

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BROSSARD

Comportement non-tangentiel et comportement brownien des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Démonstration probabiliste d'un théorème de Calderon et Stein

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 378-397

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__378_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT "NON-TANGENTIEL" ET
COMPORTEMENT "BROWNIEN" DES FONCTIONS
HARMONIQUES DANS UN DEMI-ESPACE. DEMONSTRATION
PROBABILISTE D'UN THEOREME DE CALDERON ET STEIN.

par Jean BROSSARD

En 1950 Calderon ([1] et [2]) et en 1961 Stein ([1]) démontraient que pour une fonction u harmonique dans un demi-espace $\Pi = \mathbb{R}^{\nu} \times \mathbb{R}_+^*$, les trois conditions suivantes étaient équivalentes en presque tout point ϑ de la frontière :

- u admet une limite "non-tangentielle" en ϑ
- u est bornée "non-tangentiellement" au voisinage de ϑ
- le gradient de u , ∇u , est de carré intégrable "non-tangentiellement" au voisinage de ϑ , pour la mesure $y^{1-\nu} dx dy$ (où dx désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{\nu}$ et dy celle de $\mathbb{R}_+^*$).

Mon but est ici, de montrer ce théorème par des méthodes probabilistes. Pour cela, je vais m'appuyer sur le résultat suivant : si X_t désigne la position de la particule brownienne à l'instant t , les propriétés suivantes sont presque sûrement équivalentes :

- $u(X_t)$ admet une limite quand t tend vers τ (temps de sortie de Π)
- $u(X_t)$ est bornée sur $[0, \tau[$
- $\int_0^{\tau} \|\nabla u(X_t)\|^2 dt$ est fini.

Dans le cas $\nu = 1$, c'est-à-dire dans le cas du demi-plan, il est connu (Brelot et Doob [1], Doob [1]) que l'existence d'une limite non-tangentielle pour u équivaut presque partout à l'existence d'une limite sur les trajectoires browniennes. Cependant, ce résultat n'est plus valable dès que la dimension de l'espace est supérieure à 2 ($\nu > 1$), comme l'a montré un contre-exemple de Burkholder et Gundy ([1]) : on peut trouver dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ une fonction harmonique ayant presque-sûrement des limites sur les trajectoires browniennes, mais n'ayant nulle part de limite non-tangentielle. Malgré cela, je vais montrer que le théorème de Calderon et Stein sur le "comportement non-tangentiel de u (th. I) peut se déduire du théorème analogue sur le "comportement brownien" de u (th. I*).

1. LE THEOREME DE CALDERON ET STEIN ET SON ANALOGUE PROBABILISTE.

Introduisons tout d'abord quelques notations. Quand on notera un point de $\Pi = \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}_+^*$ sous la forme (x, y) , x représentera la coordonnée dans $\mathbb{R}^\nu$ et y la coordonnée dans $\mathbb{R}_+^*$. Si ϑ est un point de $\mathbb{R}^\nu$ (identifié à la frontière de Π), et a un nombre strictement positif, on notera $\Gamma_a(\vartheta)$ le cône tronqué défini par :

$$\Gamma_a(\vartheta) = \{(x, y) \in \Pi \mid \|x - \vartheta\| < ay < a\}.$$

A la fonction u , on peut associer les deux fonctions de $\mathbb{R}^\nu$ définies par :

$$N_a(\vartheta) = \sup_{z \in \Gamma_a(\vartheta)} |u(z)|$$

$$A_a(\vartheta) = \left[\int_{\Gamma_a(\vartheta)} \|\nabla u(x, y)\|^2 y^{1-\nu} dx dy \right]^{1/2}.$$

On appelle $\mathcal{L}_a$ l'ensemble des points ϑ de $\mathbb{R}^\nu$ pour lesquels $u(z)$ admet une limite quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_a(\vartheta)$. On appelle $\mathcal{N}_a$ (resp. $\mathcal{C}_a$) l'ensemble des points où N_a (resp. A_a) est finie. Avec ces notations, le théorème de Calderon et Stein s'énonce :

THEOREME I. - Les ensembles $\mathcal{L}_a, \eta_a, Q_a$ ne diffèrent que par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle et sont indépendants de a (à des ensembles de mesure nulle près).

Introduisons maintenant des notations analogues à celles d'analyse pour énoncer le théorème probabiliste analogue au théorème de Calderon et Stein.

Si X_t est la position de la particule brownienne à un instant t strictement inférieur à τ (temps de sortie de Π), on peut considérer les deux variables aléatoires

$$N^* = \sup_{t \in [0, \tau[} u(X_t)$$

et
$$A^* = \int_0^\tau \|\nabla u(X_t)\|^2 dt .$$

Il est connu que $[u(X_t)]_{t < \tau}$ est un mouvement brownien stoppé à l'instant A^* et changé de temps. Les trois événements

$$\mathcal{L}^{**} = \{u(X_t) \text{ admet une limite finie quand } t \text{ tend vers } \tau\} ,$$

$$\eta^{**} = \{N^* < \infty\} ,$$

$$Q^{**} = \{A^* < \infty\}$$

ne diffèrent donc que par des événements P^z -négligeables (où P^z désigne la loi de probabilité du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^{v+1}$ issu d'un point z de Π). [Ce résultat est aussi montré dans Brossard [1]].

