SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-MICHEL BISMUT

Contrôle des systèmes linéaires quadratiques : applications de l'intégrale stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 180-264

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__180_0>

CONTROLE DES SYSTEMES LINEAIRES QUADRATIQUES : APPLICATIONS DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

PAR

JEAN-MICHEL BISMUT

UNIVERSITE PARIS-SUD (ORSAY), F.91405.

L'objet de cet article est d'étendre les résultats que nous avions obtenus dans [2] sur le contrôle linéaire quadratique. Plus précisément nous considérons un système du type :

$$dx = (Ax + Cu + f)dt + (Bx + Du + g)dw$$
$$x(0) = x_o$$

où w est une martingale de carré intégrable. On veut minimiser en u un critère quadratique en x et u.

On généralise ainsi les résultats de [2] , où on suppose que w est un mouvement brownien.

Dans la résolution du problème, on utilise deux outils essentiels :

. les techniques d'optimisation dans des espaces de Hilbert. Ces techniques ont été utilisées par Lions [6] pour l'étude du contrôle de systémes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Nous les appliquons ici dans des conditions qui sont formellement identiques, bien que les systèmes contrôlés soient définis par des équations différentielles stochastiques et non par des équations aux dérivées partielles. Il nous paraît cependant indispensable que le lecteur ait lu attentivement les trois premiers chapitres de [6] , ne serait-ce que pour s'accoutumer à la manipulation systématique d'équations adjointes, qu'on obtient plus naturellement dans le cas des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles que pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques.

. les intégrales stochastiques prévisibles ou optionnelles, exposées très complètement par Meyer dans [7]. La résolution du problème de contrôle exige en effet l'utilisation systématique des opérateurs de projection dans des espaces de martingales de carré intégrable.

Il est indispensable que le lecteur ait une connaissance suffisante des deux premiers chapitres de l'exposé de Meyer [7]. Des techniques BMO sont également utilisées, mais on pourra sauter en première lecture les chapitres qui s'y rapportent.

Cet article ayant fait l'objet d'une partie d'un cours de troixième cycle destiné à des probabilistes, nous ne redémontrons aucun résultat classique de probabilités, mais nous n'avons pas hésité à développer les raisonnements d'analyse fonctionnelle, même lorsqu'ils sont élémentaires, ou lorsqu'un renvoi à [6] serait suffisant.

C'est ainsi que dans le chapitre 0, on rappelle les résultats les plus simples sur l'optimisation dans les espaces de Hilbert, en reprenant les techniques de [6].

Dans le chapitre I, on établit divers résultats sur les équations différentielles stochastiques, et sur les équations adjointes, qui sont des équations différentielles stochastiques backward. On reprend et étend les résultats de [2] .

Dans le chapitre II, on résoud le problème de contrôle lorsque les divers coefficients de l'équation différentielles stochastique et du critère et lorsque le contrôle sont prévisibles. On définit alors un opérateur P qui est solution formelle d'une équation différentielle stochastique backward formelle. La fin du chapitre II est consacrée à la résolution de cette équation dans des cas particuliers.

Dans le chapitre III, on reprend rapidement les résultats des chapitres I et II, qu'on adapte au cas où les coefficients et le contrôle peuvent être optionnels. On résoud encore une équation de Riccati formelle dans des cas particuliers.

Nous renvoyons à l'article de Haussman [5] pour une première approche du problème résolu ici. Enfin, sur un problème lié au retournement du temps dans le contrôle des systèmes linéaires, nous renvoyons à [9] .

CHAPITRE 0

ANALYSE FONCTIONNELLE ET FONCTIONS CONVEXES

Dans ce chapitre, nous allons rappeler certains éléments essentiels d'analyse fonctionnelle sur les espaces de Hilbert, que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Soit U un espace de Hilbert.
On rappelle que toute partie bornée non vide de U est faiblement relativement compacte.

J est une fonctionnelle convexe continue sur U . J est alors faiblement s.c.i., car les ensembles $(J \leqslant a)$ sont convexes et fortement fermés, donc faiblement fermés.

K désigne un convexe fermé non vide de U .

On a alors :

<u>PROPOSITION</u> 0.1. Dans les deux cas suivants.

a) Si $\|u\| \to +\infty$, $J(u) \to +\infty$

b) K est borné.

J atteint son minimum sur K .

<u>Preuve</u> : Si K est borné, il est faiblement compact.
J étant faiblement s.c.i atteint son minimum sur K . Dans le cas a), pour trouver le minimum de J , on peut se restreindre au convexe fermé borné $(J \leqslant a)$ pour a assez grand. On est donc ramené au cas b). $\square$

On a aussi le résultat d'unicité suivant.

<u>PROPOSITION</u> 0.2. Si J est strictement convexe, i.e. si $(u,v) \in U \times U$ avec $u \neq v$,

pour $0 < t < 1$

$$(0.1) \qquad J(tu + (1-t)v)) < t\,J(u) + (1-t)J(v)$$

alors si J atteint son minimum sur K, elle l'atteint en un point seulement.

Preuve : Soient u et v dans K, avec $u \neq v$, où J atteindrait son minimum.

Alors $\frac{u+v}{2} \in K$, et de plus :

$$(0.2) \qquad J\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}(J(u) + J(v)) = J(u)$$

ce qui est impossible. $\square$

On va enfin caractériser simplement les minimums de J au moyen des dérivées généralisées de J.

DEFINITION 0.1. On dit que J est différentiable au sens de Gâteaux si pour tout $u \in U$, il existe $J'(u) \in U$ tel que pour tout $v \in U$, on ait :

$$(0.3) \qquad \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \langle J'(u), v \rangle$$

On a alors le résultat essentiel suivant :

THEOREME 0.1. Si J est différentiable au sens de Gâteaux, pour que u minimise J sur K, il faut et il suffit que pour tout $v \in K$:

$$(0.4) \qquad \langle J'(u), v-u \rangle \geqslant 0$$

Preuve : La démonstration est tirée de [6] - Chapitre 1.

Si u minimise J sur K, pour tout $v \in K$, on a, pour $0 < t \leqslant 1$:

$$(0.5) \qquad J((1-t)u + tv) \geqslant J(u)$$

ou encore

$$(0.6) \qquad \frac{J((1-t)u + tv) - J(u)}{t} \geqslant 0$$

ce qui s'écrit :

$$(0.7) \qquad \frac{J(u + t(v-u)) - J(u)}{t} \geqslant 0$$

En passant à la limite quand $t \downarrow 0$, on a bien (0.4).

Inversement supposons (0.4) vérifiée. Comme J est convexe, on a pour $0 < t \leqslant 1$

$$J(v) - J(u) \geqslant \frac{1}{t}\,(J((1-t)u + tv) - J(u)) \tag{0.8}$$

et en passant à la limite quand $t \downarrow 0$, il vient :

$$J(v) - J(u) \geqslant \langle J'(u), v - u \rangle \tag{0.9}$$

Si (0.4) est vérifiée, pour $v \in K$, on a bien : $J(v) \geqslant J(u)$. □

CHAPITRE I

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LINEAIRES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES

Nous allons établir des résultats de caractère fonctionnel sur les intégrales stochastiques et les équations différentielles stochastiques linéaires, ainsi que divers résultats relatifs à des équations différentielles stochastiques backward. Ces derniers résultats seront essentiels pour l'introduction d'un état dual dans un problème de contrôle stochastique. Ils ont été exposés pour la première fois dans [1] et [2]. Le cas exposé ici est plus général qu'en [2].

Nous renvoyons à [3] pour un exposé de la Théorie Générale des processus et à [7] pour l'intégrale stochastique.

1- Le cadre probabiliste.

(Ω,F,P) désigne un espace de probabilité complet, muni d'une suite croissante et continue à droite de sous-tribus $\{F_t\}_{t\geq 0}$ complètes de F.

w est une martingale m-dimensionnelle de carré intégrable telle qu'au sens de [7], on ait :

$$(1.1) \qquad d < w_i, w_j > = \delta_{ij} dt$$

Si w est à trajectoires continues, w est un mouvement brownien par [7],p286.

$\overline{O}$ et $\overline{P}$ désignent les tribus optionnelle et prévisible sur $\Omega \times [0,+\infty[$.

