SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

Projection prévisible et décomposition multiplicative d'une semi-martingale positive

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 22-34

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__22_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROJECTION PREVISIBLE ET DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE
D'UNE SEMI-MARTINGALE POSITIVE

Jean JACOD

Soit X un processus défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \underline{F}, (\underline{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ vérifiant les conditions habituelles. Nous nous intéressons à la propriété suivante:

(*) $\left\{ \begin{array}{l} X = LD, \text{ où } L \text{ est une martingale locale et } D \text{ un processus continu} \\ \text{à droite, prévisible, à variation finie sur tout compact, avec } D_0 = 1. \end{array} \right.$

Il s'agit d'un sujet sur lequel existent déjà de nombreuses publications (voir la liste de références, qui n'est pas exhaustive), aussi n'est-il pas question ici de faire preuve de beaucoup d'originalité: nous utilisons des méthodes éprouvées et nous restons dans le cadre usuel où X est un processus positif (ce qui signifie ici: non-négatif) et où on cherche des processus L et D eux-mêmes positifs.

Plus précisément on part d'une semi-martingale spéciale positive X (il est aisé de vérifier que tout processus vérifiant (*) est une semi-martingale spéciale; la définition est rappelée plus loin), et on note P_X sa projection prévisible. On montre alors qu'il existe une décomposition et une seule du type (*), sur "le plus grand intervalle stochastique sur lequel le processus $1/P_X$ est localement borné". On rassemble ainsi les cas extrêmes pour lesquels la décomposition (*) est connue: 1) le cas où X est une surmartingale positive, 2) celui où X et X_- ne s'annulent jamais, auquel cas $1/P_X$ est localement borné.

Cet article est décomposé en deux parties: d'abord on étudie la projection prévisible d'une semi-martingale spéciale; cette partie contient l'essentiel des résultats nouveaux. Puis on étudie la décomposition (*) proprement dite.

Auparavant on introduit quelques notations et on fait quelques commentaires (bien classiques !). On note $\underline{M}$ l'ensemble des martingales continues à droite, uniformément intégrables, et $\underline{M}_{loc}$ l'ensemble des martingales locales (classe obtenue par "localisation" de la classe $\underline{M}$ par les temps d'arrêt). On note $\underline{V}$ l'ensemble des processus continus à droite, nuls à l'origine, à variation finie sur tout compact, adaptés. Comme d'habitude on convient d'identifier deux éléments de $\underline{M}_{loc}$ ou de $\underline{V}$ qui sont P-indistinguables. $\underline{P}$ désigne la tribu prévisible.

Une semi-martingale est un processus X s'écrivant

$$(1) \quad X = X_0 + M + A : M \in \underline{M}_{loc}, M_0 = 0, A \in \underline{V}.$$

Il peut exister plusieurs décompositions (1), mais il en existe au plus une pour laquelle A est prévisible; si tel est le cas on dit que X est une semi-martingale spéciale, et l'unique décomposition (1) pour laquelle $A \in \underline{P}$ est appelée décomposition canonique. On note $\underline{S}_p$ l'ensemble des semi-martingales spéciales.

Notre référence pour les martingales, semi-martingales, intégrales stochastiques, est le cours de Meyer [4]. Si X est une semi-martingale et H un processus prévisible localement borné, on note $H \bullet X$ le "processus intégrale stochastique" de H par rapport à X .

Remarques: 1) Supposons qu'on ait (*). D'après la formule d'intégration par parties de Yoeurp (voir [4, p.315]) on a

$$(2) \quad X = X_0 + D \bullet L + L_- \bullet D.$$

Comme $D \bullet L \in \underline{M}_{loc}$ et $L_- \bullet D \in \underline{P} \cap \underline{V}$ on en déduit que $X \in \underline{S}_p$.

2) Supposons que $X \in \underline{S}_p$ vérifie (*) et que le processus $1/PX$ soit localement borné. La formule $Y = (1/PX) \bullet X$ définit alors un élément de $\underline{S}_p$ nul en 0, dont on note $Y = N + B$ la décomposition canonique. Comme $D \in \underline{P}$ et $P L = L_-$ puisque $L \in \underline{M}_{loc}$, on a $P X = L_- D$ tandis que (2) entraîne

$$Y = \frac{1}{L_- D} \bullet (D \bullet L + L_- \bullet D) = \frac{1}{L_-} \bullet L + \frac{1}{D} \bullet D.$$

L'unicité de la décomposition canonique de Y entraîne $N = (1/L_-) \bullet L$ et comme $L_0 = X_0$ on a $L = X_0 + L_- \bullet N$. Cette équation, étudiée par C. Doléans-Dade [1], admet pour seule solution $L = X_0 \mathcal{E}(N)$, où $\mathcal{E}(N)$ désigne "l'exponentielle" de N .

