Giorgio Letta

# Quasimartingales et formes linéaires associées

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 13 (1979), p. 216-226

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__216_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

# QUASIMARTINGALES ET FORMES LINEAIRES ASSOCIEES

par G. LETTA

Le but de cet exposé est de montrer que la notion de quasimartingale devient plus naturelle, et ses propriétés plus faciles à démontrer, si l'on remplace la définition habituelle ( fondée sur la notion de "variation" ) par une définition plus "fonctionnelle", fondée sur la dualité des espaces de Riesz.

De façon précise, on définit une quasimartingale comme un processus $X$ adapté, tel que $X_t$ soit intégrable pour tout $t$ et que la forme linéaire associée à $X$, c'est à dire la forme linéaire $\ell$ définie par

$$\ell(H) = E[\int_0^\infty H_t dX_t]$$

sur l'espace de Riesz $\underline{\underline{H}}$ des processus prévisibles étagés, soit relativement bornée.

On étudie ensuite, dans l'espace de Riesz $\underline{\underline{H}}'$ de toutes les formes linéaires relativement bornées sur $\underline{\underline{H}}$, le sous-espace constitué par les formes linéaires associées aux quasimartingales, et l'on démontre que ce sous-espace est une bande. Ce résultat, qui entraîne comme corollaire immédiat la décomposition de Rao, est à son tour un cas particulier d'un théorème général concernant la dualité des espaces de Riesz.

Enfin, en utilisant les décompositions de Doob-Meyer et de Ito-Watanabe, on caractérise les quasimartingales pour lesquelles la forme linéaire associée est une mesure de Daniell.

1. NOTATIONS ET TERMINOLOGIE. Etant donné un espace de Riesz $E$, on dit qu'une forme linéaire $\ell$ sur $E$ est relativement bornée si, pour tout élément positif $x$ de $E$, $\ell$ est bornée dans l'ensemble des $y$ tels que $|y|\leq x$. On désigne par $E'$ le dual de $E$, c'est à dire l'espace des formes linéaires relativement bornées sur $E$. On rappelle que $E'$ est un espace de Riesz complètement réticulé, dans lequel le cône des éléments positifs est constitué par les formes linéaires positives sur $E$ ( cf. [1], chap. II, § 2).

Conformément à la terminologie de [4] ( Déf. 17.1), un sous espace vectoriel $F$ de $E$ est appelé

- un sous-espace de Riesz de $E$ s'il est stable pour les opérations $(x,y)\mapsto \sup(x,y)$ et $(x,y)\mapsto \inf(x,y)$ ( il suffit pour cela qu'il soit stable pour l'opération $x\mapsto|x|$ ) ;
- un idéal de $E$ si, pour tout couple $(x,y)$ d'éléments de $E$, les relations $|y|\leq|x|$, $x\in F$ entraînent $y\in F$ ;

- une <u>bande</u> dans E si F est un idéal et si tout élément de E qui est la borne supérieure ( dans E ) d'un ensemble d'éléments ( positifs ) de F appartient à F.

On dit qu'un espace vectoriel ordonné E est <u>somme directe ordonnée</u> de n sous-espaces vectoriels $E_1,\ldots,E_n$ si l'on a $E=E_1+\ldots+E_n$ et si, pour tout élément $(x_1,\ldots,x_n)$ de $E_1\times\ldots\times E_n$ , la relation $x_1+\ldots+x_n\geq 0$ entraîne $x_i\geq 0$ pour tout i. Les deux propositions suivantes sont immédiates.

(1.1) PROPOSITION. *Si l'espace de Riesz E est somme directe ordonnée des n sous-espaces vectoriels $E_1,\ldots,E_n$ , alors tout idéal F de E est somme directe ordonnée des sous-espaces vectoriels $E_1\cap F,\ldots,E_n\cap F$.*

(1.2) PROPOSITION. *Dans un espace de Riesz E complètement réticulé, soit F un sous-espace vectoriel, somme directe ordonnée des sous-espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_n$ . Si chacun des $F_i$ est une bande dans E, il en est de même de F.*

Le langage concernant les processus est celui de [2]. On se donne un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, une partie $\mathbb{T}$ non vide de $[0,\infty]$, une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$ .

On désigne par $\underline{\underline{X}}$ l'espace constitué par les processus réels X définis dans $\mathbb{T}\times\Omega$, adaptés à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et tels que $X_t$ soit intégrable pour tout t.