2- Intégrales stochastiques prévisibles par rapport à w.

T désigne une constante > 0.

L_{22} désigne l'ensemble des classes de processus prévisibles nuls pour $t>T$, tels que :

$$(1.2) \qquad E\int_0^T |H|^2 dt < +\infty$$

L_2^t est l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable et F_t mesurables.

On pose alors la définition suivante.

DEFINITION I.1. On appelle intégrale stochastique de $H \in L_{22}$ par rapport à w_i et on note $\int_0^t H dw_i$ l'intégrale stochastique $\int_0^t \tilde{H}\, dw_i$, où $\tilde{H}$ est un représentant prévisible de H. □

Remarquons que $\int_0^t \tilde{H}\, dw_i$ est bien définie dans [7], p. 270 , puisque

$$E\int_0^T |H|^2 dt < +\infty.$$

De plus cette définition est sans ambiguité. En effet si $\tilde{H}'$ est un autre représentant prévisible de H , on aura :

$$(1.3)\qquad E\left|\int_0^T (\tilde{H}-\tilde{H}')dw_i\right|^2 = E\int_0^T |\tilde{H}-\tilde{H}'|^2 dt = 0.$$

Si H est prévisible et localement borné, on peut aussi définir, par la méthode de [7],p 299, $\int_0^t H dw_i$, qui est alors une martingale locale.

On pose alors la définition suivante.

<u>DEFINITION</u> I.2. On note par W l'espace des martingales M arrêtées en T , de carré intégrable qui s'écrivent :

$$M_t = \int_0^t H_1 dw_1 + \dots + \int_0^t H_m dw_m$$

avec $(H_1,\dots H_m) \in (L_{22})^m$ □

Les $\{w_i\}$ étant mutuellement orthogonales, l'espace W est fermé et stable au sens de [7], p 262.

Soit $W^{\perp}$ son orthogonal - faible ou fort - au sens de [7], p 262 - dans l'espace $\underline{L}$ des martingales de carré intégrable nulles en 0 et arrêtées en T . On munit $\underline{L}$ de la topologie induite par L_2^T .

Par [7], p 262, Corollaire 6 bis, on sait que si $M \in \underline{L}$, il existe (M_1, M_2) unique dans $W \times W^{\perp}$ tel que :

$$(1.4)\qquad M = M_1 + M_2$$

A tous les espaces de processus précédents, on associera les espaces locaux correspondants, qu'on indexera par loc .Ainsi si $H \in L_{22_{loc}}$, on peut trouver une suite croissante temps d'arrêt $\{T_n\}$ tendant vers $+\infty$ telle que $1_{t<T_n} H \in L_{22}$.

3- <u>Equations différentielles stochastiques linéaires.</u>

L_{21} est l'espace des classes de processus prévisibles v tels que :

$$(1.5)\qquad E\left(\int_0^T |v_t|\,dt\right)^2 < +\infty .$$

On munit L_{21} de la norme correspondante à (1.5)

C_2^T est l'espace des processus adaptés cadlag arrêtés en T tels que

$$(1.6) \qquad E\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |x_t|^2\right) < +\infty$$

On munit C_2^T de la norme correspondante à (1.6).

V désigne un espace vectoriel de dimension n . Pour ne pas alourdir les notations, on continuera par désigner par $L_2^t, L_{21}, L_{22}, W, W^\perp, \underline{L}$ les espaces de fonctions à valeurs dans V dont les composantes appartiennent à l'espace scalaire défini plus haut.

$A, (B_i)_{i=1\ldots m}$ sont une famille de processus prévisibles bornés à valeurs dans $V \otimes V$.

Pour $x_o \in L_2^o$, $u \in L_{21}$, $v = (v_1, \ldots, v_m) \in (L_{22})^m$, et $M \in \underline{L}$, on considère l'équation :

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} &dx = (Ax + u)dt + (Bx^- + v)dw + dM \\ &x(0) = x_o \end{aligned}$$

i.e. x_t devra vérifier :

$$(1.8) \qquad x_t = x_o + \int_o^t (Ax + u)ds + \sum_{i=1}^m \int_o^t (B_i x^- + v_i)dw_i + M_t$$

où $\int_o^t (B_i x^- + v_i)dw_i$ désigne l'intégrale prévisible de $(B_i x^- + v)$ par rapport à w_i définie en 2 : cette intégrale est bien définie quand x est cadlag car x^- est localement borné, et $v \in (L_{22})^m$.

On a alors :

<u>THEOREME</u> I.1. L'équation (1.7) a une solution unique x à trajections cadlag. x est alors dans C_2^T .

De plus l'application $(x_o, u, v, M) \to x$ est linéaire continue de $L_2^o \times L_{21} \times (L_{22})^m \times \underline{L}$ dans C_2^T.

<u>Preuve</u> : On utilise un argument classique de point fixe.

Soit Φ l'application qui à $x \in C_2^T$ associe le processus $x' = \Phi(x)$

par :

$$(1.9) \qquad x'_t = x_o + \int_o^t (Ax+u)ds + \int_o^t (Bx^- + v)dw + M_t$$

Alors x' est à trajectoire cadlag. De plus :

$$(1.10) \qquad |x'_t|^2 \leqslant k(|x_o|^2 + |\int_o^t (Ax+u)ds|^2 + |\int_o^t Bx^- + v.dw|^2 + |M_t|^2)$$

Or on a :

$$(1.11) \qquad |\int_o^t (Ax+u)ds|^2 \leqslant 2((\int_o^t |Ax|\,ds)^2 + (\int_o^t |u|\,ds)^2)$$

$$\leqslant k'(\int_o^t |x|^2 ds + (\int_o^t |u|\,ds)^2)$$

Par l'inégalité de Doob sur les martingales de carré intégrable, on a aussi :

$$(1.12) \qquad E(\sup_{o \leqslant t \leqslant T} |\int_o^t (Bx^- + v).dw|^2) \leqslant 4E\int_o^T |Bx+v|^2 ds$$

$$\leqslant k''(E\int_o^T |x|^2 ds + E\int_o^T |v|^2 ds)$$

$$(1.13) \qquad E(\sup_{o \leqslant t \leqslant T} |M_t|^2) \leqslant 4E|M_T|^2$$

De (1.10),(1.11),(1.12),(1.13), on tire :

$$(1.14) \qquad E(\sup_{o \leqslant t \leqslant T} |x'_t|^2) \leqslant \lambda + \lambda' E\int_o^T |x|^2 ds$$

où $\lambda = C(\|x_o\|^2_{L_2^o} + \|u\|^2_{L_{21}} + \|v\|^2_{L_{22}} + \|M\|^2_{\underline{L}})$

et où λ' ne dépend que de A et B.

Par (1.14), $x' \in C_2^T$. De plus de (1.14), on tire que si $(x_1,x_2) \in C_2^T \times C_2^T$, alors :

$$(1.15) \qquad E(\sup_{o \leqslant t \leqslant T} |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|_t^2) \leqslant \lambda' E\int_o^T |x_1 - x_2|^2 dt \leqslant \lambda' T E(\sup_{o \leqslant t \leqslant T} |x_1 - x_2|_t^2)$$

De (1.15), on tire que, pour $s \leqslant T$,

(1.16) $$E|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|_s^2 \leqslant \lambda' s E(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |x_1 - x_2|^2)$$

Soit $\Phi^{(2)}$ l'application $\Phi \circ \Phi$. De (1.15) et (1.16) on tire :

(1.17) $$E(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\Phi^{(2)}(x_1)-\Phi^{(2)}(x_2)|_t^2) \leqslant \lambda'^2\int_0^T s\|x_1-x_2\|^2_{C_2^T} ds = \frac{\lambda'^2 T^2}{2}\|x_1-x_2\|^2_{C_2^T}$$

En itérant , on aura :

(1.18) $$\|\Phi^{(n)}(x_2) - \Phi^{(n)}(x_1)\|^2_{C_2^T} \leqslant \frac{(\lambda' T)^n}{n!} \|x_1-x_2\|^2_{C_2^T}$$

Pour n grand, $\frac{(\lambda' T)^n}{n!} < 1$

Par le Théorème du point fixe appliqué à l'espace de Banach C_2^T, Φ a un point fixe unique x dans C_2^T , qui est bien solution de l'équation (1.7).