Cette formule $L = X_0 \xi(N)$ est très importante:

- a) comme N est obtenu directement à partir de $(1/P_X) \bullet X$, elle montre en quoi P_X joue un rôle essentiel dans l'obtention de (*);
- b) elle permet de montrer l'unicité dans (*);
- c) elle donne le schéma de la démonstration de l'existence dans (*): on pose $L = X_0 \xi(N)$, puis $D = X/L$, et il reste à montrer que D satisfait les propriétés requises...

3) Si L est un élément positif de $\underline{M}_{loc}$ et si $R = \inf(t: L_t = 0)$ on sait que $L = 0$ sur l'intervalle stochastique $[[R, \infty[$. Une telle propriété n'étant évidemment pas vraie pour n'importe quel élément positif de $\underline{S}_p$, on ne saurait s'attendre en général à ce que la décomposition (*) soit valide partout, mais simplement sur les intervalles où X ne s'annule pas.

Conventions: 1) Nous omettrons systématiquement les termes "P-p.s." et "à un ensemble P-évanescent près".

$$2) \frac{0}{0} = 1; \quad \frac{a}{0} = +\infty \text{ si } a \in]0, \infty[.$$

1 - ETUDE DE LA PROJECTION PREVISIBLE

§a - Enoncé des résultats. On part d'un élément positif X de $\underline{S}_p$, de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$. Comme $X \geq 0$ il est clair que $P_X \geq 0$. Comme $P_M = M_-$ et $A \in \underline{P}$ on a aussi

$$P_X = X_0 + M_- + A = X_- + \Delta A$$

(on note ΔZ le processus des sauts du processus cadlag Z).

Posons:

$$\begin{aligned} R_n &= \inf(t: X_t \leq 1/n), & R &= \lim_{(n)} \uparrow R_n \\ R'_n &= \inf(t: (P_X)_t \leq 1/n), & R' &= \lim_{(n)} \uparrow R'_n. \end{aligned}$$

THEOREME 1 : (a) On a $R=R'$ (rappelons qu'on omet: P-p.s.).

(b) Il existe une suite (S_n) de temps d'arrêt croissant vers R , telle que $X \geq 1/n$ sur $\llbracket 0, S_n \llbracket$, que $X_- \geq 1/n$ sur $\llbracket 0, S_n \llbracket$ et que ${}^P X \geq 1/n$ sur $\llbracket 0, S_n \llbracket \cap \llbracket 0, \infty \llbracket$.

(comme d'habitude, si T est un temps d'arrêt et $B \in \mathbb{F}_T$, on note T_B le temps d'arrêt égal à T sur B , à $+\infty$ sur B^c).

L'ensemble prévisible $C(X) = \bigcup_{(n)} \llbracket 0, S_n \llbracket$ est doué de propriétés agréables en ce qui concerne le processus $1/{}^P X$, propriétés que nous allons énoncer dans le cas simple où $X_0 > 0$ identiquement (sinon, comme $({}^P X)_0 = X_0$, ce processus $1/{}^P X$ commence mal en l'instant 0 pour être localement borné).

THEOREME 2 : Supposons que $X_0 > 0$ identiquement. Si T est un temps d'arrêt, le processus arrêté $(1/{}^P X)^T$ est localement borné si et seulement si $\llbracket 0, T \llbracket \subset C(X)$ ($C(X)$ est évidemment le plus petit ensemble prévisible jouissant de cette propriété).

Le processus X étant cadlag, on a nécessairement $\min(X_R, X_{R-}) = 0$ si $R < \infty$, si bien que l'ensemble $\{R = \infty\}$ est exactement l'ensemble sur lequel ni X , ni X_- , ne s'annulent jamais. Par suite on a le

COROLLAIRE 1 : Pour que le processus $1/{}^P X$ soit localement borné, il faut et il suffit que X et X_- ne s'annulent jamais.

Remarques: 1) Le théorème 2 suggère que, plus que la suite (S_n) , c'est l'ensemble aléatoire $C(X)$ qui joue un rôle important. Nous retrouverons ce fait lors de l'étude de la décomposition multiplicative.

2) Si $X \in \mathbb{M}_{loc}$ on a ${}^P X = X_-$, $R'_n = R_n$ et $R = \inf(t: X_t = 0)$; ces deux théorèmes sont alors bien connus, et $C(X) = \{X_- > 0\}$.