C'est en fait la "forme conditionnée" de ce résultat que je vais utiliser (théorème I*). Pour cela, considérons ${}^\vartheta P^z$, probabilité du mouvement brownien issu de z et conditionné par sa sortie de Π en ϑ . Autrement dit, considérons le h -processus tel qu'il est défini par Doob dans [1], h étant la fonction minimale associée au point ϑ , c'est-à-dire :

$$p_\vartheta(x, y) = c_\vartheta \frac{y}{(\|x - \vartheta\|^2 + y^2)^{\frac{v+1}{2}}} \quad \text{avec} \quad c_\vartheta = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\pi^{\frac{v+1}{2}}} .$$

Identifions les événements "naturels" du h-processus aux événements "naturels" du mouvement brownien tué à l'instant τ . Les propriétés suivantes découlent alors de l'article de Doob [1] :

- i) si A est un événement "naturel", $\vartheta \mapsto \vartheta_{P^2}(A)$ est une fonction borélienne dont la composée avec X_τ est égale à $E^2[A|X_\tau]$.
- ii) Si σ est un temps d'arrêt pour la famille naturelle de tribus rendue continue à droite, et si A est dans la tribu du passé de σ , alors :

$$\vartheta_{E^Z}[A; \sigma < \tau] = \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^Z[A; p_\vartheta(X_0); \sigma < \tau] .$$
- iii) Les fonctions $\vartheta \mapsto \vartheta_{P^Z}(\mathfrak{L}^{**})$, $\vartheta \mapsto \vartheta_{P^Z}(\eta^{**})$, $\vartheta \mapsto \vartheta_{P^Z}(\mathcal{Q}^{**})$ prennent pour valeur 0 ou 1, indépendamment de z et sont donc les fonctions caractéristiques de trois boréliens $\mathfrak{L}^*$, η^* , $\mathcal{Q}^*$ de R^V . Si de plus ϑ est dans $\mathfrak{L}^*$, la variable aléatoire $\lim_{t \rightarrow \tau} u(X_t)$ est ϑ_{P^Z} -presque sûrement constante.

Ces propriétés et les remarques faites plus haut nous permettent d'énoncer le théorème I^* :

THEOREME I^* . - Les ensembles $\mathfrak{L}^*$, η^* , $\mathcal{Q}^*$ ne diffèrent que par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle.

2. DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE DU THEOREME I (COMPARAISON DES ENSEMBLES $\mathfrak{L}_a$ et η_a).

Dans ce paragraphe, je vais montrer que $\mathfrak{L}_a$ et η_a ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle et sont indépendants de a , à des ensembles de mesure nulle près.

Appelons $\mathfrak{L}$ (resp. η) l'intersection des $\mathfrak{L}_a$ (resp. η_a) quand a parcourt $\mathbb{R}_+^*$. Les inclusions de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}_a$ et de $\mathfrak{L}_a$ dans η_a étant évidentes, il ne reste plus qu'à montrer "l'inclusion" de η_a dans $\mathfrak{L}$. (On écrira désormais "inclusion" (ou "égalité") entre guillemets à la place de : inclusion (ou égalité) à un ensemble de mesure nulle près).

Soit $E_n = \{\vartheta \in \mathbb{R}^V \mid N_a(\vartheta) \leq n\}$. Comme η_a est la réunion des E_n , il suffit de montrer "l'inclusion" de E_n dans $\mathfrak{L}$. Je vais d'abord montrer (sans faire appel à la théorie du potentiel) que E_n est inclus dans η^* . Comme N^* est majoré par n pour les trajectoires qui restent dans $\Omega_{E_n} = \bigcup_{\vartheta \in E_n} \Gamma_a(\vartheta)$, et comme $\vartheta P^Z[N^* < \infty]$ vaut 0 ou 1 (propriété i), § 1), c'est une conséquence immédiate de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit E un borélien de $\mathbb{R}^V$, $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_a(\vartheta)$ et σ le temps de sortie de Ω_E .

Pour presque tout point ϑ de E et tout z dans $\Gamma_a(\vartheta)$, $\vartheta P^Z[\sigma = \tau]$ est strictement positif.

Cette proposition sera démontrée au paragraphe 4. Achéons de montrer "l'inclusion" de E_n dans $\mathfrak{L}$. Presque tout point ϑ de E_n est dans η^* d'après ce qu'on vient de voir, donc dans $\mathfrak{L}^*$ d'après le théorème I*. Et donc quand t tend vers τ , $u(X_t)$ admet une limite ϑP^Z -presque-sûrement constante de valeur notée $u(\vartheta)$. La proposition 1 implique : $|u(\vartheta)| \leq n$.

Soit v la fonction harmonique bornée dans Π définie par :

$$v(z) = E^Z[u(X_\tau) ; X_\tau \in E_n] .$$

Je vais montrer que pour presque tout ϑ de E_n , pour tout nombre b strictement positif, $u(z) - v(z)$ tend vers 0 quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$. Ceci montrera que pour presque tout ϑ de E_n et tout $b > 0$, $u(z)$ admet une limite finie quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$, puisque tel est le cas de $v(z)$. Ceci achèvera donc de montrer

"l'inclusion" de E_n dans $\mathcal{L}$.

