] = 0$$

Soit X une semimartingale ($X_{0-}=0$) ; supposons d'abord que X n'ait aucun saut égal à -1. Alors $\mathcal{E}(X)=Y$ ne s'annule jamais, non plus que ses limites à gauche. Il en est de même de $\tilde{Y}=\mathcal{E}(Y)/Z$, et nous pouvons définir $\tilde{X}=\mathcal{L}\tilde{Y}$. Si X est une martingale locale/P, Y en est une aussi, $\tilde{Y}$ est alors une martingale locale/$\hat{P}$, et $\tilde{X}$ aussi. La correspondance entre X et $\tilde{X}$ s'écrit

$$\mathcal{E}(\tilde{X}) = \mathcal{E}(X)/Z = \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(\hat{M}) \ ; \quad \mathcal{E}(X)=\mathcal{E}(\tilde{X})Z = \mathcal{E}(\tilde{X})\mathcal{E}(M)$$

ce qui en utilisant (23) s'écrit

$$\tilde{X} = X+\hat{M}+[X,\hat{M}] \quad , \quad X = \tilde{X}+M+[\tilde{X},M]$$

Posons $\overline{X}=X+[X,\hat{M}]$, de sorte que $\tilde{X}=\overline{X}+\hat{M}$. La seconde relation devient $X= \overline{X}+[\overline{X},M] + \hat{M}+M+[\hat{M},M] = \overline{X}+[\overline{X},M]$ d'après (24). Nous avons donc obtenu

$$(25) \qquad \overline{X}=X+[X,\hat{M}] \ , \quad X=\overline{X}+[\overline{X},M] \quad (\text{ donc } [X,\hat{M}]= -[\overline{X},M])$$

Ces relations ont été établies lorsque X n'a aucun saut égal à -1, mais en les appliquant à tX où t est convenablement choisi, on voit qu'elles ont lieu en toutes généralité, et établissent deux bijections réciproques de l'ensemble des semimartingales sur lui même. De plus, si X est une martingale locale/P , $\overline{X}$ est une martingale locale/$\hat{P}$, et réciproquement. Il est très facile de voir que ce qu'on a obtenu ainsi est exactement l'expression du théorème de Girsanov donnée dans le sém.X, p. 377.

Nous avons écrit $\overline{X}$, et non $\hat{X}$, parce que si l'on fait X=M on trouve $\overline{X}=-\hat{M}$, d'où un certain danger de confusion.

PROPOSITION 5. <u>Supposons que</u> Z <u>satisfasse à la condition</u> (S). <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

i. Z <u>vérifie une condition</u> $a_p=b_\lambda^-$,$\lambda<0$ (par rapport à P)

ii. Z <u>vérifie une condition</u> b_μ^+ , $\mu>1$ (par rapport à P)

iii. $\hat{Z}$ <u>vérifie une condition</u> $\hat{a}_p = \hat{b}_\lambda^-$, $\lambda<0$ (par rapport à $\hat{P}$)

iv. $\hat{Z}$ <u>vérifie une condition</u> $\hat{b}_\mu^+$, $\mu>1$ (par rapport à $\hat{P}$)

DEMONSTRATION. i => ii : Z vérifie b_λ^- et b_1^+ , donc $b_{1+\varepsilon}^+$ d'après la condition (S^+) et le lemme de Gehring.

ii => iii : C'est la remarque suivant la proposition 3'.

iii => iv : Même démonstration que i => ii, mais ici c'est la condition (S^+) de 1/Z , ou (S^-) de Z, qui est utilisée.

iv => i : Remarque suivant la proposition 3'.

Nous poursuivons l'étude du changement de lois, en exprimant les conditions précédentes au moyen de M ou $\hat{M}$. Pour l'instant, notre donnée est Z ou $\hat{P}$: nous savons donc a priori que Z est une martingale/P uniformément intégrable ; le problème serait différent si notre donnée était M, Z étant définie par $Z=\mathcal{E}(M)$. On en dira un mot plus loin.

PROPOSITION 6. <u>Pour que</u> Z <u>satisfasse à</u> (S) <u>et aux conditions équivalentes de la proposition</u> 5, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u>

v. $M\in BMO(P)$, <u>et il existe</u> $h>0$ <u>tel que</u> $1+\Delta M \geqq h$

<u>ou</u>[1]

vi. $\hat{M}\in BMO(\hat{P})$, <u>et il existe</u> $h>0$ <u>tel que</u> $1+\Delta\hat{M} \geqq h$.