Les comportements des processus prévisibles ${}^P X$ et X_- sont analogues sur l'ensemble $C(X)$. Ils peuvent différer en son extrémité R , comme le montre le corollaire suivant. On pose d'abord $B = \{R \in C(X)\} = \bigcup_{(n)} \{S_n = R < \infty\}$ et $B' = \{R < \infty, R \notin C(X)\} = \bigcap_{(n)} \{S_n < R < \infty\}$, donc $B \cap B' = \emptyset$ et $B \cup B' = \{R < \infty\}$.

COROLLAIRE 2 : (a) Sur B on a $X_{R-} > 0$, $({}^P X)_R > 0$ et $X_R = 0$. On a $C(X) \cap \{X = 0\} = \llbracket R_B \rrbracket$.

(b) R_B , est un temps d'arrêt prévisible. Sur $B' \cap \{X_{R-} > 0\}$ on a $X_R = ({}^P X)_R = 0$.

Démonstration: (a) Les inégalités $X_{R-} > 0$ et $({}^P X)_R > 0$ sur B découlent immédiatement du théorème 1, et comme $\min(X_R, X_{R-}) = 0$ si $R < \infty$ on a $X_R = 0$ sur B. Enfin $X > 0$ sur $\llbracket 0, R \rrbracket$, d'où la dernière assertion.

(b) Il est aisé de vérifier que R_B est annoncé par la suite de temps d'arrêt $(S_n)_{\{S_n < R\}}$, donc est prévisible. Sur $B'' = B' \cap \{X_{R-} > 0\}$ on a $X_R = 0$, tandis que $B'' \in \mathbb{F}_{(R_B, -)}$, donc $T = R_{B''}$ est également prévisible. Il vient alors

$$E(1_{B''} ({}^P X)_R) = E(1_{\{T < \infty\}} ({}^P X)_T) = E(1_{\{T < \infty\}} X_T) = E(1_{B''} X_R) = 0. \blacksquare$$

Commentaires: 1) Si X est une surmartingale positive (donc un élément de $\underline{S}_p$) le processus A est décroissant, donc ${}^P X \leq X_-$. On en déduit que $B = \{R < \infty, ({}^P X)_R > 0\}$ et $B' = \{R < \infty, ({}^P X)_R = 0\}$, tandis qu'on sait par ailleurs que $X = 0$ sur $\llbracket R, \infty \rrbracket$ et ${}^P X = X_- = 0$ sur $\llbracket R, \infty \rrbracket$.

2) Sur B' on peut effectivement avoir $({}^P X)_R = 0 < X_{R-}$, ou $X_{R-} = 0 < ({}^P X)_R$, comme le montrent les deux exemples suivants.

Soit d'abord $X_t = 2$ si $t < 2$ et $X_t = 0$ si $t \geq 2$: on a ${}^P X = X$, $R = 2$, $B' = \Omega$, et $({}^P X)_R = 0 < X_{R-} = 2$; par ailleurs on a $C(X) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et l'inclusion $C(X) \subset \bigcup_{(n)} \llbracket 0, R'_n \rrbracket$, qui est toujours vraie, est stricte dans ce cas.

Soit maintenant $X_t = 2 - t$ si $t < 2$ et $X_t = 2$ si $t \geq 2$: on a encore ${}^P X = X$, $R = 2$, $B' = \Omega$, et $X_{R-} = 0 < ({}^P X)_R = 2$; par ailleurs $C(X) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et l'inclusion $C(X) \subset \bigcup_{(n)} \llbracket 0, R'_n \rrbracket$, qui est toujours vraie, est stricte dans ce cas.

§b - Démonstration des théorèmes 1 et 2. Nous allons commencer par trois lemmes.

LEMME 1 : Il existe une suite (S_n) de temps d'arrêt croissant vers R' , telle que ${}^P X \geq 1/n$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket \cap \llbracket 0, \{X_0 \geq 1/n\}, \infty \rrbracket$ et que $C(X) = \bigcup_{(n)} \llbracket 0, S_n \rrbracket$

soit égal à $(\bigcup_{(n)}]0, R'_n]) \cap]0, R'] \cap \{ (P_X)_{R'} = 0 \}^c$.

Démonstration: L'ensemble prévisible $]0, R'_n] \cap \{ P_X < 1/n \}$ contient évidemment le graphe de son début V_n , qui est donc un temps d'arrêt prévisible, et qui vérifie clairement $V_n > 0$, $V_n \geq R'_n$ et $V_n = R'_n$ si $V_n < \infty$. Il existe donc un temps d'arrêt T_n tel que $T_n < V_n$ et que

$P(T_n < \min(n, V_n - 1/n)) \leq 1/2^n$, si bien que $\sup_{(n)} T_n = \sup_{(n)} V_n \geq R'$ (on rappelle encore une fois qu'on omet: P-p.s.). La formule

$S_n = \sup_{p \leq n} \min(T_p, R'_p)$ définit alors une suite de temps d'arrêt croissant vers R' .