Soit σ le temps de sortie de Ω_{E_n} . Comme E_n est fermé, si $\sigma = \tau$, X_σ est dans E_n et donc :

$$u(z) - v(z) = E^z[u(X_\sigma) - v(X_\sigma)] = E^z[u(X_\sigma) - v(X_\sigma) ; \sigma \neq \tau]$$

puisque u et v ont même valeur sur E_n . Et donc si z est dans Ω_{E_n} :

$$|u(z) - v(z)| \leq 2nP^z[\sigma \neq \tau] .$$

Il suffit maintenant de montrer que $P^z[\sigma \neq \tau]$ tend vers 0 quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$ (cela montrera en effet, que si z est suffisamment proche de ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$, il est dans Ω_{E_n} et donc que la majoration de $|u(z) - v(z)|$ est valable). Reprenons ici une idée de Calderon : posons

$$\Lambda_1 = \{(x, y) \in \Pi - \Omega_{E_n} \mid y < 1\} \text{ et } \Lambda_2 = \{(x, y) \in \Pi - \Omega_{E_n} \mid y \geq 1\} .$$

Alors :

$$P^z[\sigma \neq \tau] = P^z[X_\sigma \in \Lambda_1] + P^z[X_\sigma \in \Lambda_2] .$$

Le deuxième terme tend vers 0, car il est majoré par la P^z -probabilité que la particule sorte de la bande $\{(x, y) \in \Pi \mid 0 < y < 1\}$ par l'hyperplan $y = 1$ et que cette probabilité est égale à l'ordonnée de z .

Pour majorer le premier terme, utilisons le fait que si $z' = (x', y')$ est un point de Π , et $B_{z'}$ la boule de $\mathbb{R}^V$ de centre x' et de rayon ay' , alors $P^{z'}[X_\tau \in B_{z'}]$ est une constante C indépendante de z' .

Si de plus z' est dans Λ_1 , $B_{z'}$ est incluse dans E_n^C et donc $P^{z'}[X_\tau \notin E_n] \geq C$. La propriété de Markov forte, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P^z[X_\tau \notin E_n] &\geq P^z[X_\sigma \in \Lambda_1 ; P^{X_\sigma}[X_\tau \notin E_n]] \\ &\geq C \cdot P^z[X_\sigma \in \Lambda_1] . \end{aligned}$$

Pour presque tout ϑ de E_n et tout $b > 0$, le membre de gauche tend vers 0 quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$. Il en est donc de même de $P^z[X_\sigma \in \Lambda_1]$, ce qui achève la démonstration.

En conclusion, nous avons montré dans ce paragraphe (en admettant provisoirement la proposition 1) que les ensembles $\mathfrak{L}_a$, η_a , $\mathfrak{L}$ étaient "égaux". Ceci montre bien la partie (due à Calderon) du théorème I relative aux ensembles $\mathfrak{L}_a$ et η_a .

3. DEMONSTRATION DE LA DEUXIEME PARTIE DU THEOREME I ("EGALITE" DE η_a ET $\mathfrak{Q}_a$).

Pour achever la démonstration du théorème I, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathfrak{Q}_a$ et η_a ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle. Comme on a vu que η_a ne dépendait pas de a , à un ensemble de mesure nulle près (§ 2), il suffit de montrer les "inclusions" de $\mathfrak{Q}_a$ dans $\eta_{\frac{a}{2}}$ et de η_{2a} dans $\mathfrak{Q}_a$ (propositions 2 et 3).

PROPOSITION 2. - A un ensemble de mesure nulle près, $\mathfrak{Q}_a$ est inclus dans $\eta_{\frac{a}{2}}$.

Pour démontrer cette proposition, nous allons d'abord montrer "l'inclusion" de $\mathfrak{Q}_a$ dans $\mathfrak{Q}^*$. Cela s'appuie sur le lemme simple suivant :

LEMME 1. - Soit E un borélien de $\mathbb{R}^v$ et $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_a(\vartheta)$.
Alors :

$$\int_E A_a^2(\vartheta) d\vartheta = k_v a^v \int_{\Omega_E} y \varphi_E(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

où $\varphi_E(x, y)$ désigne la moyenne de la fonction caractéristique de E sur la boule $B_{x, ay}$ de centre x et de rayon ay , et k_v le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^v$.

Je ne démontrerai pas ce lemme qui est une simple application du théorème de Fubini (cf. Stein [1]).

Considérons maintenant $E_p = \{\vartheta \in \mathbb{R}^V \mid \|\vartheta\| \leq p ; A_a^2(\vartheta) \leq p\}$ et $E_{p,n} = \left\{ \vartheta \in E_p \mid \forall y \leq \frac{1}{n}, \varphi_{E_p}(x, y) \geq \frac{1}{2} \right\}$ (où φ_{E_p} est la fonction définie dans le lemme 1). Presque tout point ϑ de E_p est point de densité de E_p , c'est-à-dire que $\varphi_{E_p}(\vartheta, y)$ tend vers 1 quand y tend vers 0. $E_p - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{p,n}$ est donc un ensemble de mesure nulle. Il suffit donc de montrer que pour tout couple (p, n) , $E_{p,n}$ est "inclus" dans Ω^* . Remarquons que $E_{p,n}$ est compact. Notons $\Omega_{E_p} = \bigcup_{\vartheta \in E_p} \Gamma_a(\vartheta)$ et définissons $\Omega_{E_{p,n}}$ de façon identique. Soit σ le temps de sortie de $\Omega_{E_{p,n}}$.

■ Majorons $E^{z_0}[A_\sigma^*]$ pour $z_0 = (x_0, y_0)$ fixé dans Π (on pose $A_\sigma^* = \int_0^\sigma \|\nabla u(X_t)\|^2 dt$) :

$$E^{z_0}[A_\sigma^*] = E^{z_0} \left[\int_0^\sigma \|\nabla u(X_t)\|^2 dt \right] \leq E^{z_0} \left[\int_0^\tau \|\nabla u(X_s)\|^2 \chi_{\Omega_{E_{p,n}}}(X_s) ds \right].$$

Cette dernière quantité est (à une constante multiplicative près) la valeur en z_0 du potentiel de Green de la fonction $\|\nabla u\|^2 \chi_{\Omega_{E_{p,n}}}$, c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega_{E_{p,n}}} h_{z_0}(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

où $h_{z'}(z)$ désigne la fonction de Green de Π . (cf. par exemple Dynkin [1] vol. II).