DEMONSTRATION. La condition (S) s'écrit $\frac{1}{K}\leqq Z/Z_- \leqq K$, ou $\frac{1}{K} \leqq \Delta M+1 \leqq K$. Elle signifie donc que l'on a une inégalité de la forme $1+\Delta M\geqq h>0$, et que les sauts de M sont aussi bornés supérieurement. Supposons cette condition satisfaite, et montrons que i <=> ([M,M] engendre un potentiel borné). On raisonnerait de même sur $\hat{M}$ pour avoir vi .

A) La condition a_p peut s'écrire, avec $c=1/p-1$

$$E[(\frac{Z_t}{Z_\infty})^c|\underline{\underline{F}}_t] \leqq K$$

Explicitons Z en fonction de M : nous notons que Z est une semimartingale jusque à l'infini, donc M_∞ est bien défini et $[M,M]_\infty$ est une v.a. finie.

1. L'équivalence entre v et vi nous a été communiquée par M. Izumisawa.

$$E[\exp(cM_t - cM_\infty + \frac{c}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t^\infty)\prod_{u>t}(\frac{e^{\Delta M_u}}{1+\Delta M_u})^c \;|\underline{\underline{F}}_t] \leqq K$$

Or ΔM_u appartient à un intervalle $[-1+h,H]$. Sur cet intervalle on a $\frac{e^x}{1+x} \geqq e^{jx^2}$, où j est une constante positive que l'on peut supposer $\leqq \frac{1}{2}$. Alors nous avons

$$E[\exp(cM_t - cM_\infty + cj[M,M]_t^\infty)|\underline{\underline{F}}_t]$$

$$\leqq E[\exp(cM_t - cM_\infty + \frac{c}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t^\infty + cj\sum_{u>t}\Delta M_u^2)|\underline{\underline{F}}_t] \leqq E[\ldots|\underline{\underline{F}}_t] \leqq K$$

Soit T un t. d'a. tel que $M^T=N$ soit une vraie martingale ; nous écrivons une inégalité de Jensen

$$\exp(E[cj[N,N]_t^\infty|\underline{\underline{F}}_t]) = \exp(E[cN_t - cN_\infty + cj[N,N]_t^\infty|\underline{\underline{F}}_t])$$

$$\leqq E[\exp(cN_t - cN_\infty + cj[N,N]_t^\infty)|\underline{\underline{F}}_t] \leqq K^2 \quad (\text{n°2, remarque e}))$$

faisant tendre T vers l'infini, nous obtenons

$$\exp(E[cj[M,M]_t^\infty|\underline{\underline{F}}_t]) \leqq K^2$$

et l'on voit que $[M,M]$ engendre un potentiel borné : M étant à sauts bornés, on a $M \in BMO$. Cette partie du raisonnement est très proche de l'article [3].

B) Inversement, supposons que M appartienne à BMO. Nous utilisons une inégalité en sens inverse, de la forme $e^{jx^2} \geqq \frac{e^x}{1+x}$ pour $x \in [-1+h,H]$ - cette fois ci on supposera $j \geqq 1/2$ - pour écrire

$$E[(\frac{Z_t}{Z_\infty})^c|\underline{\underline{F}}_t] \leqq E[\exp(cM_t - cM_\infty + \frac{c}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t^\infty + cj\sum_{u>t}\Delta M_u^2)|\underline{\underline{F}}_t]$$

$$\leqq E[\exp(c\sup_{u>t}|M_\infty - M_t|)\exp(cj[M,M]_t^\infty)|\underline{\underline{F}}_t]$$

et si c est assez petit, on a les inégalités du type John-Nirenberg

$$E[\exp(2c\sup_{u>t}|M_\infty - M_t|)\;|\underline{\underline{F}}_t] \leqq C_1$$

$$E[\exp(2cj[M,M]_t^\infty)\;|\underline{\underline{F}}_t] \leqq C_2$$

et l'inégalité de Schwarz nous donne alors

$$E[(\frac{Z_t}{Z_\infty})^c|\underline{\underline{F}}_t] \leqq \sqrt{C_1 C_2}$$

qui est une condition a_p .

REMARQUE. On peut régler le problème posé juste avant la proposition 6 : partons d'une martingale M qui appartient à BMO, avec des sauts $\geqq -1+h$ $(h>0)$, de sorte que $Z=\mathcal{E}(M)$ est une martingale locale positive d'espérance

$\leqq 1$ ($Z_{0-}=1$), donc une surmartingale positive. Kazamaki d'une part, et indépendamment ses élèves Izumisawa, Sekiguchi et Shiota, ont démontré le fait très remarquable que Z est uniformément intégrable, et même bornée dans un L^p, $p>1$.