Etant données les définitions de V_n et T_n , on voit que $P_X \geq 1/n$ sur $]0, R'_n] \cap]0, T_n]$ pour tout n , et on en déduit que $P_X \geq 1/n$ sur $]0, S_n]$, donc sur $]0, S_n] \cap \{ X_0 \geq 1/n \}^c$ puisque $(P_X)_0 = X_0$.

Comme $S_n \leq R'_n$ on a $C(X) \subset \bigcup_{(n)}]0, R'_n]$. Supposons que pour n assez grand on ait $R'_n = R'$ (pour un ω donné); si $(P_X)_{R'} = 0$ il est clair qu'on doit avoir $S_m < R'$ pour tout m d'après les propriétés de S_m ; par contre si $(P_X)_{R'} > 0$, on a $V_m = \infty$ pour m assez grand, donc également $T_q > R'$ et $S_q = R'_q = R'$ pour q assez grand: on en déduit que $C(X)$ a la forme donnée dans l'énoncé. ■

LEMME 2: On a $R \leq R'$.

Démonstration: Fixons n . Comme $X_- \geq 1/n$ sur $]0, R_n]$ et comme $P_X = X_- + \Delta A$, on doit avoir $\Delta A \leq -1/n$ sur l'ensemble prévisible $D =]0, R_n] \cap \{ P_X = 0 \}$, qui est donc à coupes discrètes. Par suite D contient le graphe de son début T , qui est ainsi un temps d'arrêt prévisible. Mais $X \geq 1/n$ sur $]0, R_n]$, donc

$$\frac{1}{n} P(T < R_n) \leq E(1_{\{T < \infty\}} X_T) = E(1_{\{T < \infty\}} (P_X)_T) = 0$$

et $P(T < R_n) = 0$. Autrement dit $P_X > 0$ sur $]0, R_n]$. Désignons par T_m le $m^{\text{ième}}$ instant où $\Delta A \leq -1/2n$: on a d'une part $P_X = X_- + \Delta A \geq 1/2n$ en dehors de $\bigcup_{(m)}]T_m, T_{m+1}]$, et d'autre part $\lim_{(m)} \uparrow T_m = \infty$ tandis que $P_X > 0$ sur $]0, R_n]$: on déduit immédiatement de ces assertions que $R' \geq R_n$ dès que $(P_X)_0 = X_0 > 0$; comme $R' = R = 0$ si $X_0 = 0$ on a alors $R' \geq R_n$ pour tout n , donc $R' \geq R$. ■

LEMME 3: On a $X_{-} \geq 1/n$ sur $]0, S_n]$.

Démonstration: Fixons $b \in]0, 1/n[$ et $c < \infty$. On considère l'ensemble prévisible $D =]0, \min(S_n, c)] \cap \{X_{-} \leq b\}$. Soit T un temps d'arrêt prévisible annoncé par une suite (T_m) , et de graphe contenu dans D . Posons enfin $D_m =]T_m, T[\cap]0, \min(S_n, c)]$, $B_m = \{T_m < \min(S_n, c)\}$ et $a_m = E[\min(1, \sup_{T_m \leq t < T} X_t) 1_{\{T < \infty\}}]$.

D'une part $\lim_{(m)} \downarrow \sup_{T_m \leq t < T} X_t = X_{T-} \leq b$ sur l'ensemble $\{T < \infty\}$, donc d'après le théorème de Lebesgue, $\lim_{(m)} \downarrow a_m \leq b P(T < \infty)$. D'autre part B_m est la projection sur Ω de l'ensemble prévisible D_m , tandis que les ensembles B_m décroissent vers l'ensemble $\{T < \infty\}$. D'après le théorème de section prévisible appliqué à D_m , il existe un temps d'arrêt prévisible V_m tel que $]V_m] \subset D_m$ et $P(B_m) - 1/m \leq P(V_m < \infty) \leq P(B_m)$. Comme $D_m \subset D$ on a $(^P X)_{V_m} \geq 1/n$ si $V_m < \infty$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} P(V_m < \infty) &\leq E[\min((^P X)_{V_m}, 1) 1_{\{V_m < \infty\}}] = E[P(\min(X, 1))_{V_m} 1_{\{V_m < \infty\}}] \\ &= E[\min(1, X_{V_m}) 1_{\{V_m < \infty\}}] \leq a_m + P(T = \infty, B_m). \end{aligned}$$

