CHRISTOPHE STRICKER

Une remarque sur l'exposé précédent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 238-239
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__238_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

UNE REMARQUE SUR L'EXPOSE PRECEDENT

par C. Stricker

Les notations et les références sont celles de l'exposé précédent. Nous voudrions ici préciser les rapports entre les résultats de cet exposé et ceux de Lépingle [2], et ajouter un complément. Comme on l'a déjà dit, l'exposé précédent n'apporte pas de résultat nouveau par rapport à [2] : seule la méthode de démonstration, due à Bruneau dans le cas des surmartingales continues, puis généralisée aux surmartingales continues à droite, peut être considérée comme nouvelle. Il faut ajouter à cela que le cas des surmartingales se ramène aisément à celui des martingales (mais notre démonstration n'est pas plus compliquée pour les surmartingales !). En effet, si X est une surmartingale positive avec $X^*\varepsilon L^p$, $p>1$, X admet une décomposition de Doob $X=M-A$, où M est une martingale bornée dans L^p, A un processus croissant tel que $A_\infty \varepsilon L^p$; on a alors

$$v_p(X)^{1/p} \leqq v_p(M)^{1/p} + v_p(A)^{1/p}$$

et comme A est croissant, il est facile de voir que $v_p(A)= A^p_\infty$. On est donc ramené à l'étude de M. Cette remarque nous a été communiquée par un "referee" de l'article de Bruneau.

Nous voudrions montrer ensuite que la démonstration de la convergence p.s. telle qu'elle est faite dans l'article [2] peut se simplifier, dès que l'on sait que la p-variation est finie pour p>2. Nous employons des notations probabilistes. mais en réalité nous allons travailler trajectoire par trajectoire, la loi de probabilité n'intervenant pas.

Soit X_t une trajectoire càdlàg. à q-variation finie sur [0,t], où q est <p. Nous allons montrer que pour toute subdivision $S=(t_i)_{i=1,..,n}$ de [0,t] suffisamment fine, on a

$$(1) \qquad \Sigma_s |\Delta X_s|^p - 2\varepsilon \leqq \Sigma_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^p \leqq \Sigma_s |\Delta X_s|^p + 2\varepsilon$$

où $\varepsilon>0$ est arbitrairement choisi.

Nous écrivons d'abord que

$$(2) \qquad \Sigma_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^p 1_{\{|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leqq h\}} \leqq h^{p-q} v_q(X)$$

où nous choisissons h assez petit pour avoir à la fois

$$(3) \qquad h^{p-q} v_q(x) < \varepsilon$$

$$(4) \qquad \Sigma_s |\Delta X_s|^p 1_{\{|\Delta X_s| \leqq h\}} < \varepsilon$$

ce qui est possible puisque $\Sigma_s\ |\Delta X_s|^p \leqq v_p(X)<+\infty$. Soit $(s_j)_{j=1,\dots,k}$ la suite finie des points tels que $|\Delta X_{s_j}| \geqq h$. Il existe $\delta>0$ tel que la condition $\sup_i\ |t_{i+1}-t_i| \leqq \delta$ entraîne que chaque intervalle $]t_i,t_{i+1}]$ contienne au plus un s_j, et que si $t_i<s_j\leqq t_{i+1}$ on ait

(5) $$\Big|\ |X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p-|\Delta X_{s_j}|^p\ \Big| \leqq \frac{\varepsilon}{k}$$

Soit $N_s = X_s - \Sigma_1^k\ \Delta X_{s_j} 1_{\{s\geqq s_j\}}$, fonction càdlàg. dont tous les sauts sont $<h$. On peut trouver δ' tel que la condition $\sup_i\ |t_{i+1}-t_i|\leqq\delta'$ entraîne $\sup_i\ |N_{t_{i+1}}-N_{t_i}|<h$. Supposons alors $\sup_i\ |t_{i+1}-t_i| \leqq \delta\wedge\delta'$. La condition $|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|>h$ entraîne que $]t_i,t_{i+1}]$ contient un s_j, et d'après (5)

$$\Sigma_i\ |X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p\ 1_{\{|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|>h\}} \leqq \Sigma_1^k\ |\Delta X_{s_j}|^p+\varepsilon$$

Comparant cela à (2) et (3), nous obtenons

$$\Sigma_i\ |X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p \leqq \Sigma_1^k|\Delta X_{s_j}|+2\varepsilon \leqq \Sigma_s\ |\Delta X_s|^p+2\varepsilon$$

D'autre part, nous avons d'après (5)et (4)

$$\Sigma_i\ |X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^p \geqq \Sigma_j|\Delta X_{s_j}|^p-\varepsilon \geqq \Sigma_s\ |\Delta X_s|^p - 2\varepsilon$$

Nous avons donc établi les deux moitiés de (1), et la démonstration est achevée.

Si l'on revient aux semimartingales, où l'on sait que la p-variation est p.s. finie pour $p>2$, il suffit de choisir $q\in]2,p[$ pour obtenir le résultat désiré de convergence p.s., également pour $p>2$.