Comme nous avons démontré le lemme de Gehring pour des processus qui ne sont pas nécessairement des martingales, nous pouvons donner de ce résultat une démonstration très simple. En effet

- Z satisfait à la condition (S^+)
- Z est une surmartingale, donc satisfait à $b_1^+(1)$
- Z satisfait à une condition $a_p=b_\lambda^-$ ($\lambda<0$), d'après la seconde partie de la proposition 6 (qui repose uniquement sur les propriétés de M).

D'après le lemme de Gehring, Z satisfait à une condition $b_{1+\varepsilon}^+$:

$$E[Z_\infty^{1+\varepsilon}|\underline{\underline{F}}_t] \leqq CZ_t^{1+\varepsilon}$$

Prenant t=0-, nous voyons que $E[Z_\infty^{1+\varepsilon}]\leqq C$. Remplaçant M par M^T, Z par Z^T, nous avons que $E[Z_T^{1+\varepsilon}]\leqq C$, et Z est donc bornée dans $L^{1+\varepsilon}$.

Voici une autre proposition, due à Kazamaki:

PROPOSITION 7. Supposons que Z satisfasse à (S) et aux conditions équivalentes de la proposition 5. Alors l'application $X\mapsto\overline{X}=X+[X,\hat{M}]$ (25) est un isomorphisme (d'e.v.t.) entre $BMO_0(P)$ et $BMO_0(\hat{P})$[1].

DEMONSTRATION. Comme nous avons vu au début du n°7 que $X\mapsto\overline{X}$ est une bijection entre les martingales locales/P nulles en 0_- et les martingales locales/$\hat{P}$ nulles en 0_- , dont la bijection réciproque est du même type, il nous suffit en fait de démontrer qu'il existe des constantes γ et C telles que $\|X\|_{BMO(P)}\leqq\gamma \Rightarrow \|\overline{X}\|_{BMO(\hat{P})}\leqq C$.

Nous choisissons la constante γ de telle sorte que le processus $Y=\mathcal{E}(X)$ soit positif, et satisfasse aux conditions

$(S(k))$: $1/k \leqq Y/Y_- \leqq k$

$b_{-1}^-(k)$: $E[Y_t/Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t] < k$ (donc $E[(Y_t/Y_\infty)^r|\underline{\underline{F}}_t] \leqq k^r$, $0<r<1$)

avec une constante k dépendant seulement de γ. La possibilité d'un tel choix est une variante facile de la prop. 6. Voir aussi [ ].

D'autre part, le processus Z satisfait à (S) et à une condition b_s^+ ($s>1$) d'après la proposition 5, ii . Nous écrivons cela

$1/\ell \leqq \hat{Z}/\hat{Z}_- \leqq \ell$, $E[(\hat{Z}_t/\hat{Z}_\infty)^s|\underline{\underline{F}}_t] \leqq \ell^s$

Appliquons maintenant l'inégalité de Holder avec les exposants conjugués $a=s/(s-1-v)$, $b=s/(v+1)$, où $v>0$ est assez petit pour que $b>1$, $a>1$, $av\leqq 1$ (par exemple, $v=(s-1)/(s+1)$, $b=(s+1)/2$, $va=1$) :

1. La notation BMO_0 signifie que les martingales sont nulles on 0- .

$$E[(\frac{Y_t}{Y_\infty})^v(\frac{\hat{Z}_t}{\hat{Z}_\infty})^{v+1}|\underline{\underline{F}}_t] \leq E[(\frac{Y_t}{Y_\infty})^{av}|\underline{\underline{F}}_t]^{1/a}\,E[(\frac{\hat{Z}_t}{\hat{Z}_\infty})^{b(v+1)}|\underline{\underline{F}}_t]^{1/b}$$

mais $av\leq 1$, $b(v+1)=s$, donc ceci est majoré par $m=k^v\ell^{v+1}$. D'autre part, en posant $\overline{Y}=Y\hat{Z}$, qui est une martingale locale/$\hat{P}$, cette inégalité peut s'écrire

$$\hat{E}[(\overline{Y}_t/\overline{Y}_\infty)^v|\underline{\underline{F}}_t] \leq m$$

c'est à dire une condition $\hat{a}_p(K)$, où p et K ne dépendent que de γ, et d'autre part $\overline{Y}$ satisfait à une condition (S), avec un coefficient qui ne dépend que de γ. Nous en déduisons que $\|\mathcal{L}\overline{Y}\|_{BMO(\hat{P})}$ est majorée par une quantité qui ne dépend que de γ (prop.6). Enfin, $\overline{X}=\mathcal{L}\overline{Y}-\hat{M}$ a une norme uniformément bornée dans BMO($\hat{P}$), et la proposition est démontrée.