En passant à la limite en m dans l'expression précédente, et en utilisant les diverses remarques faites plus haut sur a_m , V_m et B_m , on voit que $\frac{1}{n} P(T < \infty) \leq b P(T < \infty)$, ce qui n'est possible que si $P(T < \infty) = 0$. D'après le théorème de section prévisible on en déduit que D est P-évanescant, donc $X_{-} > b$ sur $]0, \min(S_n, c)]$; ceci étant vrai pour tous $b \in]0, 1/n[$ et $c < \infty$, on a bien le résultat cherché. ■

Démonstration du théorème 1: Il suffit de recoller ces trois lemmes (en effet le lemme 3 entraîne $X \geq 1/n$ sur $]0, S_n]$, donc $R_{n+1} \geq S_n$). ■

Démonstration du théorème 2: Soit T un temps d'arrêt et $Y = (1/^P X)^T$. Supposons d'abord Y localement borné: d'après la définition même de R' on doit avoir $T \leq R'$, et $T < R'$ sur $\bigcap_{(n)} \{R'_n < R' < \infty\}$; de plus si $T = R' < \infty$ il faut que $(^P X)_{R'} > 0$: d'après la forme de $C(X)$ donnée au lemme 1, on doit donc avoir $]0, T] \subset C(X)$.

Inversement supposons que $]0, T] \subset C(X)$. Il est facile de vérifier que la suite $S'_n = (S_n)_{\{S_n < T\}}$ croît vers $+\infty$, et $Y^{S'_n} = Y^{S_n} \leq n$, donc Y est localement borné: cela achève de montrer que $C(X)$ jouit de la propriété annoncée. ■

2 - ETUDE DE LA DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

§ a - Enoncé des résultats. On part, comme dans la partie 1, d'un élément positif X de $\underline{\underline{S}}_p$, de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$. On utilisera les notations S_n , R , $C(X)$ introduite plus haut. Pour éviter des répétitions fastidieuses on notera $\underline{\underline{V}}$ l'ensemble des processus D tels que $D_0 = 1$ et que $D-1 \in \underline{\underline{V}}$.

Commençons par énoncer le théorème fondamental, dont nous déduirons ensuite un certain nombre de corollaires couvrant les situations classiques.

THEOREME 3: Il existe un couple (L, D) de processus tel que

$$(3) \quad X = LD \text{ sur } C(X), \quad L^{S_n} \in \underline{\underline{M}}_{loc} \text{ et } D^{S_n} \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}' \text{ pour tout } n.$$

Tout autre couple (L', D') vérifiant (3) satisfait à $L' = L$ et $D' = D$ sur l'ensemble $C(X)$. Enfin on a $D > 0$ sur $C(X)$, $L > 0$ sur $C(X) \cap \{X > 0\}$ et $L = 0$ sur $C(X) \cap \{X = 0\} = \underline{\underline{V}}_{R_B}$.

Remarque: On voit bien là encore l'importance de $C(X)$. On pourrait d'ailleurs supprimer toute référence à la suite (S_n) en remplaçant la condition:

$$L^{S_n} \in \underline{\underline{M}}_{loc} \text{ et } D^{S_n} \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}' \text{ pour tout } n$$

par la condition équivalente:

$$L^T \in \underline{\underline{M}}_{loc} \text{ et } D^T \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}' \text{ pour tout temps d'arrêt } T \text{ avec } \llbracket 0, T \rrbracket \subset C(X).$$

En utilisant le corollaire 1, on arrive au résultat obtenu par Yoeurp et Yor [7]:

COROLLAIRE 3: Supposons que X et X_- ne s'annulent jamais. Il existe un couple (L, D) et un seul tel que $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$ et $X = LD$.

Voici maintenant le cas le plus connu (Ito et Watanabe [2], Meyer [3]):

COROLLAIRE 4: Soit X une surmartingale positive ne s'annulant jamais. Il existe un couple et un seul (L, D) tel que $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$, $X = LD$ et que D soit décroissant.

Démonstration: On sait que X_- ne s'annule jamais non plus, donc on est dans le cadre du corollaire 3 et il suffit de montrer que D est décroissant. Mais on a (*), donc (2), ce qui implique $L_- \bullet D = A$ d'après l'unicité de la décomposition canonique. De plus $L > 0$ partout, donc $L_- > 0$ partout également; comme A est décroissant, il en est donc de même de $D = (1/L_-) \bullet A$. ■

En appliquant le même raisonnement (si X est une sousmartingale, le processus A est croissant) on obtient (Meyer et Yoeurp [5]):

COROLLAIRE 5: Soit X une sousmartingale positive, telle que X et X_- ne s'annulent jamais. Il existe un couple et un seul (L, D) tel que $L \in \underline{M}_{loc}$, $D \in \underline{P} \cap \underline{V}'$, $X = LD$ et que D soit croissant.