De plus comme pour x fixé, $\Phi(x)$ dépend continuement de (x_0,u,v,M), comme λ' ne dépend pas de (x_0,u,v,M), le Théorème sur la dépendance continue du point fixe indique bien que $(x_0,u,v,M) \to x$ est une application continue.

Il reste à monter que si x' est une solution à trajectoires cadlag de (1.7), elle coïncide avec x.

Soit T_n le temps d'arrêt :

(1.19) $$T_n = \inf\{t ; |x'_t| \geqslant n\}$$

Alors sur $[0,T_n[$, $|x'| \leqslant n$

(1.14) montre alors que $x'_{t\wedge T_n} \in C_2^T$. $x'_{t\wedge T_n}$ est alors solution d'une équation du type (1.7), où $((A,B,u,v),M_t)$ sont remplacés par $(1_{t\leqslant T_n}(A,B,u,v),M_{t\wedge T_n})$.

$x'_{t\wedge T_n}$ est donc déterminé de manière unique dans C_2^T, et coïncide donc avec $x_{t\wedge T_n}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, le Théorème en résulte. □

COROLLAIRE. La norme de l'application $(x_o,u,v,M) \to x$ reste bornée quand A,B,T varient en restant uniformément bornés.

Preuve : Par (1.14), on a :

$$(1.20) \qquad E|x_t|^2 \leqslant \lambda + \lambda' \int_o^t E|x_s|^2 ds$$

Donc, par le lemme de Gronwall , il vient :

$$(1.21) \qquad E|x_t|^2 \leqslant \lambda e^{\lambda' t}$$

Par (1.14), on tire :

$$(1.22) \qquad E(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |x_t|^2) \leqslant \lambda e^{\lambda' T}$$

Comme λ et λ' restent uniformément bornés quand Z_o,u,v,M,A,B restent bornés dans leurs espaces respectifs de variation, le corollaire en résulte. □

4. Calcul stochastique élémentaire.

Soit $(x_o,\dot{x},H,M)$ et $(p_o,\dot{p},H',M')$ deux éléments de $L_2^o \times L_{21} \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$, et x_t,p_t les processus :

$$x_t = x_o + \int_o^t \dot{x}ds + \int_o^t Hdw + M_t$$

$$p_t = p_o + \int_o^t \dot{p}ds + \int_o^t H'dw + M'_t.$$

Par le Théorème I.1 (par exemple !), x et p sont dans C_2^T.

On a alors :

PROPOSITION I.1. Le processus N_t défini par :

$$(1.23) \qquad N_t = \langle p_t,x_t \rangle - \langle p_o,x_o \rangle - \int_o^t (\langle \dot{p},x \rangle + \langle p,\dot{x} \rangle + \langle H',H \rangle)ds - \langle M'_t,M_t \rangle$$

est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 .

Preuve : Remarquons tout d'abord qu'ici les crochets < > désignent le produit scalaire dans V , et pas une variation quadratique de martingales.

Par [7], p 303, on a :

$$(1.24)\qquad \langle p_t,x_t\rangle = \langle p_o,x_o\rangle + \int_o^t (\langle \dot{p},x\rangle + \langle p,\dot{x}\rangle)ds + \int_o^t \langle p^-, Hdw + dM\rangle$$

$$+ \int_o^t \langle x^-, H'dw + dM'\rangle + \int_o^t d[H'.w+M', H.w+M]$$

où $[H'.w+M',H.w+M]$ est donné par :

$$(1.25)\qquad [H'.w+M',H.w+M] = \sum_{i,j,k} [H'^k_i.w_i + M'_k, H^k_j + M_k]$$

Or comme H et H' sont prévisibles, on a :

$$d[H'^k_i.w_i, H^k_j.w_j] = H'^k_i H^k_j\ d[w_i,w_j]$$

De plus $[w_i,w_j]$ étant associé à $\langle w_i,w_j\rangle$, comme H et H' sont prévisibles, on voit que

$$(1.26)\qquad [H'^k_i.w_i, H^k_j.w_j] - \int_o^t H'^k_i H^k_j\, d\langle w_i,w_j\rangle$$

est une martingale.

De même, $[H'^k_i.w_i,M_k]$, qui est égal à $H'^k_i[w_i,M_k]$ est une martingale puisque $\langle w_i,M_k\rangle = 0$, ainsi que $[M'_k,H^k_i w_j]$.

Enfin $[M',M]$ est associé à $\langle M,M'\rangle$ (où < > est encore le produit scalaire).

N_t est donc une martingale locale. Il reste à vérifier qu'elle est uniformément intégrable.

Or comme p et x sont dans C_2^T , $< p_o, x_o >$ et $\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |< p_t, x_t >|$ sont dans L_1.

De plus :

$$(1.27) \qquad E(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |\int_o^t (< \dot{p}, x > + < p, \dot{x} >) ds| \leqslant$$

$$E(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |x_t| \int_o^T |\dot{p}| ds + \sup_{o\leqslant t\leqslant T} |p_t| \int_o^T |\dot{x}| ds) \leqslant$$

$$\|x\|_{C_2^T} \|\dot{p}\|_{L_{21}} + \|p\|_{C_2^T} \|\dot{x}\|_{L_{21}}$$

$$(1.28) \qquad E(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |\int_o^t < H', H > ds|) \leqslant (E\int_o^T |H|^2 ds)^{1/2} (E\int_o^T |H'|^2 ds)^{1/2}$$

$$= \|H\|_{L_{22}} \|H'\|_{L_{22}}$$

Enfin $\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |< M_t, M_t' >|$ est dans L_1 , puisque M et M' sont dans C_2^T.

$\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |N_t|$ est donc dans L_1 et N est bien une martingale. □

5- <u>Equations adjointes</u>.

Soit Φ l'application linéaire qui à $(x_o, v, M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$ associe $x_T \in L_2^T$, où $x \in C_2^T$ est donné par :

$$(1.29) \qquad \begin{aligned} & dx = Axdt + (v + Bx^-) dw + dM \\ & x(0) = x_o \end{aligned}$$

Par le Théorème I.1, Φ est une application linéaire continue.

Soit Ψ l'application linéaire qui à $(p_o, H, M') \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$ associe $p_T \in L_2^T$, où $p \in C_2^T$ est donné par :

$$(1.30)\quad \begin{cases} dp = -(A^* p + B^* H)dt + Hdw + dM' \\ p(0) = p_o \end{cases}$$

Par le Théorème I.1, Ψ est encore une application continue.

On va alors vérifier que (1.30) est l'équation "adjointe" de (1.29), ce qui nous permettra, dans le chapitre II, d'introduire un état dual.

On a en effet :

<u>THEOREME</u> I.2. Φ et Ψ sont deux opérateurs continus inversibles d'inverses continus et de plus :

$$\Psi = \Phi^{*-1}$$

<u>Preuve</u> : Appliquons la Proposition I.1 aux processus x et p.

Il vient :

$$(1.31)\quad E < p_T, x_T > = E < p_o, x_o > + E\int_0^T (< p, Ax > - < A^* p + B^* H, x >$$

$$+ < H, v + Bx >)ds + E < M'_T, M_T >$$

ou encore :

$$(1.32)\quad E < p_T, x_T > = E < p_o, x_o > + E\int_0^T < H, v > dt + E < M'_T, M_T >$$

De (1.32), on tire que si $x_T = 0$, le membre de droite de (1.32) est identiquement nul pour tout $(p_o, H, M') \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$ et donc que $(x_o, v, M) = (0,0,0)$.

Φ est donc injective.

Montrons qu'elle est surjective.

Soit $X \in L_2^T$ et $\tilde{x}$ la solution de l'équation différentielle pour $t \leqslant T$:

$$(1.33)\quad \begin{cases} d\tilde{x} = A\tilde{x}dt \\ \tilde{x}_T = X_T \end{cases}$$

Par le Théorème I.1 (par exemple !), on a :

$$(1.34) \qquad E(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |\tilde{x}_t|^2) < +\infty$$

$\tilde{x}$ est donc un processus continu de la classe (D) . Soit x sa projection optionnelle (l'opérateur de projection optionnelle est noté ^{1}).