Cette intégrale se décompose en la somme de l'intégrale sur $\Lambda = \left\{ (x, y) \in \Omega_{E_{p,n}} \mid y \leq \min\left(\frac{1}{n}, \frac{y_0}{2}\right) \right\}$ et de l'intégrale sur $\Omega_{E_{p,n}} - \Lambda$.

Cette dernière est finie car $\Omega_{E_{p,n}} - \Lambda$ est relativement compact et la fonction à intégrer localement intégrable. D'autre part, comme :

$$h_{z_0}(z) = \begin{cases} \log \frac{r_2}{r_1} & \text{si } v = 1 \\ \frac{1}{r_1^{v-1}} - \frac{1}{r_2^{v-1}} & \text{si } v > 1 \end{cases}$$

(où r_1 et r_2 désignent les distances de z à z_0 et au symétrique de z_0 par rapport à la frontière de Π), il est facile de voir que sur Λ , $h_{z_0}(x, y)$ est majoré par une fonction du type ky . Et donc à une constante multiplicative près, $\int_\Lambda h_{z_0}(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$ est majoré par :

$$\int_{\Lambda} y \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

et donc par :

$$2 \int_{\Omega_{E_p}} y \varphi_{E_p}(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

puisque sur Λ , $\varphi_{E_p}(x, y) \geq \frac{1}{2}$ et que Λ est inclus dans Ω_{E_p} . Cette dernière intégrale est finie d'après le lemme 1 et la définition de E_p . Ceci achève de montrer que $E^{z_0}[A_\sigma^*]$ est fini pour tout z_0 de Π .

■ De ce qui précède, on peut déduire que A_σ^* est fini P^Z -presque sûrement pour tout z de Π , et donc en "conditionnant" ce résultat, que pour presque tout ϑ de $E_{p,n}$, pour tout z à coordonnées rationnelles, A_σ^* est fini ϑP^Z -presque sûrement. En utilisant la proposition 1, et le fait que $\vartheta P^Z[A_\tau^* < \infty]$ vaut 0 ou 1 indépendamment de z , on en déduit que presque tout point de $E_{p,n}$ est dans $\mathcal{A}^*$. Ceci achève donc de montrer "l'inclusion" de $\mathcal{A}_a$ dans $\mathcal{A}^*$.

Avant de terminer la démonstration de la proposition 2, montrons le lemme suivant (dû à Stein).

LEMME 2. - Soit $\Gamma_{\frac{a}{2}}'(\vartheta) = \{(x, y) \in \Pi \mid \|x - \vartheta\| < \frac{a}{2} y < \frac{a}{4}\}$. Il

existe une constante C telle que pour tout ϑ :

$$\sup_{(x, y) \in \Gamma_{\frac{a}{2}}'(\vartheta)} y \|\nabla u(x, y)\| \leq C A_a(\vartheta) .$$

Démonstration : soit (x, y) un point de $\Gamma_{\frac{a}{2}}'(\vartheta)$ et B la boule de centre (x, y) tangente à la frontière de $\Gamma_a(\vartheta)$. Si (x', y') est dans B , et si r est le rayon de B , y' , y et r sont des grandeurs comparables (leurs rapports deux à deux sont majorés par une constante ne dépendant que de a). Cette remarque jointe à la sous-harmonicité de $\|\nabla u\|^2$ conduit à :

$$\begin{aligned}
y^2 \|\nabla u(x, y)\|^2 &\leq y^2 \frac{1}{|B|} \int_B \|\nabla u(x', y')\|^2 dx' dy' \\
&\leq C \int_B y'^{1-\nu} \|\nabla u(x', y')\|^2 dx' dy' \\
&\leq C A_a^2(\vartheta)
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

Démonstration de la proposition 2 :

Comme α_a est "inclus" dans α^* (et donc dans η^* , d'après le théorème 1*), il suffit de montrer que tout point ϑ de $\alpha_a \cap \eta^*$ est dans $\eta_{\frac{a}{2}}$. Soit donc ϑ un tel point et z_0 le point $(\vartheta, 1)$. Soit, pour y strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, S_y l'ensemble des points de $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$ d'ordonnée y . D'après le lemme 2, pour tout couple (z_1, z_2) de points de S_y :

$$\begin{aligned}
|u(z_1) - u(z_2)| &\leq \text{diam}(S_y) \cdot \sup_{z \in S_y} \|\nabla u(z)\| \\
&\leq C \frac{a}{2} y \cdot \frac{A_a(\vartheta)}{y} = C \frac{a}{2} A_a(\vartheta) .
\end{aligned}$$

Mais d'autre part, si τ_y désigne le temps de sortie de $\Pi_y = \{(x', y') \in \Pi \mid y' > y\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\vartheta_P^{z_0} [X_{\tau_y} \in S_y] &= \frac{1}{p_{\vartheta}(z_0)} E^{z_0} \left[p_{\vartheta}(X_{\tau_y}) ; X_{\tau_y} \in S_y \right] \\
&= \frac{1}{p_{\vartheta}(z_0)} \int_{B_{\vartheta, \frac{ay}{2}}} p_{\vartheta}(x', y) \frac{C_{\nu}(1-y)}{[(1-y)^2 + \|x' - \vartheta\|^2]^{\frac{\nu+1}{2}}} dx'
\end{aligned}$$

où $B_{\vartheta, \frac{ay}{2}}$ désigne la boule de $\mathbb{R}^{\nu}$ de centre ϑ et de rayon $\frac{ay}{2}$.