Dans le théorème 3, les valeurs de L et D en dehors de $C(X)$ importent peu.

On peut évidemment choisir L et D de sorte que la relation $X = LD$ soit valide partout; mais il n'y a alors guère de chances pour que ces processus aient de "bonnes" propriétés, par exemple $L \in \underline{M}_{loc}$ ou $D \in \underline{P} \cap \underline{V}'$.

Au contraire on peut essayer d'étendre L et D en dehors de $C(X)$ de façon à ce que ces processus gardent de bonnes propriétés, mais alors l'égalité $X = LD$ ne sera valide en général que sur $C(X)$. Par exemple posons

$$\begin{aligned} S'_n &= (S_n)_{\{S_n < R\}} \\ C'(X) &= \bigcup_{(n)} [0, S'_n] = C(X) \cup]R, \infty[. \end{aligned}$$

On a alors, ce qui semble être le maximum que l'on puisse faire sans hypothèses particulières sur X :

COROLLAIRE 6: Il existe un couple (L, D) de processus tel que

$$(4) \quad X = LD \text{ sur } C(X), \quad L^{S'_n} \in \underline{M}_{loc} \text{ et } D^{S'_n} \in \underline{P} \cap \underline{V}' \text{ pour tout } n.$$

Si (L', D') est un autre couple vérifiant (4) et $L' \geq 0$, on a $L = L'$ sur $C'(X)$ et $D = D'$ sur $C(X)$.

Démonstration: Soit (L'', D'') un couple vérifiant (3). On pose $L = L''$ et $D = D''$ sur $C(X)$; $L = D = 0$ sur $C'(X)^c$; $L = L'' = 0$ et $D = D''$ sur

$C'(X) \setminus C(X)$. On a $L^{\underline{S}'_n} = L^{\underline{S}_n}$ et $D^{\underline{S}'_n} = D^{\underline{S}_n}$, donc (L, D) vérifie (4). Enfin l'unicité découle immédiatement du théorème 3. ■

De même que dans la remarque suivant le théorème 3, on pourrait remplacer la seconde partie de la condition (4) par:

$$L^T \in \underline{M}_{loc} \text{ et } D^T \in \underline{P} \cap \underline{V}' \text{ pour tout temps d'arrêt } T \text{ avec } \llbracket 0, T \rrbracket \subset C'(X).$$

On a donc:

COROLLAIRE 7: Supposons que $C(X) = \llbracket 0, R \rrbracket$ (ce qui équivaut à: $\llbracket R \rrbracket \subset C(X)$, ou à: $C'(X) = \Omega \times \mathbb{R}_+$). Il existe un couple (L, D) tel que $L \in \underline{M}_{loc}$, $D \in \underline{P} \cap \underline{V}'$ et $X = LD$ sur $C(X)$.

Terminons enfin par un retour aux surmartingales positives, pouvant s'annuler. D'après le commentaire 1) suivant le corollaire 2, on a $C'(X) = \llbracket 0, T \rrbracket$ avec $T = \inf(t: t = R \text{ et } ({}^P X)_t = 0)$, tandis que $X = 0$ sur $\llbracket R, \infty \rrbracket$ pour toute surmartingale positive. En reprenant la démonstration des corollaires 6 et 4 (légèrement modifiée pour ce dernier), et en utilisant le fait qu'un processus décroissant positif D tel que $D_0 = 1$ appartient à $\underline{V}'$, on obtient le résultat suivant (donné par Yoeurp dans [6]):

COROLLAIRE 8: Soit X une surmartingale positive. Il existe un couple (L, D) tel que $L^{\underline{S}'_n} \in \underline{M}_{loc}$ pour chaque n , que $D \in \underline{P} \cap \underline{V}'$ soit décroissant, et que $X = LD$ partout. Tout autre couple (L', D') vérifiant les mêmes conditions et $L' \geq 0$, satisfait à $L = L'$ sur $C'(X)$ et $D = D'$ sur $C(X)$.