Par [3],$\tilde{x}$ est cadlag. De plus : $|x_s| \leqslant {}^1(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |\tilde{x}_t|)_s$

et grâce à l'inégalité de Doob, il vient : $E(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |x_t|^2) \leqslant 4E(\sup_{o\leqslant t\leqslant T} |\tilde{x}_t|^2) < +\infty$

x est donc dans C_2^T. De plus, on a :

$$(1.34) \qquad x_t = {}^1\tilde{x}_o + {}^1\int_o^t A\tilde{x}ds$$

Montrons que

$$(1.35) \qquad y_t = {}^1\int_o^t A(\tilde{x}-x)ds$$

est une martingale car y_t est nécessairement cadlag. Il reste donc à vérifier que pour $t' \geqslant t$, si E est F_t mesurable,

$$(1.36) \qquad E(1_E y_t) = E(1_E y_{t'})$$

Or on a :

$$(1.37) \qquad E(1_E y_{t'}) = E(1_E y_t) + E(1_E \int_t^{t'} A(\tilde{x}-x)ds$$

Or A est prévisible. Donc :

$$(1.38) \qquad E(1_E \int_t^{t'} A(\tilde{x}-x)ds = E(1_E \int_t^{t'} A(x-x)ds) = 0$$

(1.37) et (1.38) impliquent bien (1.36)

Enfin comme on a :

$$(1.39) \qquad x_t = \int_o^t Axds + y_t + ({}^1\tilde{x}_o)_t$$

comme $x_o \in L_2^o$ et comme $x \in C_2^T, y + {}^1\tilde{x}_o$ est une martingale de carré intégrable.

Décomposons $y + {}^1\tilde{x}_o$ suivant L_2^o, W et $W^\perp$. Il existe $(x_o, v', M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$ unique tel que :

$$(1.40) \qquad (y + {}^1\tilde{x}_o)_t = x_o + \int_0^t v' dw + M_t$$

Alors $v = v' - Bx^-$ est dans $(L_{22})^m$, et de plus, on a :

$$(1.41) \qquad dx = Axdt + (v + Bx^-).dw + dM$$

$$x(0) = x_o$$

Enfin

$$(1.42) \qquad x_T = E^{F_T}\tilde{x}_T = X_T$$

On a donc trouvé $(x_o, v, M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$ tel que :

$$(1.43) \qquad \Phi(x_o, v, M) = X_T$$

Φ est donc une application bijective. Tous les espaces considérés étant des espaces de Banach, par le Théorème de Banach, Φ a un inverse continu Φ^{-1}.

Or (1.32) s'écrit :

$$(1.44) \qquad \langle \Psi(p_o, H, M'), X_T \rangle = \langle (p_o, H, M'), \Phi^{-1}(X_T) \rangle$$

(1.44) montre que $\Psi = \Phi^{*-1}$.

Le Théorème est bien démontré. □

On a enfin le résultat suivant:

<u>THEOREME</u> I.3. Si $(p, H, M') \in C_2^T \times (L_{22})^m_{loc} \times W^\perp_{loc}$ est tel que

$$(1.45) \qquad dp = -(A^* p + B^* H)dt + Hdw + dM'$$

alors $(H, M') \in (L_{22})^m \times W^\perp$.

<u>Preuve</u>: Grâce au Théorème I.2, on peut supposer que $p_T = 0$. Soit $\{T_n\}$ une suite $\uparrow + \infty$ de temps d'arrêt réduisant H et M'. Alors si on pose $T'_n = T_n \wedge T$, $v^n = 1_{t \leq T'_n} H$, $M'^n_t = M'_{t \wedge T'_n}$, $(v^n, M'^n) \in (L_{22})^m \times W^\perp$. Soit $x^n = \Phi(p_0, v^n, M'^n)$. Par la Proposition I.1, on a; pour $m \geq n$:

$$(1.46) \qquad E\langle p_{T'_m}, x^n_{T'_m} \rangle = E\langle p_0, p_0 \rangle + E\int_0^{T'_n} |H|^2 dt + E|M'_{T'_n}|^2$$

Comme $(x^n, p) \in C_2^T \times C_2^T$, et comme $T_m \to +\infty$ quand $m \to +\infty$, $\langle p_{T'_m}, x^n_{T'_m} \rangle \to 0$ dans L_1 quand $m \to +\infty$. Donc $v^n = 0$, $M'^n = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit bien $H = 0$, $M' = 0$. □

6- Une formule de résolution de l'équation backward pour le mouvement brownien.

On suppose provisoirement que w est un mouvement brownien. Nous allons alors donner une formule permettant de calculer la solution d'une équation backward.

Cette formule généralise la formule de Girsanov.

THEOREME I.4. Si w est un mouvement brownien, l'équation

$$(1.47)\qquad \begin{aligned} &dZ = ZA^*dt + ZB^*dw \\ &Z(0) = I \end{aligned}$$

a une solution unique à valeurs dans $V \otimes V$. Z est à trajectoires continues, et appartient à C_2^T . Enfin Z est à valeurs inversibles.

Preuve : La première partie résulte du Théorème I.1.

De plus considérons l'équation

$$(1.48)\qquad \begin{aligned} &dZ' = (-A^*Z' + B^{*2}Z')dt - B^*Z'dw \\ &Z'(0) = I \end{aligned}$$

Par le Théorème I.1, (1.48) a une solution unique à valeurs dans C_2^T.

Par [7] p 303 , on sait que

$$(1.49)\qquad Z_t'Z_t = I + \int_0^t Z'ZA^*ds + \int_0^t Z'ZB^*dw + \int_0^t (-A^* + B^{*2})Z'Zds$$

$$- \int B^*Z'Zdw - \int_0^t B^*Z'ZB^*ds.$$

$Z_t'Z_t$ est une solution de

$$(1.50)\qquad \begin{aligned} &dU = (UA^* - A^*U + B^{*2}U - B^*UB^*)ds + (UB^* - B^*U)dw \\ &U(0) = I \end{aligned}$$

Or par le Théorème I.1, (1.50) a une solution unique. On vérifie alors trivialement que $U = I$ est solution de (1.50). Donc $Z_t' Z_t = I.Z_t$ est bien inversible. □

On a alors le résultat suivant qui permet de "calculer" les solutions des équations backward, et d'obtenir une forme explicite de ψ^{-1}.

<u>THEOREME</u> I.5. Si w est un mouvement brownien, et si $R_T \in L_2^T$, alors l'équation

$$(1.51)\qquad \begin{aligned} dp &= -(A^* p + B^* H)dt + Hdw + dM \\ p_T &= R_T \end{aligned}$$

a une solution unique telle que $(p_o, H, M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$. De plus si Z est la solution de (1.47), on a :

$$(1.52)\qquad p_t = Z_t^{-1}\, {}^1(Z_T R_T)$$

<u>Preuve</u> : Par le Théorème I.2, on sait que (1.51) a une solution unique. Par la Proposition I.1., on sait aussi que

$$(1.53)\qquad Z_t p_t - \int_o^t (ZA^* p - ZA^* p - ZB^* H)ds - \int_o^t ZB^* Hds$$

est une martingale.

On en déduit que $Z_t p_t$ est une martingale.

Comme $p_T = R_T$, et comme Z_t est à valeurs inversibles, on a bien (1.52). □

<u>Remarque</u> I.1. Dans le cas où n=1, on trouve que Z est une densité de Girsanov qui est trivialement >0. Cependant il ne semble pas possible, même dans ce cas simple, de montrer difectement que p est solution de (1.51) avec $(p_o, H, M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$. C'est parcequ'on sait à <u>priori</u> que (1.51) a une solution unique avec $(p_o, H, M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$ qu'on peut appliquer la Proposition I.1, et obtenir (1.52). □

<u>Remarque</u> I.2. Sans faire l'hypothèse de continuité sur w, si $X_T \in L_2^T$ et si $\tilde{Z}_t$ est la solution unique de

$$(1.54)\qquad \begin{aligned} d\tilde{Z} &= -\tilde{Z}Adt \\ \tilde{Z}(0) &= I \end{aligned}$$

$x = \Phi^{-1}(X_T)$ est donné par :

$$(1.55)\qquad x_t = \tilde{Z}_t^{-1}\, {}^1(\tilde{Z}_T X_T).$$ □

7- Une formule de résolution de l'équation backward pour des martingales à saut unité.