En tenant compte du fait que y est dans $]0, \frac{1}{2}]$, et que $z_0 = (\vartheta, 1)$:

$$\begin{aligned} \vartheta_P^{z_0} [X_{\tau_y} \in S_y] &\geq \frac{1}{2} \int_B p_{\vartheta}(x', y) \frac{dx'}{\left[1 + \frac{a^2 y^2}{4}\right]^{\frac{v+1}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \frac{a^2}{16}} \right]^{\frac{v+1}{2}} \int_B p_{\vartheta}(x', y) dx' . \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale vaut $\int_B p_0(x', 1) dx'$ et ne dépend donc que de $0, \frac{a}{2}$. $\vartheta_P^{z_0} [X_{\tau_y} \in S_y]$ est donc minorée indépendamment de y par une constante $C(a)$ strictement positive.

Comme ϑ est dans η^* , on peut trouver un nombre M tel que :

$$\vartheta_P^{z_0} [u_{\tau}^* \geq M] \leq \frac{C(a)}{2}$$

et donc tel que pour tout $y \leq \frac{1}{2}$:

$$\vartheta_P^{z_0} [|u(X_{\tau_y})| < M \text{ et } X_{\tau_y} \in S_y] \geq \frac{C(a)}{2} .$$

Pour tout $y < \frac{1}{2}$, on peut donc trouver un point z_1 dans S_y tel que $|u(z_1)| < M$. Et donc puisque sur S_y l'oscillation de u est majorée par $C \frac{a}{2} A_a(\vartheta)$, pour tout z de $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$ on a :

$$|u(z)| \leq M + \frac{a}{2} C A_a(\vartheta) .$$

Ceci montre que ϑ est dans $\eta_{\frac{a}{2}}$.

PROPOSITION 3. - A un ensemble de mesure nulle près, η_{2a} est inclus dans α_a .

Démonstration : soit $E_n = \{\vartheta | N_{2a}(\vartheta) \leq n\}$ et $\Omega_{E_n} = \bigcup_{\vartheta \in E_n} \Gamma_{2a}(\vartheta)$.

Notons σ le temps de sortie de Ω_{E_n} . Comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 1, $u(X_0)$ a un sens (presque-sûrement). De plus, on doit avoir pour tout z de Ω_{E_n} :

$$u^2(z) = E^z[u^2(X_\sigma) - A_\sigma^*] .$$

D'où :

$$E^z[A_\sigma^*] \leq E^z[u^2(X_\sigma)] \leq n^2 .$$

On en déduit que pour presque tout ϑ , $\vartheta E^z[A_\sigma^*]$ est fini pour tout z à coordonnées rationnelles.

Mais d'autre part, d'après le théorème de Fubini et la définition de ϑP^z , comme σ est inférieur ou égal à z :

$$\begin{aligned} \vartheta E^z[A_\sigma^*] &= \int_0^{+\infty} \vartheta E^z[\|vu(X_s)\|^2; s < \sigma] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \vartheta E^z[\|vu(X_s)\|^2; s < \tau; s < \sigma] ds \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} \int_0^{+\infty} E^z[\|vu(X_s)\|^2 p_\vartheta(X_s); s < \sigma] ds \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z\left[\int_0^\sigma p_\vartheta(X_s) \|vu(X_s)\|^2 ds\right] \\ &= \frac{k_v}{p_\vartheta(z)} \int_{\Omega_{E_n}} g_z(x, y) p_\vartheta(x, y) \|vu(x, y)\|^2 dx dy \end{aligned}$$

où $g_z(z')$ désigne la fonction de Green de Ω_{E_n} [cf. par exemple Dynkin [1] vol. II].

Et donc, pour presque tout ϑ de E et tout z à coordonnées rationnelles, dans Ω_{E_n} :

$$\int_{\Gamma_a(\vartheta)} g_z(x, y) p_\vartheta(x, y) \|vu(x, y)\|^2 dx dy < +\infty .$$

Mais si (x, y) est dans $\Gamma_a(\vartheta)$:

$$p_\vartheta(x, y) = \frac{C_v y}{[y^2 + \|x - \vartheta\|^2]^{\frac{v+1}{2}}} \geq \frac{C_v}{(1+a^2)^{\frac{v+1}{2}}} \frac{1}{y^v} .$$

Et donc,

$$\int_{\Gamma_a(\vartheta)} \frac{g_z(x, y)}{y} y^{1-v} \|vu(x, y)\|^2 dx dy < +\infty .$$

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que pour presque tout ϑ , pour tout z dans $\Gamma_a(\vartheta)$, $\frac{g_z(x,y)}{y}$ admet une limite strictement positive quand (x,y) tend vers $(\vartheta,0)$ dans $\Gamma_a(\vartheta)$. C'est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - Soit E un fermé de $\mathbb{R}^V$ et $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_{2a}(\vartheta)$. Si $g_z(z')$ désigne la fonction de Green de Ω_E , pour presque tout ϑ de E , pour tout z_0 dans $\Gamma_a(\vartheta)$, $\frac{g_{z_0}(x,y)}{y}$ admet une limite strictement positive quand (x,y) tend vers $(\vartheta,0)$ dans $\Gamma_a(\vartheta)$.

Cette proposition est une conséquence de la proposition 1 et elle sera démontrée dans le paragraphe suivant.