On désigne en outre par $\underline{\underline{H}}$ l'espace de Riesz constitué par les processus réels H, définis dans $]0,\infty]\times\Omega$, qui sont des sommes finies de processus de la forme

(1.3) $$(t,\omega)\mapsto V(\omega)I_{]r,s]}(t)$$

où r,s sont des éléments de $\mathbb{T}$ ( avec r<s), et où V est une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_r$-mesurable bornée.

Si F est une partie finie de $\mathbb{T}$, et si l'on modifie la définition précédente en imposant aux instants r,s d'appartenir à F, on obtient un sous-espace de Riesz de $\underline{\underline{H}}$, que l'on désignera par $\underline{\underline{H}}_F$ . Il est clair que, lorsque F parcourt l'ensemble des parties finies de $\mathbb{T}$, les sous-espaces $\underline{\underline{H}}_F$ forment un recouvrement de $\underline{\underline{H}}$ , filtrant pour la relation d'inclusion.

On remarquera enfin que, si H et H' sont deux processus de la classe $\underline{\underline{H}}$, tels que H' soit une modification de H, alors H et H' sont indistinguables.

2. LA NOTION DE QUASIMARTINGALE. Pour tout élément (H,X) de $\underline{\underline{H}}\times\underline{\underline{X}}$, on peut définir l'<u>intégrale stochastique élémentaire</u> $\int_0^\infty H_t dX_t$ : dans le cas particulier où H est de la forme (1.3), on pose

$$\int_0^\infty H_t dX_t = V(X_s-X_r)$$

et on étend ensuite cette définition au cas général par linéarité.

Les espaces $\underline{\underline{H}}, \underline{\underline{X}}$ sont alors mis en dualité par la forme bilinéaire

$$(H,X) \longmapsto E[\int_0^\infty H_t dX_t]$$

Cette forme prend évidemment la même valeur en deux points $(H,X),(H',X')$ de $\underline{\underline{H}}\times\underline{\underline{X}}$ tels que $H'$ soit une modification de $H$ et que $X'$ soit une modification de $X$. Par conséquent, pour tout élément $X$ de $\underline{\underline{X}}$, la forme linéaire $\ell$ définie sur $\underline{\underline{H}}$ par

$$\ell(H) = E[\int_0^\infty H_t dX_t]$$

est nulle sur les éléments évanescents de $\underline{\underline{H}}$. On l'appellera la <u>forme linéaire associée</u> à $X$.

Il est clair que, pour que $X$ soit une sousmartingale pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbf{T}}$, il faut et il suffit que la forme linéaire $\ell$ associée à $X$ soit positive. En particulier, pour que $X$ soit une martingale, il faut et il suffit que $\ell$ soit nulle.

(2.1) DEFINITION. On appelle <u>quasimartingale</u> ( pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbf{T}}$) tout processus $X$ de la classe $\underline{\underline{X}}$ tel que la forme linéaire associée à $X$ soit relativement bornée.

(2.2) REMARQUES. (a) Si l'on munit $\underline{\underline{H}}$ de la topologie de la convergence uniforme, on voit que toute forme linéaire continue sur $\underline{\underline{H}}$ est relativement bornée. La réciproque est vraie si l'on suppose que l'ensemble $\mathbf{T}$ possède un plus petit et un plus grand élément. Dans ce dernier cas, toute quasimartingale $X$ est bornée dans $L^1$. En effet, désignons par $u$ le plus grand élément de $\mathbf{T}$. Pour tout élément $t$ de $\mathbf{T}$ et pour toute variable aléatoire $V$ $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable telle que $|V|\leq 1$ on a

$$E[VX_t] = E[VX_u] - E[V(X_u-X_t)]$$

L'assertion résulte alors du fait que $E[V(X_u-X_t)]$ est la valeur que prend la forme linéaire associée à $X$ sur le processus $H(s,\omega)=V(\omega)I_{]\!]t,u]\!]}(s,\omega)$.