On va résoudre l'équation backward (1.51) dans le cas particulier où w est une martingale somme compensée de sauts unités - i.e. une martingale de Poisson.

THEOREME I.6. Si pour tout $i=1,\ldots,m$, w_i est une somme compensée de sauts d'amplitude $+1$, si pour $i\neq j$, $d[w_i,w_j]=0$ et s'il existe k tel que

$$(1.56)\qquad \sup_{i=1\ldots m} \|(I+B_i^*)^{-1}\| \leqslant k$$

alors l'équation

$$(1.57)\qquad \begin{aligned} &dZ = ZA^* + Z^-B^*.dw \\ &Z(0) = I \end{aligned}$$

a une solution unique à trajectoires cadlag à valeurs dans $R^n \otimes R^n$. Z appartient alors à C_2^T. Enfin Z est à valeurs inversibles.

Preuve : La première partie de l'énoncé résulte du Théorème I.1.

Considérons l'équation

$$(1.58)\qquad \begin{aligned} dZ' = (-A^*Z' - ((I+B^*)^{-1} - I)B^*Z')dt \\ + ((I+B^*)^{-1} - I)Z'^- dw \end{aligned}$$

$$Z'(0) = I.$$

(1.58) a une solution unique par le Théorème I.1.

Par [7], p 303, on sait que

$$(1.59)\qquad \begin{aligned} Z'_tZ_t = I &+ \int_0^t Z'ZA^*dt + \int_0^t Z'^-Z^-B^*dw + \int_0^t(-A^* - ((I+B^*)^{-1} - I)B^*)Z'Zdt \\ &+ \int_0^t ((I+B^*)^{-1} - I)Z'^-Z^-dw + \int_0^t((I+B^*)^{-1} - I)Z'^-Z^-B^*dt \\ &+ \int_0^t ((I+B^*)^{-1} - I)Z'^-Z^-B^*dw \end{aligned}$$

Par le Théorème I.1, $Z'Z$ est solution unique de :

$$\begin{aligned} dU &= (UA^* - A^*U + ((I+B^*)^{-1} - I)(UB^* - B^*U))dt \\ (1.60) \qquad & + ((I+B^*)^{-1}\bar{U}(I+B^*) - \bar{U})dw \\ U(0) &= I. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que $U = I$ est solution de (1.60). Donc $Z_t'Z_t = I$, et Z est bien inversible. []

<u>THEOREME</u> I.7. Si pour tout $i = 1 \ldots m$ w_i est une somme compensée de sauts d'amplitude $+1$, et si pour tout $i \neq j$ $d[w_i, w_j] = 0$, et s'il existe k tel que :

$$(1.61) \qquad \sup_{i=1\ldots m} \|(I + B_i^*)^{-1}\| \leqslant k$$

alors pour $R_T \in L_2^T$, l'équation

$$(1.62) \qquad \begin{cases} dp = -(A^*p + B^*H)dt + H.dw + dM \\ p_T = R_T \end{cases}$$

a une solution unique telle que $(p_o, H, M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$.

De plus, si Z est la solution unique de (1.57), on a :

$$(1.63) \qquad p_t = Z_t^{-1}\,{}^1(Z_T R_T)$$

<u>Preuve</u> : La preuve est la même que pour le Théorème I.5 □.

8- Compléments sur l'intégrale optionnelle

Etant donné une mesure dS sur la tribu optionnelle $\overline{O}$ restreinte à $\Omega \times [0,T]$, on peut considérer l'espérance conditionnelle de tout processus intégrable pour d S relativement à une sous-tribu quelconque de $\overline{O}$.

Nous allons voir rapidement que cette opération apparaît de manière naturelle quand on projette une martingale de carré intégrable sur un sous-espace stable.

Soit en effet M une martingale de carré intégrable, quasi continue à gauche, nulle en 0 et arrêtée en T.

$L_{22}^{[M,M]}$ désigne l'ensemble des classes de processus optionnels tels que :

$$(1.64)\qquad E\int_0^T |H|^2 d[M,M] < +\infty.$$

Soit J une tribu de $\Omega \times [0,T]$ telle que $\overline{P} \subset J \subset \overline{O}$

${}^J L_{22}^{[M,M]}$ désigne l'ensemble des éléments de $L_{22}^{[M,M]}$ possédant un représentant J mesurable (il y a naturellement une difficulté, car les négligeables de $\overline{O}$ et de J ne sont pas les mêmes. On résoud cette difficulté par les méthodes classiques).

Soit alors N une martingale de carré intégrable, quasi continue à gauche, nulle en 0 et arrêtée en T.

Soit $\underline{L}_N^J$ l'ensemble des martingales qui s'écrivent sous la forme : $\int_0^t H' dN$ où $H' \in {}^J L_{22}^{[N,N]}$.

Comme $J \supset \overline{P}$, l'espace $\underline{L}_N^J$ est fermé et stable au sens de [7], p 262.

Etant donné $H \in L_{22}^{[M,M]}$, on va chercher la projection de $\int_0^t H.dM$ sur $\underline{L}_N^J$.

THEOREME I.8. Si $H \in L_{22}^{[M,M]}$, la projection de $\int_0^t HdM$ sur $\underline{L}_N^J$ est donnée par $\int_0^t {}^J H\, dN$ où ${}^J H$ est une classe de processus J- mesurables déterminés par l'égalité :

$$(1.65)\qquad E\int_0^T HH''d[M,N] = E\int_0^T {}^J\!H H''d[N,N].$$

pour tout $H'' \in {}^J\!L_{22}^{[N,N]}$. ${}^J\!H$ est l'espérance conditionnelle de $H\,\frac{d[M,N]}{d[N,N]}$ relativement à J pour la mesure $d[N,N]$.

Preuve : Si N' est la projection de $\int_0^t HdM$ sur $\underline{L}_N^J$, on sait que N' est caractérisée par :

$$E\, N'_T N''_T = E\left(\left(\int_0^T HdM\right)N''_T\right) \quad \text{où} \quad N''_T \in \underline{L}_N^J.$$

Or N' et N'' s'écrivent :

$$(1.66)\qquad \begin{aligned} N' &= \int_0^t {}^J\!HdN \\ N'' &= \int_0^t H''dN \end{aligned}$$

avec ${}^J\!H$ et H'' dans ${}^J\!L_{22}^{[N,N]}$.

De plus comme M et N sont quasi-continues à gauche, on a par [7], p 276 :

$$(1.67)\qquad E\left(\left(\int_0^T HdM\right)N''_T\right) = E\int_0^T HH''d[M,N].$$

$$(1.68)\qquad E(N'_T N''_T) = E\int_0^T {}^J\!H\, H''d[N,N].$$

L'inégalité de Kunita-Watanabe ([7], p 269)

$$\int_0^T |KK'|\,|d[M,N]| \leqslant \left(\int_0^T K^2 d[M,M]\right)^{1/2}\left(\int_0^T K'^2 d[N,N]\right)^{1/2}$$

montre bien que $d[M,N]$ est absolument continu par rapport à $d[N,N]$.

L'égalité de (1.67) et (1.68) entraîne bien le Théorème. □

COROLLAIRE. Si T' est un temps d'arrêt $\leqslant T$, alors :

$$(1.69)\qquad {}^J 1_{t>T'}H = 1_{t>T'}\,{}^J\!H.$$

Preuve : $1_{t>T'}$ est prévisible. Comme $\overline{P} \subset J$, (1.68) exprime l'une des propriétés de l'espérance conditionnelle □.

Remarque I.3. L'opérateur ^{J} peut être défini par (1.65) sur l'ensemble des processus mesurables (non nécessairement optionnels) vérifiant (1.64). □

CHAPITRE II

LE CONTROLE LINEAIRE QUADRATIQUE

LE CAS PREVISIBLE

Nous allons maintenant appliquer les méthodes développées dans les chapitres 0 et I au contrôle d'une équation différentielle stochastique linéaire avec critère quadratique.

Nous étendons ici les résultats de [2] , où nous ne traitons que le cas où w est un mouvement brownien.