4. DEMONSTRATION DES PROPOSITIONS 1 ET 4.

Démonstrons d'abord la proposition 1. Soit E un borélien de $\mathbb{R}^V$, $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_a(\vartheta)$ et σ le temps de sortie de Ω_E . On veut montrer que pour presque tout ϑ de E et tout z dans $\Gamma_a(\vartheta)$, $\vartheta P^z[\sigma = \tau]$ est strictement positif. Pour cela, considérons la fonction

$$z \mapsto \varphi(z) = p_{\vartheta}(z) \vartheta P^z[\sigma = \tau] .$$

D'après la propriété ii) du mouvement brownien conditionné (rappelee au paragraphe 1), $\varphi(z)$ vaut :

$$\varphi(z) = p_{\vartheta}(z) \left(1 - \vartheta P^z[\sigma < \tau] \right) = p_{\vartheta}(z) - E^z[p_{\vartheta}(X_{\sigma}) : \sigma < \tau]$$

φ est donc harmonique et positive dans Ω_E donc dans $\Gamma_a(\vartheta)$. Si elle s'annule en un point z_0 de $\Gamma_a(\vartheta)$, elle est nulle pour tout z dans $\Gamma_a(\vartheta)$. Il suffit donc de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5. - Sous les mêmes hypothèses que la proposition 1,
Pour presque tout ϑ de K , quel que soit le nombre b strictement positif,
 $\vartheta P^z[\sigma < \tau]$ tend vers 0 quand z tend vers $(\vartheta, 0)$
dans $\Gamma_b(\vartheta)$.

Démonstration : soit B la boule de $\mathbb{R}^V$ centrée en ϑ , de rayon r et B' la boule centrée en ϑ de rayon $\frac{r}{2}$. Notons Λ_1 la partie de la frontière de Ω_E située dans Π au-dessus de B' et à une hauteur strictement inférieure à 1, c'est-à-dire :

$$\Lambda_1 = \{(x, y) \in \Pi \mid x \in B' \text{ et } y = \frac{1}{a} d(x, E) < 1\}.$$

Notons Λ_2 l'ensemble $\Pi \cap (\delta\Omega_E - \Lambda_1)$. Si z est un point d'adhérence de Ω_E dans Π , on a :

$$\begin{aligned} \vartheta P^z[\sigma < \tau] &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[p_\vartheta(X_\sigma) ; \sigma < \tau] \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[p_\vartheta(X_\sigma) ; X_\sigma \in \Lambda_1] + \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[p_\vartheta(X_\sigma) ; X_\sigma \in \Lambda_2]. \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand z tend vers $(\vartheta, 0)$ dans $\Gamma_b(\vartheta)$ car $p_\vartheta(z)$ devient infini et p_ϑ est bornée sur Λ_2 .

Majorons maintenant le premier terme. Soit (x, y) un point de Λ_1 , soit x' un point tel que $\|x - x'\| < \frac{ay}{2}$ et soit $y' = \frac{1}{a} d(x', E)$. Comme $y = \frac{1}{a} d(x, E)$, on doit avoir :

$$\frac{y}{2} \leq y' \leq \frac{3y}{2} \quad \text{et} \quad \|x' - \vartheta\| \leq \|x - \vartheta\| + \frac{1}{2} d(x, E) \leq \frac{3}{2} \|x - \vartheta\|.$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{p_\vartheta(x', y')}{p_\vartheta(x, y)} = \frac{y'}{y} \left[\frac{\|x - \vartheta\|^2 + y^2}{\|x' - \vartheta\|^2 + y'^2} \right]^{\frac{v+1}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{v+1}.$$

Si l'on appelle ω_ϑ la fonction définie dans $\mathbb{R} - \{\vartheta\}$ par

$$\varphi_{\mathfrak{y}}(x') = p_{\mathfrak{y}}\left(x', \frac{1}{a}d(x', E)\right) = \frac{\frac{1}{a}d(x', E)}{\left(\left[\frac{1}{a}d(x', E)\right]^2 + \|x' - \mathfrak{y}\|^2\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

on obtient :

$$\int_{\|x-x'\| < \frac{ay}{2}} \varphi_{\mathfrak{y}}(x') p_{x'}(x, y) dx' \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu+1} \int_{\|x-x'\| < \frac{ay}{2}} p_{x'}(x, y) dx' .$$

Cette dernière intégrale a une valeur $C(a)$ ne dépendant que de a puisqu'elle vaut :

$$\int_{\|x'\| < \frac{a}{2}} p_{x'}(0, 1) dx' .$$

D'autre part, comme x est dans B' et que $y = \frac{1}{a}d(x, E)$ est inférieur à $\frac{1}{a}\|x - \mathfrak{y}\|$ donc à $\frac{1}{a}r$, la boule de centre x et de rayon $\frac{ay}{2}$ est incluse dans B . En combinant ces résultats, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} p_{\mathfrak{y}}(x, y) &\leq \frac{2}{C(2a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_{\|x-x'\| < \frac{a}{2}} \varphi_{\mathfrak{y}}(x') p_{x'}(x, y) dx' \\ &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_B \varphi_{\mathfrak{y}}(x') p_{x'}(x, y) dx' ; \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_{\mathfrak{y}}(x, y) \leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} E^{(x, y)}[\varphi_{\mathfrak{y}}(X_{\tau}) ; X_{\tau} \in B]$$

(inégalité valable pour tout point (x, y) de Λ_1).