(b) Soit $(\underline{\underline{E}}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ une famille croissante de tribus, telle que l'on ait $\underline{\underline{E}}_t\subset \underline{\underline{F}}_t$ pour tout $t$, et soit $X$ une quasimartingale pour $(\underline{\underline{F}}_t)$, adaptée à $(\underline{\underline{E}}_t)$. Alors $X$ est aussi une quasimartingale pour $(\underline{\underline{E}}_t)$ ( cf. [8], Th.1.2 ). En effet, lorsqu'on remplace $(\underline{\underline{F}}_t)$ par $(\underline{\underline{E}}_t)$, la forme linéaire associée à $X$ est remplacée par sa restriction à un sous-espace.

(2.3) PROPOSITION. <u>Supposons que l'ensemble $\mathbf{T}$ soit fini. Tout processus de classe $\underline{\underline{X}}$ est alors une quasimartingale. En outre, dans l'espace de Riesz $\underline{\underline{H}}'$ de toutes les formes linéaires relativement bornées sur $\underline{\underline{H}}$, le sous-espace $\underline{\underline{I}}$ constitué par les formes linéaires associées aux quasimartingales est une bande.</u>

DEMONSTRATION. Supposons que l'ensemble $\mathbf{T}$ soit constitué par les éléments $t_o,\dots,t_n$, avec $t_o<\dots<t_n$. L'espace $\underline{\underline{H}}$ est alors somme directe ordonnée

des sous-espaces $\underline{\underline{H}}_{\{t_{i-1},t_i\}}$ $(1\leq i\leq n)$. Par conséquent, si dans l'espace dual $\underline{\underline{H}}'$ on désigne par $\underline{\underline{L}}_i$ la bande constituée par les formes linéaires relativement bornées sur $\underline{\underline{H}}$ qui s'annulent sur chaque espace $\underline{\underline{H}}_{\{t_{j-1},t_j\}}$ avec $j\neq i$, on voit que $\underline{\underline{H}}'$ est somme directe ordonnée de $\underline{\underline{L}}_1,\ldots,\underline{\underline{L}}_n$. Considérons dans $\underline{\underline{L}}_i$ la bande $\underline{\underline{I}}_i$ constituée par les formes linéaires du type

$$\ell_i(H) = E[H_{t_i} Y_i] , \tag{2.4}$$

avec $Y_i$ variable aléatoire intégrable et $\underline{\underline{F}}_{t_{i-1}}$-mesurable.

Soit $\ell$ la forme linéaire associée à un processus X quelconque de la classe $\underline{\underline{X}}$. On a alors, pour tout élément H de $\underline{\underline{H}}$

$$\ell(H) = \sum_{i=1}^{n} E[\, H_{t_i}(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})] = \sum_{i=1}^{n} E[H_{t_i} Y_i]$$

où $Y_i$ désigne une version de l'espérance conditionnelle $E[X_{t_i}-X_{t_{i-1}} | \underline{\underline{F}}_{t_{i-1}}]$

La forme linéaire $\ell$ appartient donc à $\underline{\underline{I}}_1+\ldots+\underline{\underline{I}}_n$ . Réciproquement, soit $\ell$ un élément de cette somme directe : $\ell=\ell_1+\ldots+\ell_n$ , où $\ell_i$ est donnée par (2.4) ; $\ell$ est alors la forme linéaire associée à la quasimartingale X définie par $X_{t_i} = \sum_{k=1}^{i} Y_k$ .

Il en résulte que le sous-espace $\underline{\underline{I}}$ de $\underline{\underline{H}}'$, en tant que somme directe ordonnée des bandes $\underline{\underline{I}}_1,\ldots,\underline{\underline{I}}_n$ , est une bande dans $\underline{\underline{H}}'$ ( cf. (1.2)).

Nous appellerons <u>mesure de Daniell</u> sur $\underline{\underline{H}}$ une forme linéaire relativement bornée sur $\underline{\underline{H}}$ telle que, pour toute suite décroissante $(H_n)$ d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ , la relation $\inf_n H_n = 0$ entraîne $\lim_n \ell(H_n)=0$ .

La bande $\underline{\underline{I}}$ de la proposition précédente peut alors être caractérisée ainsi :

(2.5) PROPOSITION. <u>Supposons que l'ensemble</u> $\mathbf{T}$ <u>soit fini</u>. <u>Pour qu'une forme linéaire sur</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>soit la forme linéaire associée à une quasimartingale, il faut et il suffit qu'elle soit une mesure de Daniell sur</u> $\underline{\underline{H}}$, <u>nulle sur les éléments évanescents de</u> $\underline{\underline{H}}$.