1- Le problème de contrôle.

On reprend les hypothèse de I.1.

V désigne un espace vectoriel de dimension n . H et U sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

- $A, (B_i)_{i=1...m}$ sont une famille de processus prévisibles bornés à valeurs dans $V \otimes V$.
- $C, (D_i)_{i=1...m}$ sont une famille de processus prévisibles bornés à valeurs dans $U \otimes V$.
- M est un processus prévisible borné à valeurs dans $V \otimes H$.
- N est un processus prévisible borné, à valeurs dans $U \otimes U$, auto-adjointes définies positives, et tel qu'il existe $\lambda > 0$ pour lequel pour tout u de U, on ait :

$$(2.1) \qquad \langle Nu,u \rangle \geq \lambda |u|^2$$

- M_1 est une variable aléatoire défini sur Ω à valeurs dans $V \otimes H$, bornée et F_T-mesurable.
- f est un élément de L_{21}.

- $g = (g_1, \dots g_m)$ est un élément de $(L_{22})^m$
- x_o est un élément de L_2^o .

DEFINITION II.1. L_{22}^U est l'espace des classes de processus prévisibles u à valeurs dans U tels que

$$(2.2) \qquad E\int_0^T |u|^2 dt < +\infty$$

On munit L_{22}^U de la norme associée à (2.2).

On pose alors la définition du problème de contrôle linéaire quadratique :

DEFINITION II.2. Pour $u \in L_{22}^U$, soit $x \in C_2^T$ la solution unique au sens du Théorème I.1 de :

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} & dx = (Ax + Cu + f)dt + (B\bar{x} + Du + g).dw \\ & x(0) = x_o \end{aligned}$$

Le problème linéaire quadratique est la recherche de $u_o \in L_{22}^U$ minimisant la fonctionnelle

$$(2.3') \qquad u \longrightarrow J(u) = E(\int_0^T (|Mx|^2 + \langle Nu, u \rangle)dt) + E|M_1 x_T|^2$$

pour $u \in L_{22}^U$.

2- Existence et unicité de la solution.

On a immédiatement par application des résultats des chapitres 0 et I:

THEOREME II.1. Le problème linéaire quadratique a une solution unique.

Preuve : Par le Théorème I.1, $u \longrightarrow x$ est une application affine continue de L_{22}^U dans C_2^T . De plus

$$x \longrightarrow E\int_0^T |Mx|^2 dt + E|M_1 x_T|^2$$ est une application convexe continue de C_2^T dans R . Enfin comme N est à valeurs auto-adjointes définies positives

$u \longrightarrow E\int_0^T < Nu,u > dt$ est une fonction strictement convexe continue de L_{22}^U dans $\mathbb{R}$. J est donc une fonctionnelle continue strictement convexe sur L_{22}^U. De plus grâce à (2.1), $J(u) \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{L_{22}^U} \longrightarrow +\infty$. L_{22}^U étant un espace de Hilbert, on applique alors les propositions 0.1 et 0.2. Le Théorème en résulte $\square$.

3- Des conditions nécessaires et suffisantes.

On va maintenant écrire des conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit optimal, en écrivant que la dérivée de J au sens de Gâteaux est nul en u.

On a en effet:

<u>THEOREME</u> II.2. Pour que u soit solution du problème linéaire quadratique, il faut et il suffit que si p est la solution unique de l'équation

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &dp = (M^*Mx - A^*p - B^*H)dt + H.dw + dM \\ &p_T = -M_1^*M_1x_T \end{aligned}$$

avec $(p_0,H,M) \in L_2^0 \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$, alors :

$$(2.5)\qquad Nu = C^*p^- + D^*H \qquad dP \otimes dt \quad p.p.$$

<u>Preuve</u> : Grâce au Théorème 0.1, pour que u soit optimal, il faut et il suffit que si $J'(u)$ est la dérivée au sens de Gâteaux de I en u, on ait :

$$\forall\, v \in L_{22}^U \quad < J'(u),v-u > \;\geqslant 0.$$

Soient x_t^u et x_t^v les processus x solutions de (2.3) pour les contrôles u et v. On a alors :

$$(2.6)\qquad < J'(u),v-u > = 2E\int_0^T (< M^*Mx^u,x^v-x^u > + < Nu,v-u >)dt$$

$$+ 2E < M_1^*M_1x_T^u,x_T^v-x_T^u >$$

Montrons que le système

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} dp &= (M^*Mx^u - A^*p - B^*H)dt + Hdw + dM \\ p_T &= -M_1^*M_1x_T^u \end{aligned}$$

avec $(p_o,H,M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$ a une solution unique.

Soit en effet q la solution unique de :

$$dq = (M^*Mx^u - A^*q)dt$$

$$q(0) = 0.$$

Le Théorème I .1 montre que $q_T \in L_2^T$, puisque $x^u \in C_2^T$. Il suffit donc de montrer que le système :

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} dq' &= (-A^*q' - B^*H)dt + Hdw + dM \\ q'_T &= -M_1^*M_1x_T^u - q_T \end{aligned}$$

a une solution unique avec $(q'_o,H,M) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$. Mais cela résulte du Théorème I .2.

Par la proposition I.1, on a :

$$(2.9)\qquad E < p_T, x_T^v - x_T^u > = E\int_o^T < M^*M_x^u - A^*p - B^*H, x^v - x^u > dt$$

$$+ E\int_o^T < p, A(x^v - x^u) + C(v-u) > dt + E\int_o^T < H, B(x^v - x^u) + D(v-u) > dt$$

ou encore :

$$(2.10)\qquad E < -M_1^*M_1x_T^u, x_T^v - x_T^u > = E\int_o^T < M^*Mx^u, x^v - x^u > dt$$

$$+ E\int_o^T < C^*p + D^*H, v-u > dt$$

De (2.6) et (2.10), on tire :

$$(2.11) \qquad < J'(u), v-u > = 2E\int_0^T < Nu - C^*p - D^*H, v-u > dt.$$

On en déduit que pour que u soit optimum, il faut et il suffit que :

$$(2.12) \qquad Nu = C^*p^- + D^*H \quad dP\otimes dt \quad p.p.$$

(on écrit p^- au lieu de p, car p^- est prévisible, et $(p^- \neq p)$ est $dP\otimes dt$ négligeable). □

4- Le problème du feedback.

Le cadre fonctionnel que nous avons choisi est le même que celui de n'importe quel problème d'optimisation sur un espace de Hilbert. Il n'est donc pas choquant que nous puissions suivre une démarche formellement similaire à la démarche utilisée par Lions dans [6]-chapitre 3 pour le contrôle des équations aux dérivées partielles.

On va en effet chercher à obtenir p_t sous la forme d'une fonction aléatoire linéaire de x_t.

On a :

PROPOSITION II.1. Pour tout $s\in[0,T]$ et $h\in L_2^s$, le système défini pour $t\in[s,T]$:

$$\begin{aligned}
& dx = (Ax + CN^{-1}(C^*p^- + D^*H) + f)dt + (Bx^- + DN^{-1}(C^*p^- + D^*H) + g)dw \\
& x_s = h \\
(2.13) \qquad & dp = (M^*Mx - A^*p - B^*H)dt + Hdw + dM \\
& p_T = -M_1^*M_1x_T \\
& (p_s, H, M) \in L_2^s \times (L_{22})^m \times W^\perp
\end{aligned}$$

a une solution unique.

Preuve : Il suffit en effet de remarquer que x et p sont respectivement l'état primal et l'état dual le problème de contrôle linéaire quadratique où l'origine des temps a été transportée en s et où l'état primal prend la "valeur" h en s . □

On a alors l'analogue du lemme 4.2 de [6] chapitre 3 :

PROPOSITION II.2. L'application $h \longrightarrow (x,p)$ est continue et affine de L_2^s dans $C_2^T \times C_2^T$.

Preuve : Remarquons que x et p n'étant définis que pour $t \geqslant s$, on leur donnera arbitrairement la valeur 0 pour $t < s$.

