

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

Domination d'une mesure par une capacité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 489-490

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__489_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DOMINATION d'UNE MESURE PAR UNE CAPACITE.

(Un analogue du théorème de Lebesgue-Nikodym).

Par Gabriel MOKOBODZKI

Soient $(X, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, μ une mesure ≥ 0 , $\mu \neq 0$ bornée sur $(X, \mathfrak{B})$, $\mathcal{C}$ une application croissante de $\mathfrak{B}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$1) \mathcal{C} \left(\bigcup_n A_n \right) \leq \sum_n \mathcal{C}(A_n), \quad \mathcal{C}(\emptyset) = 0$$

pour toute suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$.

$$2) \text{ Si } A_{n+1} \supset A_n, \mathcal{C} \left(\bigcup_n A_n \right) = \sup_n \mathcal{C}(A_n)$$

On suppose que μ est dominée par $\mathcal{C}$ au sens suivant :

$$(\mathcal{C}(A) = 0) \implies (\mu(A) = 0) \quad A \in \mathfrak{B}.$$

On a alors le théorème suivant :

THEOREME : Il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ et une suite $(k_n) \subset \mathbb{R}^+$ telles que

$$\mu \left(\bigcup_n A_n \right) = 0 \text{ et } \mu(A_n \cap A) \leq k_n \mathcal{C}(A_n \cap A) \quad \forall A \in \mathfrak{B}.$$

Le théorème résultera de plusieurs lemmes.

LEMME 1 : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que, pour $A \in \mathfrak{B}$ $\mathcal{C}(A) < \eta \implies \mu(A) < \varepsilon$.

Démonstration : On écarte d'abord le cas, où il existe $\alpha > 0$ tel que

$\mathcal{C}(A) \geq \alpha \quad \forall A \neq \emptyset$, auquel cas le théorème est vérifié.

Si le lemme 1 n'est pas vrai, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ telle que

$$\mathcal{C}(A_n) \leq \frac{1}{2^n} \text{ et } \mu(A_n) > \varepsilon.$$

Si $B = \limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right)$ alors $\mathcal{C}(B) = 0$ et $\mu(B) \geq \varepsilon$,
contrairement à l'hypothèse faite sur μ et $\mathcal{C}$.

LEMME 2 : Pour tout $A \in \mathfrak{B}$, tel que $\mu(A) > 0$, il existe $A' \subset A$, $A' \in \mathfrak{B}$ et il existe n tel que $\mu(A') > 0$
et $\mu(A' \cap H) \leq n \mathcal{C}(A' \cap H) \quad \forall H \in \mathfrak{B}$.

Démonstration : Faisons encore un raisonnement par l'absurde. Si le Lemme 2 était faux, pour tout entier n il existerait une famille maximale, au plus dénombrable, $(A_p^n) \subset \mathfrak{A}$ telle que

$$\mu(A_p^n) \geq 2^n \mathcal{C}(A_p^n) > 0 \text{ et } A_p^n \cap A_q^n = \emptyset \text{ si } p \neq q \text{ et}$$

$$\mu\left(\bigcup_p A_p^n\right) = \mu(X) = \mu(B_n) \text{ où } B_n = \bigcup_p A_p^n$$

On a alors :

$$2^n \mathcal{C}(B_n) \leq 2^n \sum_p \mathcal{C}(A_p^n) \leq \sum_p \mu(A_p^n) = \mu(X)$$

Si l'on pose $D = \limsup B_n = \bigcap_m \left(\bigcap_{n \geq m} B_n \right)$

on aura $\mathcal{C}(D) = 0$ et $\mu(D) = \mu(X) \neq 0$, en contradiction avec l'hypothèse faite sur μ et $\mathcal{C}$.

DEMONSTRATION DU THEOREME .

Pour tout borélien $A \in \mathfrak{B}$ tel que $\mu(A) > 0$, il existe $A' \in \mathfrak{A}$, $A' \subset A$, $\mu(A') > 0$ et il existe n tel que $\mu(A' \cap H) \leq n \mathcal{C}(A' \cap H) \quad \forall H \in \mathfrak{B}$.

Soit alors (A'_p) une famille maximale, forcément dénombrable, d'ensembles $A' \in \mathfrak{A}$, chacun vérifiant, pour un entier n_p convenable,

$$\mu(A'_p \cap H) \leq n_p \mathcal{C}(A'_p \cap H) \quad \forall H \in \mathfrak{B} \text{ et } \mu(A'_p) > 0.$$

D'après le lemme 2, on a nécessairement $\mu\left(\bigcup_p A'_p\right) = \mu(X)$

COROLLAIRE 1: Il existe une mesure μ' équivalente à μ telle que

$$\mu'(A) \leq \mathcal{C}(A) \text{ pour tout } A \in \mathfrak{B}.$$

Démonstration : Reprenons la famille (A'_p) ci-dessus et posons

$$\mu' = \sum_p \frac{1}{n_p \cdot 2^p} \mu|_{A'_p}, \text{ on a alors } \mu'(A) \leq \mathcal{C}(A) \quad \forall A \in \mathfrak{B}.$$

Laboratoire de Théorie du Potentiel
Equipe de Recherche Associée au CNRS n°294
Université P. et M. Curie
4 Place Jussieu, 75005 Paris