DEMONSTRATION. Reprenons les notations employées dans la démonstration de la proposition précédente. Désignons en outre par $\underline{\underline{M}}$ la bande constituée dans $\underline{\underline{H}}'$ par les mesures de Daniell sur $\underline{\underline{H}}$ qui s'annulent sur les éléments évanescents de $\underline{\underline{H}}$. Il s'agit de prouver que $\underline{\underline{M}}$ coïncide avec $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_1+\ldots+\underline{\underline{I}}_n$. D'autre part, puisque $\underline{\underline{H}}'$ est somme directe ordonnée des bandes $\underline{\underline{L}}_i$, $\underline{\underline{M}}$ est somme directe ordonnée des bandes $\underline{\underline{M}}\cap\underline{\underline{L}}_i$ ( cf. (1.1)). Il suffit donc de vérifier que l'on a $\underline{\underline{M}}\cap\underline{\underline{L}}_i = \underline{\underline{I}}_i$ pour tout i. Or ceci résulte immédiatement du théorème de Radon-Nikodym.

3. LA DECOMPOSITION DE RAO. Supposons maintenant que l'ensemble $\mathbb{T}$ ( non nécessairement fini ) possède un plus grand élément u. Toute quasimartingale X admet alors une décomposition de la forme

$$X = M + Y$$

où M est une martingale, et Y une quasimartingale nulle en u ( pour construire M, il suffit de choisir, pour tout t, une version $M_t$ de l'espérance conditionnelle $E[X_u|\underline{\underline{F}}_t]$ ). En outre, cette décomposition est "unique" au sens suivant : si $X = M'+Y'$ est une autre décomposition du même type, M' est nécessairement une modification de M, Y' une modification de Y.

Ces simples remarques permettent d'obtenir la proposition suivante :

(3.1) PROPOSITION. Supposons que l'ensemble $\mathbb{T}$ possède un plus grand élément u. Pour qu'une forme linéaire $\ell$ relativement bornée sur $\underline{\underline{H}}$ soit la forme linéaire associée à une quasimartingale, (il faut et) il suffit que, pour toute partie finie F de $\mathbb{T}$, la restriction de $\ell$ à $\underline{\underline{H}}_F$ soit la forme linéaire associée à une quasimartingale ( pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in F}$ ).

DEMONSTRATION. Supposons que cette condition soit satisfaite. Pour toute partie finie F de $\mathbb{T}$ contenant l'élément u, la restriction de $\ell$ à $\underline{\underline{H}}_F$ est la forme linéaire associée à une quasimartingale $X^F$, que l'on pourra supposer nulle en u d'après la décomposition précédente. L'unicité de cette décomposition montre que, si G est une partie finie de $\mathbb{T}$ contenant F, la restriction de $X^G$ à $F\times\Omega$ est une modification de $X^F$. On voit alors qu'il existe un processus X de la classe $\underline{\underline{X}}$ tel que, pour toute partie finie F de $\mathbb{T}$ contenant u, la restriction de X à $F\times\Omega$ soit une modification de $X^F$. La forme linéaire associée à X coïncide avec $\ell$ sur chacun des sous-espaces $\underline{\underline{H}}_F$ , donc sur l'espace $\underline{\underline{H}}$ tout entier. En d'autres termes, X est une quasimartingale, et $\ell$ est la forme linéaire associée à X.

(3.2) COROLLAIRE. Si l'ensemble $\mathbb{T}$ possède un plus grand élément u, toute mesure de Daniell sur $\underline{\underline{H}}$ qui s'annule sur les éléments évanescents de $\underline{\underline{H}}$ est la forme linéaire associée à une quasimartingale ( nulle en u ).

( C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de (2.5)).

(3.3) THEOREME. Supposons que l'ensemble $\mathbb{T}$ possède un plus grand élément. Alors, dans l'espace de Riesz $\underline{\underline{H}}'$ de toutes les formes linéaires relativement bornées sur $\underline{\underline{H}}$, le sous-espace $\underline{\underline{I}}$ constitué par les formes linéaires associées aux quasimartingales est une bande.

Grâce à (3.1) et (2.3), le théorème énoncé n'est qu'un cas particulier du théorème suivant, concernant le dual d'un espace de Riesz quelconque.