Pour $u \in L_{22}^U$ soit x la solution de :

$$(2.14) \qquad \begin{aligned} &dx = (Ax + Cu + f)dt + (Bx + Du + g)dw \\ &x_s = h. \end{aligned}$$

et $J_s^h(u)$ la fonctionnelle:

$$u \longrightarrow J_s^h(u) = E\int_s^T (|Mx|^2 dt + \langle Nu,u \rangle)dt + E|M_1 x_T|^2$$

Soit alors $h_n \longrightarrow h$ dans L_2^s , v^n le contrôle optimal pour $J_s^{h_n}$ et v le contrôle optimal pour J_s^h , x^n et x les états correspondants donnés par (2.14), p^n et p les états duaux.

Nécessairement :

$$(2.15) \qquad J_s^{h_n}(v_n) \leqslant J_s^{h_n}(v)$$

Or grâce au Théorème I.1, quand $n \to +\infty$, $J_s^{h_n}(v) \longrightarrow J_s^h(v)$

Donc :

$$(2.16) \qquad \limsup J_s^{h_n}(v_n) \leqslant J_s^h(v)$$

Or on a :

$$(2.17) \qquad \|v_n\|_{L_{22}^U}^2 \leqslant \frac{1}{\lambda} J_s^{h_n}(v_n)$$

(2.17) montre que les v_n restent bornés dans L^U_{22}.

Par le Théorème d'Eberlein, on peut trouver v_{n_k} convergeant faiblement vers v' dans L^U_{22}.

Par le Théorème I.1, x^{n_k} converge faiblement vers $x' \in C^T_2$, qui est la solution de (2.14) pour $u = v'$ (une application affine fortement continue est aussi continue lorqu'on muni les espaces considérés de leur topologie faible).

Donc :

$$J^h_s(v') \leqslant \liminf J_s^{h_{n_k}}(u_{n_k}) \tag{2.18}$$

De (2.16) et (2.18) on tire :

$$J^h_s(v') \leqslant \liminf J_s^{h_n}(v_n) \leqslant \limsup J_s^{h_n}(v_n) \leqslant J^h_s(v) \tag{2.19}$$

Or v est l'optimum unique pour J^h_s, donc $v = v'$.

On vérifie alors immédiatement que la suite v_n toute entière converge faiblement vers v, et que x^n converge faiblement vers x.

p^n est la solution unique de :

$$\begin{aligned} &dp^n = (M^*Mx^n - A^*p^n - B^*H^n)dt + H^n dw + dM^n \\ &p^n_T = -M^*_1 M_1 x^n_T \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec $(p^n_s, H^n, M^n) \in L^s_2 \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$

Alors M^*Mx^n tend faiblement vers M^*Mx dans L_{22}. Si q_n est donné par

$$\begin{aligned} &dq^n = (M^*Mx^n - A^*q)dt \\ &q^n(s) = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

q^n converge faiblement vers q – qui correspond à M^*Mx – dans C^T_2. Alors q^n_T converge faiblement vers q_T dans L^T_2.

Si q'^n est donné par :

$$(2.22)\qquad \begin{aligned} dq'^n &= (-A^*q'^n - B^*H^n)dt + H^n dw + dM^n \\ q_T'^n &= -M_1^*M_1 x_T^n - q_T^n \end{aligned}$$

par le Théorème I.2, q'^n converge faiblement vers q' dans C_2^T .

Alors $p^n = q^n + q'^n$ converge faiblement vers $p = q + q'$ dans C_2^T .

Tous les espaces considérés étant des espaces de Banach, par le Théorème du graphe fermé, on en déduit bien que $h \longrightarrow (x,p)$ est continue . □

<u>COROLLAIRE</u>. $h \longrightarrow p_s$ est continue et affine de L_2^s dans L_2^s .

<u>Preuve</u> : Comme $p \longrightarrow p_s$ est linéaire continue de C_T^2 dans L_2^s , le corollaire résulte de la Proposition II.2. □

On va maintenant établir une forme rudimentaire de feedback pour p .

<u>PROPOSITION</u> II.3. On peut trouver des variables aléatoires F_s-mesurables P_s et r_s à valeurs respectivement dans $V \otimes V$ et V , déterminées de manière unique, telles que P_s est essentiellement borné et r_s dans L_2^s et que :

$$(2.23)\qquad p_s = -(P_s h + r_s) \qquad \text{p.s.}$$

$-P_s h$ est déterminé par la solution de (2.13) avec f et g nuls et $-r_s$ par la solution de (2.13) avec h nul.

<u>Preuve</u> : On vérifie immédiatement que si E est F_s-mesurable et si h et h' sont dans L_2^s , on a :

$$(2.24)\qquad (x,p)(1_A h + 1_{c_A} h') = 1_A(x,p)(h) + 1_{c_A}(x,p)(h')$$

On considère alors deux cas :

a) Supposons f et g nuls.

Soit P_s la matrice $-(p_s(e_1),\dots,p_s(e_n))$

Soit alors h étagée de la forme :

$$h = \sum_1^p 1_{A_i} h_i$$

où $\{A_i\}$ est une partition F_s-mesurable de Ω, et où $\{h_i\}$ sont des vecteurs constants de V.

Alors :

$$(2.25)\qquad p_s(h) = \sum_1^p 1_{A_i} p_s(h_i) = -\sum_1^p 1_{A_i} P_s h_i = -\sum_1^p P_s 1_{A_i} h_i$$

$$= -P_s h$$

$h \longrightarrow p_s(h)$ et $h \longrightarrow -P_s h$ coïncident donc sur les fonctions étagées.

De plus comme $h \longrightarrow p_s(h)$ est continue sur L_2^s, il existe $k \geq 0$ tel que si $h \in L_2^s$:

$$(2.26)\qquad E|p_s(h)|^2 \leq k^2 E|h|^2$$

Si $h = 1_A e_i$, de (2.26) on tire :

$$(2.27)\qquad E\, 1_A |p_s(e_i)|^2 \leq k^2 \int_A dP.$$

De (2.27), on tire immédiatement que $\{\omega ; |P_s e_i| > k\}$ est négligeable.

P_s est donc essentiellement borné. $h \longrightarrow -P_s h$ est donc une application continue de L_2^s dans L_2^s. Comme elle coïncide avec $h \longrightarrow p_s(h)$ quand h est étagée, comme les fonctions étagées sont denses dans L_2^s, on a bien :

$$(2.28)\qquad p_s(h) = -P_s h.$$

b) Dans le cas général, $p_s(h) + P_s h$ est un élément de L_2^s qui ne dépend pas de h, et qu'on peut donc noter $-r_s$. $\square$

On a enfin

<u>PROPOSITION</u> II.4. P_s est à valeurs p.s. auto-adjointes et positives. Il existe $C > 0$ tel que pour tout s de $[0,T]$

$$(2.29)\qquad \text{supess } |P_s| \leq C$$

<u>Preuve</u> : Soient h et h' dans L_2^s, et (x,p) et (x',p') les solutions de (2.13) correspondant à h et h', avec $f = 0$ et $g = 0$. u et u' sont définis

par

$$u = N^{-1}(C^*p^- + D^*H)$$
$$u' = N^{-1}(C^*p'^- + D^*H')$$

On pose :

$$(2.30) \qquad F_s(h,h') = E\left(\int_s^T (< Mx,Mx' > + < Nu,u' >)dt\right) + E < M_1x_T,M_1x'_T >$$

F_s est symétrique en h,h' . De plus par la Proposition I.1 on a :

$$(2.31) \qquad E < p_T,x'_T > = E < p_s,x'_s > + E\int_s^T < M^*Mx - A^*p - B^*H,x' > dt$$
$$+ E\int_s^T < p,Ax' + Cu' > dt + E\int_s^T < H,Bx' + Du' > dt$$

ou encore :

$$(2.32) \qquad E < p_T,x'_T > = E < p_s,x'_s > + E\int_0^T (< Mx,Mx' > + < C^*p + D^*H,u' >)dt$$

Comme on a :

$$(2.33) \qquad \begin{aligned} Nu &= C^*p^- + D^*H \\ p_T &= -M_1^*M_1x_T \\ p_s &= -P_sh \\ x'_s &= h' \end{aligned}$$

de (2.30) et (2.32), on tire :

$$(2.34) \qquad F_s(h,h') = E < P_sh,h' >$$

Comme F_s est symétrique en h et h' , on a :

(2.35) $$E < P_s h,h' > = E < P_s h',h >$$

De (2.35), on tire que pour tout E F_s-mesurable, on a :

(2.36) $$E(P_{ij} 1_E) = E(P_{ji} 1_E)$$

et donc :

(2.37) $$P_{ij} = P_{ji} \quad \text{p.s.}$$

P_s est bien p.s. auto-adjoint.

