

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

M. GARCIA

P. MAILLARD

Y. PELTRAUT

Une martingale de saut multiplicatif donné

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 51-52

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__51_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__51_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE MARTINGALE DE SAUT MULTIPLICATIF DONNE
M. GARCIA, P. MAILLARD, Y. PELTRAUT

Considérons un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une filtration (\mathcal{F}_t) satisfaisant aux conditions habituelles. Dans [1], Meyer construit une martingale ayant un saut donné en un temps T totalement inaccessible. On va utiliser ce résultat pour construire une martingale de << saut multiplicatif >> donné.

THEOREME. Soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible, et soit K une constante strictement positive. Il existe alors une martingale (M_t) , strictement positive, égale à 1 pour $t=0$, et dont la seule discontinuité est un saut en T (sur $\{T<\infty\}$) vérifiant

$$\frac{M_T}{M_{T-}} = K \quad \text{p.s. sur } \{T<\infty\}.$$

DEMONSTRATION. Nous désignons par A_t le processus croissant $I_{\{t \geq T\}}$, par \tilde{A}_t son compensateur prévisible, qui est continu du fait que T est totalement inaccessible. Le processus $Z_t = A_t - \tilde{A}_t$ est une martingale uniformément intégrable, dont les trajectoires sont des fonctions à variation bornée nulles en 0. De plus, le potentiel engendré par (A_t) étant borné par 1, on a pour tout entier $p \geq 1$ (cf [1], chap. VII, n°59)

$$(1) \quad E[\tilde{A}_\infty^p] \leq p!$$

et par conséquent

$$(2) \quad E[\exp(c\tilde{A}_\infty)] \leq \frac{1}{1-c} < \infty \quad \text{si } 0 \leq c < 1$$

Considérons maintenant la martingale locale exponentielle $M = \mathcal{E}(\lambda Z)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme Z n'a pas de partie martingale locale continue, nous avons

$$M_t = e^{\lambda Z_t} \prod_{s \leq t} (1 + \lambda \Delta Z_s) e^{-\lambda \tilde{A}_t} = e^{-\lambda \tilde{A}_t} (1 + \lambda I_{\{t \geq T\}})$$

car A est nul avant T , et Z a un seul saut, qui a lieu à l'instant T (sur $\{T<\infty\}$) et qui est égal à 1. On a

$$M_T / M_{T-} = 1 + \lambda \quad \text{sur } \{T<\infty\}.$$

Pour obtenir l'énoncé, nous posons donc $\lambda = K - 1$. Nous avons alors $\lambda > -1$, et la martingale locale M est strictement positive. Il est évident que M est bornée si $\lambda \geq 0$, i.e. si $K \geq 1$; pour $-1 < \lambda < 0$, i.e. $0 < K < 1$, on peut écrire que M est dominée par $\exp(|\lambda| \tilde{A}_\infty)$, qui appartient à L^1 (et

même à tout L^p , $1 \leq p < \infty$) d'après (2), et M est donc une vraie martingale uniformément intégrable. Le théorème est établi.

Mais on peut encore faire la remarque suivante. Supposons T p.s. fini, et prenons $\lambda = -1$. La martingale locale positive M vaut alors

$$\exp(\tilde{A}_t) \text{ pour } t < T, \quad 0 \text{ pour } t \geq T$$

en particulier, $M_\infty = 0$ identiquement, de sorte que M ne peut être uniformément intégrable, et que $\exp(\tilde{A}_\infty)$ ne peut appartenir à L^1 . Les inégalités (2) ne peuvent donc être améliorées. Dans un exemple concret, celui où T est le premier saut d'un processus de Poisson de paramètre 1, on a $\tilde{A}_t = t \wedge T$, et on peut constater que M_t est une vraie martingale pour $0 \leq t < \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.A. Meyer. Probabilités et Potentiel, Hermann (1966)

M. Garcia,
P. Maillard,
Y. Peltraut

Département de Mathématiques (E.R.A. du C.N.R.S.)
Faculté des Sciences
F-25030 BESANCON-CEDEX.