(3.4) THEOREME. <u>Soient</u> E <u>un espace de Riesz,</u> $\mathfrak{R}$ <u>un recouvrement de</u> E, <u>filtrant pour la relation d'inclusion et constitué de sous-espaces de Riesz de</u> E. <u>Pour tout élément</u> F <u>de</u> $\mathfrak{R}$ , <u>soit</u> $B_F$ <u>une bande dans</u> F'. <u>On suppose que, pour tout couple</u> F,G <u>d'éléments de</u> $\mathfrak{R}$ <u>avec</u> $F \subset G$ <u>et tout élément</u> $\ell$ <u>de</u> $B_G$ , <u>la restriction de</u> $\ell$ <u>à</u> F <u>appartient à</u> $B_F$. <u>Dans ces conditions, l'ensemble</u> B <u>constitué par les éléments de</u> E' <u>dont la restriction à</u> F <u>pour tout élément</u> F <u>de</u> $\mathfrak{R}$ <u>est une bande dans</u> E'.

DEMONSTRATION. Il est clair que B est un sous-espace vectoriel de E' et que, pour tout ensemble non vide A d'éléments positifs de B, majoré dans E' et filtrant pour la relation $\leqq$ , la borne supérieure de A dans E' appartient à B. Il est aussi évident que tout élément positif de E' majoré par un élément de B appartient à B.

Il reste à vérifier que, pour tout élément $\ell$ de B, l'élément $|\ell|$ de E' appartient à B.

Fixons un élément F de $\mathfrak{R}$ et montrons que la restriction de $|\ell|$ à F appartient à $B_F$. Pour tout élément positif x de F, on a

$$|\ell|(x) = \sup_{y\in E,\, |y|\leqq x} \ell(y) = \sup_{F\subset G\in\mathfrak{R}} \ \sup_{y\in G,\, |y|\leqq x} \ell(y) = \sup_{F\subset G\in\mathfrak{R}} |\ell_G|(x)$$

où $\ell_G$ désigne la restriction de $\ell$ à G, et où $|\ell_G|$ est calculé dans G'.

En d'autres termes, la restriction de $|\ell|$ à F coïncide avec la borne supérieure dans F' de l'ensemble ( filtrant pour la relation $\leqq$ ) constitué par les restrictions à F des éléments $|\ell_G|$ avec $F\subset G\in\mathfrak{R}$ . Puisque ces restrictions appartiennent à $B_F$, l'assertion est prouvée.

Le théorème (3.3) admet un corollaire important :

(3.5) COROLLAIRE ( Décomposition de Rao ). <u>Supposons que l'ensemble</u> $\mathbf{T}$ <u>possède un plus grand élément</u> u. <u>Alors toute quasimartingale</u> ( <u>nulle en</u> u) <u>est différence de deux sousmartingales</u> ( <u>nulles en</u> u ).

DEMONSTRATION. En effet, puisque $\underline{\underline{I}}$ est une bande, tout élément de $\underline{\underline{I}}$ est différence de deux éléments positifs de $\underline{\underline{I}}$ .

Enfin la proposition suivante ( dont la démonstration est immédiate ) permet d'étendre les résultats précédents au cas où l'ensemble $\mathbf{T}$ ne possède pas de plus grand élément.

(3.6) PROPOSITION. <u>Supposons que l'ensemble</u> $\mathbf{T}$ <u>ne possède pas de plus grand élément, et posons</u> $\mathbf{T}^*=\mathbf{T}\cup\{\infty\}$, $\underline{\underline{F}}_\infty=\underline{\underline{F}}$ . <u>Pour tout processus</u> X <u>de la classe</u> $\underline{\underline{X}}$ , <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u>

a) <u>Le processus</u> Y <u>défini dans</u> $\mathbf{T}^*\times\Omega$ <u>par</u>

$$Y_t = X_t \ \text{pour}\ t\in\mathbf{T}\ ,\ Y_t=0\ \text{pour}\ t=\infty$$

<u>est une quasimartingale pour la filtration</u> $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbf{T}^*}$ .

b) *X est une quasimartingale pour la filtration* $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ *, et l'on a* $\sup_{s\leq t\in\mathbf{T}} E[|X_t|] < \infty$ *pour tout élément* s *de* $\mathbf{T}$.