Peut être cette démonstration est elle trop compliquée ? La démonstration de Kazamaki n'a été publiée en détail que dans le cas des martingales continues. En revanche, nous suivons Kazamaki de très près dans la démonstration de la proposition suivante.

PROPOSITION 8. <u>Sous les mêmes hypothèses sur</u> X, <u>l'application</u>

(26) $$X \mapsto Z_-^{-1/p}\cdot\overline{X}$$

<u>est un isomorphisme</u> (d'e.v.t.) <u>de</u> $\underline{\underline{H}}^p$ <u>sur</u> $\hat{\underline{\underline{H}}}^p$, <u>pour</u> $1\leq p<\infty$.

DEMONSTRATION. Cette application, que nous noterons $X\mapsto X'$ dans la suite de la démonstration, est bien définie pour toute semimartingale X (rappelons que le $\cdot$ désigne une intégrale stochastique en (26). D'autre part nous avons écrit $\underline{\underline{H}}^p$, $\hat{\underline{\underline{H}}}^p$, mais comme dans la proposition 7 nous nous simplifierons la vie en supposant toutes les martingales nulles en 0-.

Soit q l'exposant conjugué de p. Il nous suffit de démontrer que pour toute martingale/$\hat{P}$ bornée Y, on a pour $1<p<\infty$

(27) $$\hat{E}[\int_0^\infty |d[X',Y]_s|] \leq c_p\|X\|_{\underline{\underline{H}}^p}\,\|Y\|_{\hat{\underline{\underline{H}}}^q}$$

Si p=1, $\hat{\underline{\underline{H}}}_\infty$ doit être interprété comme BMO($\hat{P}$). En effet, X' est une martingale locale/$\hat{P}$, et en passant au sup sur les Y bornées appartenant à la boule unité de $\hat{\underline{\underline{H}}}_q$ on obtient une norme équivalente à $\|X'\|_{\hat{\underline{\underline{H}}}^p}$. Cela prouve que $X\mapsto X'$ est continue de $\underline{\underline{H}}^p$ dans $\hat{\underline{\underline{H}}}^p$. Mais d'autre part cette application est inversible sur l'ensemble des semimartingales, et son inverse correspond simplement à l'échange de P et $\hat{P}$: le même raisonnement établit donc l'isomorphisme des deux espaces.

Nous commençons par le cas où p>1. Nous avons besoin de la remarque suivante (qui aurait dû trouver sa place au début de l'exposé). Comme Z vérifie une condition b_{-a}^- (a>0),

$$Z_t^a \geqq E[\frac{1}{Z_\infty^a}|\underline{\underline{F}}_t]$$

et comme la fonction x^{-r} ($r>0$) est convexe décroissante, nous avons d'après l'inégalité de Jensen

$$Z_t^{ar} \leqq K^{ar} E[Z^{ar}|\underline{\underline{F}}_t]$$

autrement dit, Z satisfait à toutes les conditions b_μ^- ($\mu>0$) (les conditions sont triviales pour $\mu \geqq 1$, car Z est une martingale ; c'est l'intervalle $]0,1[$ qui nous intéresse).

Nous écrivons alors les inégalités suivantes, où la constante c_p peut varier de place en place.

$$\begin{aligned}
\hat{E}[\int|d[X',Y]_s|\,] &= \hat{E}[\int Z_{s-}^{-1/p}|d[\overline{X},Y]_s|\,] \\
&\leqq c_p\, \hat{E}[\int Z_s^{-1/p}|d[\overline{X},Y]_s|\,] \qquad (\text{ condition (S)}) \\
&= c_p\, E[Z_\infty \int Z_s^{-1/p}|d[\overline{X},Y]_s|\,] \\
&= c_p\, E[\int Z_s^{1-1/p}|d[\overline{X},Y]_s|\,] = c_p\, E[\int Z_s^{1/q}|d[\overline{X},Y]_s|\,] \\
\rightarrow \quad &\leqq c_p\, E[Z_\infty^{1/q}\int|d[\overline{X},Y]_s|\,] \qquad (\text{ propriété } b_{1/q}^-\ ) \\
&\leqq c_p\, E[([\overline{X},\overline{X}]_\infty^{1/2})(Z_\infty^{2/q}[Y,Y]_\infty)^{1/2}] \quad (\text{ inégalité de K-W }) \\
&\leqq c_p\, E[[\overline{X},\overline{X}]_\infty^{p/2}]^{1/p}\, E[Z_\infty [Y,Y]_\infty^{q/2}]^{1/q} \qquad (\text{ Hölder})
\end{aligned}$$

Le dernier terme est simplement $\|Y\|_{\hat{\underline{\underline{H}}}^q}$. Reste l'avant dernier. Nous avons $\overline{X} = X+A$, où $A=[X,\hat{M}]$. Donc $[\overline{X},\overline{X}] \leqq 2([X,X]+[A,A])$. Or $[A,A]_\infty = \sum \Delta X^2 \Delta\hat{M}^2$, et les sauts de $\hat{M}$ sont bornés, et finalement $[\overline{X},\overline{X}] \leqq k[X,X]$, de sorte que cet avant dernier facteur est majoré par $c_p\|X\|_{\underline{\underline{H}}^p}$.

