

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

PAUL-ANDRÉ MEYER

Construction d'un processus prévisible ayant une valeur donnée en un temps d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 425-427

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__425_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION D'UN PROCESSUS PREVISIBLE AYANT UNE
VALEUR DONNÉE EN UN TEMPS D'ARRÊT
par C.Dellacherie et P.A.Meyer

Cette note est consacrée à une "petite remarque évidente" de théorie générale des processus, que nous n'avons vu écrite nulle part, bien qu'elle soit implicite, par exemple, dans Weil [3] et dans d'autres travaux de conditionnement par rapport au passé strict. Il s'agit de répondre aux questions suivantes, où T désigne un temps d'arrêt ;

a) Soit X mesurable par rapport à $\mathbb{F}_{T-}$. On sait (voir [1], IV.67) qu'il existe un processus prévisible (Z_t) tel que $X = Z_T$. Mais existe-t'il un procédé permettant d'écrire un tel processus ?

b) Lorsque T n'est pas prévisible, peut on "calculer" des espérances conditionnelles du type $E[Y | \mathbb{F}_{T-}]$?

Nous désignons par $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathbb{F}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles. Il est commode de se donner une tribu supplémentaire $\mathbb{F}_{0-} \subset \mathbb{F}_0$, contenant tous les ensembles P -négligeables, et de poser $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}_{0-}$ pour $t < 0$; ainsi l'instant 0 perd son rôle spécial. Soient T un temps d'arrêt (T peut prendre les valeurs 0 et $+\infty$ avec probabilité positive) et X une v.a. intégrable ; nous introduisons les deux processus à variation intégrable suivants, définis pour $-\infty < t \leq +\infty$, nuls pour $t < 0$, pouvant présenter un saut en 0 et un saut à l'infini

$$(1) \quad A_t = I_{\{t \geq T\}} \quad , \quad B_t = XI_{\{t \geq T\}}$$

et nous désignons par $\tilde{A}, \tilde{B}$ leurs projections duales prévisibles. On dit parfois que B est innovant si $\tilde{B} = 0$, ce qui revient à dire que $E[B_\infty - B_t | \mathbb{F}_t] = 0$ pour tout t , ou encore, lorsque X est $\mathbb{F}_T$ -mesurable, que B est une martingale.

La remarque suivante figure dans un travail tout récent de Le Jan :

LEMME. B est innovant si et seulement si $E[X | \mathbb{F}_{T-}] = 0$.

DEMONSTRATION. Soit $A \in \mathbb{F}_T$; on a $E[(B_\infty - B_t)I_A] = E[XI_{\{t < T\} \cap A}]$, et les ensembles de la forme $\{t < T\} \cap A$ ($t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{F}_t$) forment une famille stable par intersection qui engendre $\mathbb{F}_{T-}$. On applique alors le théorème I.21 de [1], en prenant pour $\mathbb{H}$ l'espace des v.a. $\mathbb{F}_{T-}$ -mesurables bornées U telles que $E[UX] = 0$.

Considérons les mesures bornées sur $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}) \times \Omega$

$$\alpha(U) = E\left[\int_{[0,\infty]} U_s dA_s\right], \quad \beta(U) = E\left[\int_{[0,\infty]} U_s dB_s\right]$$

On a manifestement $\beta \ll \alpha$, et la même propriété a lieu a fortiori sur la tribu prévisible. Il existe donc, d'après le théorème de Radon-Nikodym, un processus prévisible $(Z_t)_{0 \leq t \leq +\infty}$, unique à équivalence près par rapport à α , α -intégrable, et tel que $\beta = Z \cdot \alpha$ sur la tribu prévisible $\mathcal{P}$. Autrement dit,

$$(3) \quad E[|Z_T|] < \infty, \quad \tilde{B}_t = \int_{[0,\infty]} Z_s d\tilde{A}_s$$

Mais la relation $\beta = Z \cdot \alpha$ sur la tribu prévisible signifie que $B - Z \cdot A$ est innovant. Ce processus s'écrivant $(X - Z_T)I_{\{t \geq T\}}$, le lemme précédent nous dit que $Z_T = E[X | \mathcal{F}_{T-}]$.

Inversement, si Z est un processus prévisible tel que $Z_T = E[X | \mathcal{F}_{T-}]$, $|Z|$ est α -intégrable, $B - Z \cdot A$ est innovant d'après le lemme, donc Z est densité de β/α sur la tribu prévisible, et il en résulte que Z est connu p.p. relativement à la mesure aléatoire $d\tilde{A}$.

La réponse aux questions a) et b) est donc

$$(4) \quad E[X | \mathcal{F}_{T-}] = Z_T \quad \text{où } (Z_t) \text{ est version prévisible de } \frac{d\tilde{B}}{d\tilde{A}}$$

Les résultats de "conditionnement par rapport au passé strict" entrent maintenant dans le schéma suivant : on s'intéresse au cas où X est $\mathcal{F}_T$ -mesurable, et où l'on a une représentation de la forme

$$(5) \quad \tilde{B}_t = \int_0^t n_s(\omega, X) ds$$

$(s, \omega) \mapsto n_s(\omega, \cdot)$ étant un noyau de $[0, \infty] \times \Omega$ muni de la tribu prévisible, dans $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ - noyau non nécessairement borné. Dans ce cas, la formule

(4) s'écrit

$$(6) \quad Z_t(\omega) = \frac{n_t(\omega, X)}{n_t(\omega, 1)} \quad \text{et en particulier} \quad E[X | \mathcal{F}_{T-}] = \frac{n_T(X)}{n_T(1)}$$

REMARQUE. On peut se demander si la v.a. X "contrôle" l'ensemble du processus prévisible (Z_t) . Or on a, le processus $(|Z_t|^p)$ étant prévisible

$$E\left[\int_{[0,\infty]} |Z_t|^p d\tilde{A}_t\right] = E\left[\int_{[0,\infty]} |Z_t|^p dA_t\right] = E[|Z_T|^p] \leq E[|X|^p].$$

REFERENCES

- [1] C. Dellacherie et P.A. Meyer. Probabilités et Potentiels A. 2e éd. Hermann, Paris 1976.
- [2] Y. Le Jan. Martingales et changement de temps, martingales de sauts. A paraître aux C.R. Acad. Sc. Paris (1977).
- [3] M. Weil. Conditionnement par rapport au passé strict. C.R.A.S. Paris t. 270, p. 1523-1525 (1970).