La proposition énoncée permet par exemple de déduire de (3.5) le corollaire suivant :

(3.7) COROLLAIRE. *Toute quasimartingale bornée dans* $L^1$ *est différence de deux sousmartingales négatives* ( *ou, si l'on préfère, de deux surmartingales positives* )

## 4. LES DECOMPOSITIONS DE DOOB-MEYER ET DE ITÔ-WATANABE.

Supposons maintenant que l'on ait $\mathbf{T}=[0,\infty]$ et que la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ vérifie les conditions habituelles. Etant donnée une quasimartingale X, nous nous proposons d'étudier les conditions sous lesquelles la forme linéaire associée à X est une mesure de Daniell.

La proposition suivante montre qu'il est *nécessaire*, pour cela, que X admette une modification continue à droite.

(4.1) PROPOSITION. *Soit* $\lambda$ *une mesure de Daniell sur* $\underline{\underline{H}}$*, nulle sur les éléments évanescents de* $\underline{\underline{H}}$*. Parmi les quasimartingales nulles à l'infini admettant* $\lambda$ *comme forme linéaire associée* ( *cf. (3.2)*)*, il en existe une* ( *et à indistinguabilité près une seule* ) *qui est continue à droite*.

DEMONSTRATION. L'unicité est immédiate. Pour démontrer l'existence, on peut supposer $\lambda$ positive. Désignons alors par $\lambda_o$ la restriction de $\lambda$ au sous-espace $\underline{\underline{H}}_{\overline{\mathbf{Q}}_+}$ , et choisissons une sousmartingale Y ( pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\overline{\mathbf{Q}}_+}$ ) nulle à l'infini et admettant $\lambda_o$ comme forme linéaire associée (cf. (3.2)). Le processus $X=Y_+$ ( défini par $X_t = \lim_{s\downarrow\downarrow t} Y_s$ pour $0\leq t<\infty$ , $X_\infty=0$ ) est une sousmartingale continue droite ( pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in[0,\infty]}$) . Désignons par $\ell$ la forme linéaire associée à X, et montrons qu'elle coïncide avec $\lambda$ . Il suffira de vérifier que la coïncidence a lieu sur chaque processus H de la forme

$$H(t,\omega) = V(\omega)I_{]r,s]}(t)$$

où r,s sont des nombres tels que $0\leq r<s\leq\infty$ , et où V est une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_r$-mesurable bornée.

A cet effet, choisissons deux suites décroissantes $(r_n)$, $(s_n)$ d'éléments de $\overline{\mathbf{Q}}_+$ , telles que l'on ait

$$\inf_n r_n=r \ , \ r_n>r \quad ; \quad \inf_n s_n=s \ , \ s_n>s \text{ si } s\neq\infty ,$$

et posons pour tout n

$$H_n(t,\omega) = V(\omega)I_{]r_n,s_n]}(t)$$

Les suites $(Y_{r_n}),(Y_{s_n})$ sont alors uniformément intégrables, et convergent respectivement vers $X_r,X_s$. Il en résulte

$$\ell(H) = E[V(X_s-X_r)] = \lim_n E[V(Y_{s_n}-Y_{r_n})] = \lim_n \lambda(H_n) = \lambda(H) ,$$

ce qui prouve l'assertion.

(4.2) PROPOSITION. Soit X une quasimartingale continue à droite ( et nulle à l'infini ). Alors X est différence de deux sousmartingales continues à droite ( et nulles à l'infini ).

DEMONSTRATION. D'après (3.5), la restriction Y de X à $\overline{\mathbf{Q}}_+\times\Omega$ est différence de deux sousmartingales U,V (pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\overline{\mathbf{Q}}_+}$ ), qui peuvent être prises nulles à l'infini, si X est nulle à l'infini. On a alors ( à indistinguabilité près )

$$X = Y_+ = U_+-V_+$$

ce qui prouve l'assertion, puisque $U_+$, $V_+$ sont des sousmartingales continues à droite.

Une première réponse à la question posée plus haut est donnée par le théorème suivant ( cf. [3] ).

(4.3) THEOREME. Soit X une sousmartingale continue à droite, appartenant à la classe (D). La forme linéaire $\ell$ associée à X est alors une mesure de Daniell.

Nous exposerons très sommairement une version "fonctionnelle" de la démonstration de C. Doléans. Elle est fondée sur les deux lemmes suivants ( dont le deuxième découle aussitôt du premier ).