Appliquons ce résultat, et la propriété de Markov forte pour majorer le premier terme de l'expression de $\mathfrak{y}P^Z[\sigma < \tau]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{\mathfrak{y}}(z)} E^Z[p_{\mathfrak{y}}(X_{\sigma}) ; X_{\sigma} \in \Lambda_1] &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \frac{1}{p_{\mathfrak{y}}(z)} E^Z\left[E^{X_{\sigma}}[\varphi_{\mathfrak{y}}(X_{\tau}) ; X_{\tau} \in B]\right] \\ &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \frac{1}{p_{\mathfrak{y}}(z)} E^Z[\varphi_{\mathfrak{y}}(X_{\tau}) ; X_{\tau} \in B] \\ &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_B \varphi_{\mathfrak{y}}(x') \frac{p_{x'}(z)}{p_{\mathfrak{y}}(z)} dx' . \end{aligned}$$

Mais si $z = (x_0, y_0)$ est dans $\Gamma_b(\mathfrak{y})$:

$$\frac{p_{x'}(z)}{p_{\vartheta}(z)} = \left[\frac{\|x_0 - \vartheta\|^2 + y_0^2}{\|x_0 - x'\|^2 + y_0^2} \right]^{\frac{\nu+1}{2}} \leq \left[1 + \frac{\|x_0 - \vartheta\|^2}{y_0^2} \right]^{\frac{\nu+1}{2}} \leq (1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}}.$$

Et donc :

$$(*) \quad \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^Z[p_{\vartheta}(X_{\sigma}) ; X_{\sigma} \in \Lambda_1] \leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} (1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \int_B \varphi_{\vartheta}(x') dx'$$

(inégalité valable si z est dans $\Gamma_b(\vartheta)$ et dans $\Omega_E \cup \Lambda_1$).

Supposons que ϑ a été choisi de telle sorte que φ_{ϑ} soit localement intégrable. Si z est dans Λ_1 , le premier membre de l'inégalité (*) vaut 1. Si B a été choisie assez petite pour que le deuxième membre soit strictement inférieur à 1, nous en déduisons que $\Gamma_b(\vartheta) \cap \Lambda_1$ est vide et donc que l'intersection de $\Gamma_b(\vartheta)$ avec un voisinage convenable de $(\vartheta, 0)$ est entièrement incluse dans Ω_E . L'inégalité écrite ci-dessus est donc valable pour tout point z de $\Gamma_b(\vartheta)$ suffisamment proche de $(\vartheta, 0)$.

En tenant compte du fait que le deuxième terme de l'expression de $\vartheta P^Z[\sigma < \tau]$ tend vers 0, nous obtenons donc que, si ϑ a été choisi dans E de telle sorte que φ_{ϑ} soit localement intégrable, on a pour tout b :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow (\vartheta, 0) \\ z \in \Gamma_b(\vartheta)}} \vartheta P^Z[\sigma < \tau] \leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} (1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \int_B \varphi_{\vartheta}(x') dx'$$

et donc :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \vartheta \\ z \in \Gamma_b(\vartheta)}} \vartheta P^Z[\sigma < \tau] = 0$$

puisque $\int_B \varphi_{\vartheta}(x') dx'$ peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de B .

Il ne reste plus qu'à montrer que pour presque tout ϑ de E , φ_{ϑ} est localement intégrable. Il suffit pour cela de montrer que, si B_n est la boule de $\mathbb{R}^{\nu}$ de rayon n , pour tout entier n , pour presque tout

ϑ de E :

$$\int_{B_n} \varphi_{\vartheta}(x) dx < +\infty$$

ou encore

$$\int_{B_n - \bar{E}} \varphi_{\vartheta}(x) dx < +\infty$$

(puisque sur $\bar{E}$ (adhérence de E), φ_{ϑ} est nulle). Mais d'après le théorème de Fubini :

$$\int_E \left(\int_{B_n - \bar{E}} \varphi_{\vartheta}(x) dx \right) d\vartheta = \int_{B_n - \bar{E}} \left(\int_E \varphi_{\vartheta}(x) d\vartheta \right) dx .$$

Mais si x est dans $B_n - \bar{E}$, $\int_E \varphi_{\vartheta}(x) d\vartheta$ est la valeur au point $(x, d(x, E))$ de la fonction harmonique bornée dans Π ayant pour valeurs au bord 1 sur E et 0 sur $\mathbb{R}^V - E$ et donc $\int_E \varphi_{\vartheta}(x) d\vartheta \leq 1$ pour tout x de $B_n - \bar{E}$.

Donc :

$$\int_E \left[\int_{B_n - \bar{E}} \varphi_{\vartheta}(x) dx \right] d\vartheta \leq \int_{B_n} dx < +\infty .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 5 et donc aussi celle de la proposition 1.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 4.

Soit E un borélien de $\mathbb{R}^V$ et $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_{2a}(\vartheta)$. Notons σ le temps de sortie de Ω_E . Si $h_z(z')$ désigne la fonction de Green de Π , la fonction de Green de Ω_E $g_z(z')$ a pour expression :

$$g_z(z') = h_z(z') - E^z \left[h_{X_{\sigma}}(z') \right] .$$

Plaçons nous uniquement dans le cas $v > 1$ (le cas $v = 1$ se traite de façon analogue).