§ b - Démonstration du théorème 3. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

(i) Posons $X^n = X^{\underline{S}_n}$. Comme $1/P_X \leq n$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket$ et comme X^n est arrêté en S_n , l'intégrale stochastique $Y^n = (1/P_X) \bullet X^n$ existe et définit une semi-martingale spéciale dont on note $Y^n = N^n + B^n$ la décomposition canonique. On a aussi $N^n = (1/P_X) \bullet M^n$, si $M^n = M^{\underline{S}_n}$. De plus $P(\Delta Y^n) = \Delta B^n$, donc il vient

$$(5) \quad \Delta N^n = \Delta Y^n - \Delta B^n = \frac{1}{P_X} (\Delta X^n - P(\Delta X^n)) = \left(\frac{X}{P_X} - 1 \right) 1_{\llbracket 0, S_n \rrbracket}$$

car $P(X^n) = P_X 1_{[0, S_n]} + X^n 1_{]S_n, \infty[}$. Soit $T_n = (S_n) \{S_n < \infty, X_{S_n} = 0\}$: on déduit de (5) que $\Delta N^n > -1$ sur $]0, T_n[$ et que $\Delta N^n_{T_n} = -1$ si $0 < T_n < \infty$.

Comme $S_n = T_n = 0$ si $X_0 = 0$, il est bien connu que l'exponentielle $L^n = X_0 \xi(N^n)$ vérifie:

$$(6) \quad \begin{cases} L^n > 0 \text{ sur }]0, T_n[, & L^n = 0 \text{ sur } [T_n, \infty[, \\ L^n_{(T_n)-} > 0 \text{ sur } \{0 < T_n < \infty\} . \end{cases}$$

(ii) Soit $\tilde{D}^n = X^n/L^n$: avec la convention $\frac{0}{0} = 1$ ce processus est bien défini car on a $X^n = 0$ sur $[T_n, \infty[$. Nous allons montrer que $\tilde{D}^n \in \underline{V}'$.

D'abord on a $\tilde{D}_0^n = 1$. Ensuite on a $\tilde{D}^n = F(X^n, L^n)$ si $F(x, y) = x/y$ pour $y \neq 0$ et $F(x, 0) = 1$. On peut appliquer la formule d'Ito à F de la manière suivante: soit $R_p = \inf\{t: L_t^n \leq 1/p\}$; on peut trouver une fonction F_p de classe C^2 , coïncidant avec F sur $\{|y| \geq 1/p\}$; on applique la formule d'Ito à F_p , on remarque que $F(X^n, L^n) = F_p(X^n, L^n)$ sur $]0, R_p[$, et en calculant ce qui se passe à l'instant R_p on voit immédiatement qu'on peut appliquer la formule d'Ito usuelle à

$(\tilde{D}^n)^{R_p} = F((X^n)^{R_p}, (L^n)^{R_p})$; enfin d'après (6) on a $]0, T_n] = \bigcup_{(p)}]0, R_p]$, tandis que les processus D^n , X^n et L^n sont arrêtés en T_n : on voit donc qu'on peut appliquer la formule d'Ito à $\tilde{D}^n = F(X^n, L^n)$ comme si F était de classe C^2 .

Convenons d'écrire $\tilde{D}^n \sim C$ si C est un processus tel que $\tilde{D}^n - C \in \underline{V}'$. En ne conservant que les termes "martingales" dans la formule d'Ito on arrive alors à

$$\tilde{D}^n \sim \frac{1}{L^n} \bullet M^n - \frac{X_-}{(L^n)^2} \bullet L^n$$

(les termes ci-dessus sont bien définis, car $(1/L^n)^{T_n}$ est localement borné, tandis que M^n et L^n sont arrêtés en T_n). Mais $P_X = X_- + \Delta A$, $L^n = X_0 + L^n \bullet N^n$ et $N^n = (1/P_X) \bullet M^n$, de sorte que

$$\tilde{D}^n \sim \left[\frac{1}{L^n} \left(1 - \frac{X_-}{P_X}\right) 1_{]0, S_n]} \right] \bullet M^n = \frac{1}{L^n (P_X)} \bullet (\Delta A \bullet M^n) .$$

Or d'après la formule d'intégration par parties de Yoeurp, on a $\Delta A \bullet M^n = [A, M^n] \in \underline{V}$. L'expression précédente appartient donc aussi à $\underline{V}$ et on en déduit que $\tilde{D}^n \in \underline{V}'$.

(iii) Par ailleurs $\Delta \tilde{D}^n = (X^n_{L^n} - X^n_{L^n})/L^n_{L^n}$ sur $]0, T_n[$. Un calcul simple, utilisant (5), montre que si $Z^n = (P_X - X)(1/L^n) 1_{]0, S_n]}$ on a

$\tilde{A}D^n = Z^n$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket \cap \llbracket 0, T_n \rrbracket$.