(4.4) LEMME. Soit $\ell$ la forme linéaire associée à une sousmartingale X continue à droite. Pour tout élément positif H de $\underline{\underline{H}}$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe un élément K de $\underline{\underline{H}}$ tel que l'on ait

$$0\leqq K\leqq H , \qquad \ell(H-K) \leqq \varepsilon ,$$

et que, pour tout $\omega$, la trajectoire $H(.,\omega)$ majore la régularisée semi-continue supérieurement de $K(.,\omega)$.

( On notera que les processus H et K sont définis sur $]0,\infty]\times\Omega$ ; on les prolongera à $[0,\infty]\times\Omega$ en leur donnant la valeur 0 à l'origine ).

(4.5) LEMME. Soit $\ell$ la forme linéaire associée à une sousmartingale X continue à droite. Pour toute suite décroissante $(H_n)$ d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ telle que $\inf_n H_n = 0$, et pour tout $\varepsilon>0$, il existe une suite décroissante $(K_n)$ d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ telle que l'on ait

$$0 \leqq K_n \leqq H_n , \quad \ell(H_n-K_n) \leqq \varepsilon ,$$

et que, pour tout $\omega$, la suite $(K_n(.,\omega))$ converge uniformément vers zéro.

Voici l'idée de la démonstration de (4.3). Il s'agit de prouver que, pour toute suite décroissante $(H_n)$ d'éléments de $\underline{\underline{H}}$, la relation $\inf_n H_n=0$ entraîne $\inf_n \ell(H_n)=0$ . Grâce au lemme (4.5) on peut supposer que, pour tout $\omega$, la suite $(H_n(.,\omega))$ converge uniformément vers zéro. Fixons $\varepsilon>0$ et posons

$$T_n(\omega) = \inf \{ t : H_n(t,\omega)>\varepsilon \} , \quad c=\| H_1 \| .$$

On a alors pour tout n

$$\begin{aligned}\ell(H_n) &= \ell(H_n I_{]\!]0,T_n]\!]}) + \ell(H_n I_{]\!]T_n,\infty]\!]}) \\ &\leqq \varepsilon E[X_\infty - X_0] + cE[X_\infty - X_{T_n}] ,\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

(4.6) REMARQUE. Soit A un processus continu à droite, nul en 0. Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) A est un processus croissant intégrable ( non nécessairement adapté ) ;

(b) A est une sousmartingale pour la filtration constante $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}$ .

En outre, si ces conditions sont satisfaites, A appartient automatiquement à la classe (D), de sorte que la forme linéaire $\ell$ associée à A en tant que sousmartingale ( pour la filtration constante ) est une mesure de Daniell sur l'espace des processus mesurables étagés ( sommes finies de processus de la forme $(t,\omega)\mapsto V(\omega)I_{]r,s]}(t)$, avec $0\leqq r<s\leqq\infty$ et V variable aléatoire bornée ); $\ell$ peut donc être identifiée avec une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(]0,\infty])\otimes\underline{\underline{F}}$ des ensembles mesurables : c'est la "mesure associée au processus croissant A" au sens de [2] ( noter cependant que l'on considère ici l'intervalle $]0,\infty]$ et non pas $[0,\infty[$ comme dans [2]).

Dans le cas particulier où le processus croissant A est adapté, il peut être aussi considéré comme une sousmartingale pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ ( cf. (2.2), (b)) : la forme linéaire correspondante est une restriction de la forme linéaire associée à A en tant que sousmartingale pour la filtration $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}$ ( elle est donc, a fortiori, une mesure de Daniell ).

Ces considérations s'étendent aussitôt au cas d'un processus à variation intégrable. On voit alors que le théorème (4.1) contient comme cas particulier le résultat bien connu suivant lequel toute mesure sur la tribu des ensembles mesurables, qui s'annule sur les ensembles évanescents de la tribu $\mathcal{B}(]0,\infty])\times\underline{\underline{F}}$ , est la mesure associée à un processus (continu à droite ) à variation intégrable.

Le théorème (4.3) ne répond que partiellement à la question posée au début du paragraphe : d'abord il concerne une sousmartingale ; en outre il affirme simplement que l'appartenance de X à la classe (D) est une condition suffisante pour que la forme linéaire associée à X soit une mesure de Daniell.

Une condition nécessaire et suffisante est donnée par la proposition suivante ( qui concerne une quasimartingale ).