Passons au cas où p=1. Tout subsiste sans changement jusqu'à la $\rightarrow$, après quoi on a

$$\hat{E}[\int|d[X',Y]_s|\,] \leqq c_1 E[\int|d[\overline{X},Y]_s|\,]$$

Comme Y est une martingale/$\hat{P}$ bornée, Y appartient à BMO($\hat{P}$), et il existe $U \in BMO(P)$, avec $\|U\|_{BMO(P)} \leqq c\|Y\|_{BMO(\hat{P})}$, telle que $Y=\overline{U}=U+[U,\hat{M}]$ (prop. 7). Nous avons alors

$$[\overline{X},Y]_t = \langle\overline{X}^c,\overline{U}^c\rangle_t + \sum_0^t \Delta\overline{X}_s\Delta\overline{U}_s = \langle X^c,U^c\rangle_t + \sum_0^t \Delta\overline{X}_s\Delta\overline{U}_s$$

Mais comme $\hat{M}$ est à sauts bornés, on a $|\Delta\overline{X}_s| \leqq k|\Delta X_s|$, $|\Delta\overline{U}_s| \leqq k|\Delta U_s|$, donc

$$\int|d[\overline{X},Y|_s| \leqq (1+k^2)\int|d[X,U]_s|$$

En vertu de l'inégalité de Fefferman, nous obtenons alors une majoration par $c_1\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|U\|_{BMO} \leqq c_1'\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|Y\|_{BMO(\hat{P})}$. La proposition est établie.

BIBLIOGRAPHIE

Nous nous sommes beaucoup servis de :

[1]. H.M. REIMANN, T. RYCHENER. Funktionen beschraenkter mittlerer Oszillation, Lecture N. in M. 487, Springer 1975.

et nous avons aussi utilisé (pour le lemme de Gehring)

[2]. R.R. COIFMAN et C. FEFFERMAN. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math. 51, 1974, p.241-250.

En théorie des martingales, nous avons repris notre propre article (d'ailleurs inspiré par les travaux de Kazamaki)

[3]. C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER. Une caractérisation de BMO. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes 581, Springer 1977.

et pour le n°7, la proposition 4, p.485, de

[4]. M. YOR. Une suite remarquable de formules exponentielles. Séminaire de probabilités X, Lecture notes n°511, Springer 1976.

La proposition 2 est empruntée (avec une démonstration simplifiée) à

[5]. Akihito UCHIYAMA. Weight functions on a probability space with a sequence of non decreasing σ-fields. A paraître au Tohoku M.J.

Toute la fin de l'exposé est empruntée à l'un ou l'autre des travaux suivants (les premiers ne concernent que les martingales continues)

[6]. N. KAZAMAKI. On transforming the class of BMO martingales by a change of law. A paraître.

[7]. N. KAZAMAKI et T. SEKIGUCHI. On the transformation of some classes of martingales by a change of law. A paraître.

[8]. N. KAZAMAKI. A sufficient condition for the uniform integrability of exponential martingales. Toyama Math. Report (à paraître).

[9]. M. IZUMISAWA et N. KAZAMAKI. Weighted norm inequalities for martingales. Tohoku M.J. 29, 1977, p. 115-124.

[10] M. IZUMISAWA, T. SEKIGUCHI, Y. SHIOTA. Remark on a characterization of BMO martingales. Tohoku M. J., à paraître.

[11] N. KAZAMAKI. Transformation of H_p-martingales by a change of law. Zeitschrift W-th. A paraître.

Voir aussi dans ce volume un article de Izumisawa et Sekiguchi.

Le travail suivant n'est pas encore paru, et nous n'en avons eu communication qu'après avoir rédigé le nôtre,

[12] A. BONAMI et D. LEPINGLE. Fonction maximale et variation quadratique des martingales en présence d'un poids.

On y trouvera en particulier des inégalités avec poids concernant la variation quadratique, sujet que nous n'avons pas abordé ici.