Posons alors $D^n = (\tilde{D}_-^n + Z^n)^{S_n}$, avec la convention $\tilde{D}_{0-}^n = 1$. On a $D_0^n = 1$, $D^n = \tilde{D}^n$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket \cap \llbracket 0, T_n \rrbracket$, et il est clair que D^n est prévisible: on en déduit d'une part que $D^n \in \underline{P} \cap \underline{V}'$ (puisque $\tilde{D}^n \in \underline{V}'$), d'autre part que $X^n = L^n D^n$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket \cap \llbracket 0, T_n \rrbracket$. Mais $T_n \geq S_n$ et si $T_n = S_n < \infty$ on a $X_{S_n}^n = L_{S_n}^n = 0$ d'après (6). Par suite la relation $X^n = L^n D^n$ est valide sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket$, donc partout puisque tous ces processus sont arrêtés en S_n .

(iv) Nous pouvons maintenant passer à la construction du couple (L, D) . On remarque que $N^n = (N^{n+1})^{S_n}$, donc $L^n = (L^{n+1})^{S_n}$; de même $D^n = (D^{n+1})^{S_n}$ et $Z^n = Z^{n+1}$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket$, donc $D^n = D^{n+1}$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket$. On peut donc définir les processus L et D en posant $L = L^n$ et $D = D^n$ sur $\llbracket 0, S_n \rrbracket$ et (par exemple) $L = D = 0$ sur le complémentaire de $C(X)$. Le couple (L, D) vérifie clairement (3).

On a $L^n > 0$ et $D^n > 0$ par construction sur $\llbracket 0, T_n \rrbracket$, donc $L > 0$ et $D > 0$ sur $C(X) \cap \{X > 0\}$. Enfin si $R = S_n < \infty$ on a $X_R = 0$ d'après le corollaire 2, donc $T_n = R$, $L_R = L_{T_n}^n = 0$ et $(^P X)_R > 0$, donc $D_R = D_{T_n}^n = (^P X)_R / L_{R-}^n > 0$: on en déduit que $L = 0$ et $D > 0$ sur l'ensemble $\llbracket R_B \rrbracket$.

(v) Il nous reste enfin à montrer l'unicité. Soit (L', D') un couple de processus vérifiant (3). En reprenant le raisonnement fait dans l'introduction on obtient $P(X^n) = L'_- \bullet^{S_n} D'^{S_n}$ et

$$\begin{aligned} X^n &= X_0 + D'_- \bullet L'^{S_n} + L'_- \bullet D'^{S_n} \\ Y^n &= (1/L'_-) \bullet L'^{S_n} + (1/D'_-) \bullet D'^{S_n} \end{aligned}$$

en utilisant la définition de Y^n , ce qui montre en outre que les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies. D'après l'unicité de la décomposition canonique on doit avoir $N^n = (1/L'_-) \bullet L'^{S_n}$, donc $L'_- \bullet N^n = 1 \bullet L'^{S_n} = L'^{S_n} - X_0$ (puisque $L'_0 = X_0$), donc $L'^{S_n} = X_0 \mathcal{E}(N^n) = L^n$. On en déduit que $L = L'$ sur $C(X)$.

Comme $LD = L'D' = X$ on doit aussi avoir $D = D'$ sur $C(X) \cap \{X > 0\}$. Par conséquent $C(X) \cap \{D \neq D'\}$ est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible S , qui de plus vérifie $\llbracket S \rrbracket \subset \llbracket R_B \rrbracket$; donc $X_S = 0$ sur $\{S < \infty\}$ et $E((^P X)_{S-} \mathbf{1}_{\{S < \infty\}}) = E(X_{S-} \mathbf{1}_{\{S < \infty\}}) = 0$, donc $(^P X)_S = 0$ sur $\{S < \infty\}$, ce qui contredit le fait que $(^P X)_R > 0$ sur B (cf. corollaire 2), sauf si $P(S < \infty) = 0$. On achève ainsi de prouver que $D = D'$ sur $C(X)$. ■

REFERENCES

- 1 DOLEANS-DADE C.: Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales. Z.W. 16, 1970
- 2 ITO K., WATANABE S.: Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. Ann. Inst. Fourier, 15, 1965
- 3 MEYER P.A.: Multiplicative decompositions of positive supermartingales. Dans: Markoff processes and potential theory, J. Chover Ed., Wiley, 1967
- 4 MEYER P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sémin. Proba. X, Strasbourg. Lect. Notes Math. 1976
- 5 YOEURP C., MEYER P.A.: Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives. Sémin. Proba. X, Strasbourg. Lect. Notes Math. 1976
- 6 YOEURP C.: Décompositions des martingales locales et formules exponentielles. Sémin. Proba. X, Strasbourg. Lect. Notes Math. 1976
- 7 YOEURP C., YOR M.: Espace orthogonal à une semi-martingale, applications. A paraître, 1977