(4.7) PROPOSITION. Soit X une quasimartingale continue à droite. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) La forme linéaire associée à X est une mesure de Daniell.

(b) X admet une décomposition ( nécessairement unique ) de la forme

$$X = M + A ,$$

où M est une martingale, et où A est un processus continu à droite, à variation intégrable, nul en 0, prévisible ( décomposition de Doob-Meyer).

DEMONSTRATION. (a) => (b) : Puisque la forme linéaire associée à X est une mesure de Daniell, elle peut être prolongée ( de façon unique ) en une mesure de Daniell $\lambda$ sur l'espace de tous les processus prévisibles bornés, nulle sur les évanescents. Posons, pour tout processus H mesurable borné

$$\mu(H) = \lambda({}^pH) ,$$

où ${}^pH$ désigne la projection prévisible de H. La mesure de Daniell $\mu$ ainsi définie est la mesure associée à un processus A nul en 0, continu à droite, à variation intégrable ( cf. (4.6)).

En outre, d'après la construction de $\mu$, A est prévisible.

Enfin, puisque la forme linéaire associée à X est identique à celle associée à A ( en tant que quasimartingale pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$), la différence X-A est une martingale.

(b)=>(a) : Puisque X-A est une martingale, la forme linéaire associée à X est identique à celle associée à A ( en tant que quasimartingale pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$) : c'est donc une mesure de Daniell ( cf. (4.6)).

Il résulte en particulier de (4.3), (4.7) que toute sousmartingale continue à droite appartenant à la classe (D) admet une décomposition de Doob-Meyer. On en déduit facilement ( cf. [7], p. 293 ) que toute sousmartingale X continue à droite admet une décomposition de la forme X=M+A, où M est une martingale locale, et où A est un processus continu à droite, croissant, prévisible.

En utilisant la décomposition de Rao (4.2), ce résultat s'étend aussitôt au cas d'une quasimartingale :

(4.8) THEOREME. Soit X une quasimartingale continue à droite. Alors X admet une décomposition ( unique ) de la forme

$$X = M + A ,$$

où M est une martingale locale et où A est un processus continu à droite, à variation intégrable, nul en 0, prévisible ( décomposition de Itô-Watanabe)

On peut alors terminer par le théorème suivant ( cf. [5], th. 5' ; [6], 22.3 ) qui donne une réponse complète à la question posée au début du paragraphe ( et qui contient tous les résultats partiels déjà obtenus)

(4.9) THEOREME. Soit X une quasimartingale continue à droite. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

(a) La forme linéaire associée à X est une mesure de Daniell.

(b) X appartient à la classe (D).

(c) Dans la décomposition de Itô-Watanabe de X, M est une martingale ( i.e. la décomposition de Itô-Watanabe est une décomposition de Doob-Meyer ).

DEMONSTRATION. L'équivalence entre (a) et (c) figure déjà dans (4.7). Démontrons l'équivalence entre (b) et (c).

Soit X=M+A la décomposition de Itô-Watanabe de X. Puisque A appartient automatiquement à la classe (D), pour que X appartienne à la classe (D), il faut et il suffit que la martingale locale M appartienne à la classe (D), c'est à dire qu'elle soit une martingale ( cf. [2], chap. VI, 30,f).

## BIBLIOGRAPHIE

[1]. N. BOURBAKI. Intégration, chap. I-IV. Hermann A.S.I. 1175 (1952).

[2]. C.DELLACHERIE - P.A.MEYER. Probabilités et potentiel. Edition refondue. Hermann 1976.

[3]. C. DOLEANS. Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D). Z.f.W., 9, 1968, p. 309-314.

[4]. W.A.J. LUXEMBURG - A.C. ZAANEN. Riesz spaces I. North Holland (1971).

[5]. M. METIVIER - J. PELLAUMAIL. On Doléans-Foellmer's measure for quasi-martingales. Illinois J. of Math. 19, 1975, p. 491-504.

[6]. M. METIVIER. Reelle und vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der stochastichen Integration. Springer Lect. Notes 607 (1977).

[7]. P.A. MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de prob. X, Springer Lect. Notes 511 (1976).

[8]. C. STRICKER. Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtrations naturelles. Z.f.W. 39, 1977, p. 55-64.

G. Letta
Istituto di Matematica
Via Derna 1
56100 PISA, Italie.