Soit $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z = (x, y)$ deux points de Π . Notons $r_1 = \|z - z_1\|$ et $r_2 = \|z - \bar{z}_1\|$ où $\bar{z}_1$ désigne le symétrique de z_1 , par rapport à la frontière de Π . Avec ces notations :

$$\begin{aligned}
 h_{z_1}(z) &= \frac{1}{r_1^{v-1}} - \frac{1}{r_2^{v-1}} = (r_2^2 - r_1^2) \left[\frac{1}{r_1 + r_2} \sum_{i=1}^{v-1} \frac{1}{r_1^i r_2^{v-i}} \right] \\
 &= 4y_1 y \left[\frac{1}{r_1 + r_2} \sum_{i=1}^{v-1} \frac{1}{r_1^i r_2^{v-i}} \right]
 \end{aligned}$$

z_1 étant fixé, quand z tend vers $(\vartheta, 0)$, r_1 et r_2 tendent vers $\|z_1 - (\vartheta, 0)\|$ et donc :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow (\vartheta, 0) \\ z \in \Gamma_a(\vartheta)}} \frac{h_{z_1}(z)}{y} = \frac{2y_1(v-1)}{[y_1^2 + \|x_1 - \vartheta\|^2]^{\frac{v+1}{2}}} = \frac{2(v-1)}{C_v} p_{\vartheta}(z_1) .$$

De ce résultat et de l'expression de $g_{z_0}(z)$, sous réserve de légitimité du passage à la limite, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{z \rightarrow (\vartheta, 0) \\ z \in \Gamma_a(\vartheta)}} \frac{g_{z_0}(z)}{y} &= \frac{2(v-1)}{C_v} [p_{\vartheta}(z_0) - E^{z_0}[p_{\vartheta}(X_0)]] \\
 &= \frac{2(v-1)}{C_v} p_{\vartheta}(z_0) [1 - P^{z_0}(\sigma < \tau)] \\
 &= \frac{2(v-1)}{C_v} p_{\vartheta}(z_0) P^{z_0}(\sigma = \tau)
 \end{aligned}$$

expression qui est strictement positive pour presque tout ϑ de E et tout z_0 dans $\Gamma_a(\vartheta)$ d'après la proposition 1.

Il ne reste donc plus qu'à légitimer le passage à la limite sous l'espérance. Soit $z_1 = (x_1, y_1)$ dans le complémentaire de $\Gamma_{2a}(\vartheta)$ et z dans $\Gamma_a(\vartheta)$ d'ordonnée inférieure à $\frac{1}{2}$. Il existe alors une constante k ne dépendant que de a telle que $\|z_1 - z\| \geq k\|z_1 - (\vartheta, 0)\|$. En effet, cela est évident si y_1 est supérieur ou égal à 1 (car l'ordonnée de z est inférieure à $\frac{1}{2}$) et si $y_1 < 1$, on a :

$$\|z_1 - z\| \geq \|z_1 - (\vartheta, 0)\| \sin \alpha$$

où α désigne l'angle entre $[z_1 - (\vartheta, 0)]$ et $[z - (\vartheta, 0)]$. Comme z est dans $\Gamma_a(\vartheta)$ et z_1 hors de $\Gamma_{2a}(\vartheta)$ et d'ordonnée inférieure à 1, α est minoré par $\text{Arctg } 2a - \text{Arctg } a$.

En reprenant les notations antérieures, cela s'écrit $r_1 \geq k \|z_1 - (\vartheta, 0)\|$ et comme $r_2 \geq r_1$, on a la majoration :

$$\frac{h_{z_1}(z)}{y} \leq \frac{2(\nu-1)y_1}{r_1^{\nu+1}} \leq \frac{2(\nu-1)}{k^{\nu+1}} \frac{y_1}{\|z_1 - (\vartheta, 0)\|^{\nu+1}} = \frac{2(\nu-1)}{C_\nu k^{\nu+1}} p_\vartheta(z_1)$$

$$\frac{h_{X_\sigma}}{y} \text{ tend donc vers } \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(X_\sigma) \text{ en étant majoré par } \frac{2(\nu-1)}{C_\nu k^{\nu+1}} p_\vartheta(X_\sigma)$$

qui est P^{z_0} -intégrable, ce qui justifie le passage à la limite.

Remarque : On a vu dans la démonstration de la proposition 5 que pour presque tout ϑ de E , quel que soit $b > 0$, l'intersection de $\Gamma_b(\vartheta)$ avec un voisinage convenable de $(\vartheta, 0)$ est entièrement incluse dans Ω_E . Cette observation et une très légère modification de la démonstration de la proposition 4 permettent de montrer que pour presque tout ϑ de E , pour tout b , $\frac{g_{z_0}(x, y)}{y}$ tend vers une limite strictement positive quand (x, y) tend vers $(\vartheta, 0)$ dans $\Gamma_b(\vartheta)$.

BIBLIOGRAPHIE

- J.M. BRELOT et L. DOOB [1] : "Limites angulaires et limites fines". Annales de l'Institut Fourier 13 (1963) pp. 395-415.
- J. BROSSARD [1] : "Utilisation du mouvement brownien à l'étude du comportement à la frontière des fonctions harmoniques dans un demi-espace". Thèse dactylographiée. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- D.L. BURKHOLDER et R.F. GUNDY [1] : "Boundary behaviour of harmonic functions in a half-space and brownian motion". Annales de l'Institut Fourier 23 (1973) pp. 195-212.
- A.P. CALDERON [1] : "On the behaviour of harmonic functions near the boundary". Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950) pp. 47-54.

- A.P. CALDERON [2] : "On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund".
Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950)
pp. 55-61.
- L. DOOB [1] : "Conditionnal brownian motion and the boundary limits of
harmonic functions". Bulletin de la Société Mathématique de
France 85 (1957), pp. 431-468.
- E.B. DYNKIN [1] : "Markov Processes" (volumes I et II). Academic Press
Inc., New-York, 1965.
- E.M. STEIN [1] : "On the theory of harmonic functions of several varia-
bles II". Acta Mathematica 106 (1961) pp. 137-174.

-:-:-