De plus $F_s(h,h) \geqslant 0$. Donc pour $h \in L_2^s$, on a :

(2.37) $$E < P_s h,h > \geqslant 0.$$

L'ensemble Γ des ω où $P_s(\omega)$ est positif est mesurable.

En effet Γ s'écrit :

(2.38) $$\Gamma = \bigcap_{q \in Q^N} (< P_s q,q > \geqslant 0).$$

Si ${}^c\Gamma$ n'était pas négligeable, par le Théorème de section de [4] III,44 , il existerait h à valeurs dans la boule unité de V tel que

- sur Γ , $h = 0$
- sur ${}^c\Gamma$, $< P_s h,h > < 0$.

Alors $h \in L_2^s$ et on aurait

(2.39) $$E < P_s h,h > < 0.$$

ce qui est impossible.

P_s est donc bien à valeurs positives.

Soit alors x^s la solution de :

(2.40) $$\begin{aligned} &ds^s = Ax^s dt + Bx^s dw \\ &x_s^s = h \end{aligned}$$

x^s correspond au contrôle $u = 0$. On a donc :

(2.41) $$F_s(h,h) \leqslant E\int_s^T |Mx^s|^2 dt + E|M_1 x_T^s|^2$$

Par le corollaire du Théorème I.1, il existe C' ne dépendant pas de s tel que :

(2.42) $$\|x^s\|_{C_2^T} \leqslant C' \|h\|_{L_2^s}$$

Comme $E < P_s h,h > = F_s(h,h)$, de (2.41) et (2.42), on tire que pour tout $s \in [0,T]$, on a :

(2.43) $$E < P_s h,h > \leqslant C \|h\|^2_{L_2^s}$$

Or comme P_s est p.s. auto-adjoint, on sait que p.s. :

(2.44) $$\|P_s(\omega)\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |< P_s(\omega)y,y >|$$

Par application d'un Théorème de section on en déduit que $\|P_s(\omega)\| \leqslant C$ p.s. □

On a enfin :

<u>THEOREME</u> II.3. Dans le système (2.13), pour tout $s \in [0,T]$, on a :

(2.45) $$p_s = -(P_s x_s + r_s) \text{ p.s.}$$

<u>Preuve</u> : C'est immédiat par les résultats précédents. □

Le lecteur sera peut être tenté d'écrire les démonstrations quand s devient un temps d'arrêt S . Mais rien ne permet à priori de "recoller" entre eux les différents P_s de manière à ce que P_S soit la valeur arrêtée d'un processus. Aussi l'égalité (2.45) n'est-elle pas à priori une égalité entre processus, mais une égalité entre variables aléatoires.

5- L'équation de Riccati formelle.

On va maintenant chercher à trouver une équation différentielle stochastique formellement vérifiée par P . Pour ne pas rendre les calculs inextricables, on fait les hypothèses suivantes sur w :

(2.46) . $d < w_i, w_j > = \delta_{ij} dt$

(2.47) . Si $i \neq j$, $d[w_i, w_j] = 0$

Ces hypothèses sont plus fortes que les hypothèses précédentes.

Dans le cas général, si on décompose chaque w_i en $w_i^c + w_i^d$, où w_i^c est la partie continue de w_i , et w_i^d sa partie totalement discontinue, les w_i^c ne sont pas nécessairement mutuellement orthogonaux, et les w_i^d peuvent avoir des sauts communs. On doit alors procéder à une réorthogonalisation des w_i^c pour se ramener - à peu de choses près - au cas précédent, pour les w_i^c .

On ne peut par contre pas se ramener directement au cas précédent pour les w_i^d , sans introduire d'intégrales optionnelles dans l'équation (2.3), ce qui complique le problème (voir le chapitre III).

Naturellement on peut effectuer complètement les calculs dans le cas général - le lecteur est vivement invité à le faire - mais ils deviennent rapidement insupportables à la lecture. La perte de généralité ne sera ici qu'apparente.

Pour $i=1\dots m$, p_i est l'opérateur J construit au Théorème I.8 associé à $M = w_i$, $N = w_i$, $J = \bar{P}$. Comme $d[M,N] = d[w_i, w_i]$ est une mesure $\geqslant 0$, p_i est un véritable opérateur d'espérance conditionnelle.

Pour trouver l'équation formellement vérifiée par P, on va écrire arbitrairement P sous la forme :

(2.48) $$P_t = P_0 + \int_0^t \dot{P} ds + \int_0^t \mathcal{K}.dw + \mathcal{M}_t$$

où $(P_o, \dot{P}, \mathcal{K}, \mathcal{M}) \in L_2^o \times L_{22} \times (L_{22})^m \times W^\perp$

On a alors :

<u>THEOREME</u> II.4. P est formellement solution de l'équation :

$$(2.49) \quad \begin{aligned} & dP + \{PA + A^*P + B^{*P}PB + B^*\mathcal{K} + \mathcal{K}B) \\ & - (B^{*P}PD + PC + \mathcal{K}D)(N + D^{*P}PD)^{-1}(D^{*P}PB + C^*P + D^*\mathcal{K}) \\ & + M^*M\}dt - \mathcal{K}dw - d\mathcal{M} = 0 \\ & P_T = M_1^*M_1 \end{aligned}$$

où $(P_o, \mathcal{K}, \mathcal{M}) \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^\perp$

avec les conventions :

$$(2.50) \quad \begin{aligned} & B^{*P}PB = \sum_1^m B_i^*({}^{P_i}P)B_i \\ & B^*\mathcal{K} = \sum_1^m B_i^*\mathcal{K}_i \\ & B^{*P}PD = \sum_1^m B_i^*({}^{P_i}P)D_i \end{aligned}$$

et les conventions correspondantes pour les autres termes.

<u>Preuve</u> : On va écrire que $p_t = -P_t x_t$ vérifie l'équation (2.4).

Or par la formule de Pratelli-Yoeurp donnée dans [7], p 345, on a :

$$(2.51) \quad P_t x_t = P_o x_o + \int_o^t P dx + \int_o^t dPx^- + \int_o^t \langle \mathcal{K}, Bx^- + Du \rangle \, ds$$

ou encore, sachant que x vérifie (2.3) (avec f et g nuls), on a

$$(2.52) \quad \begin{aligned} P_t x_t = P_o x_o & + \int_o^t (\dot{P}x + P(Ax + Cu) + \mathcal{K}(Bx + Du))ds \\ & \int_o^t \mathcal{K}x^- dw + \int_o^t P(Bx^- + Du)dw + \int_o^t d\mathcal{M}x^- \end{aligned}$$

Or on sait par ailleurs que $p_t = -P_t x_t$, et que :

$$(2.53)\qquad \begin{aligned} &dp = (M^*Mx - A^*p - B^*H)dt + H.dw + dM \\ &p_T = -M_1^*M_1x_T \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(2.54)\qquad -\{\dot{P}x + P(Ax+Cu) + \mathcal{K}(Bx+Du)\} = M^*Mx + A^*Px - B^*H \quad dP\otimes dt \quad p.p.$$

$$(2.55)\qquad -\left(\int_0^t \mathcal{K}x^- dw + \int_0^t P(Bx^- + Du)dw + \int_0^t d\mathcal{M}x^-\right) = \int_0^t Hdw + M_t .$$

Nous allons projeter le membre de gauche de (2.55) sur W et écrire que cette projection sur W est égale à $\int_0^t Hdw$. $\int_0^t d\mathcal{M}x^-$ est dans $W^\perp$ puisque $\mathcal{M}\in W^\perp$.

Sa projection sur W est donc nulle.

Pour $i=1...m$, il faut chercher la projection de $\int_0^t P(B_ix^- + D_iw)dw_i$

sur W . Comme les w_i sont orthogonaux, la jième composante – pour $j=1....m$ – de cette projection coïncide avec la projection de $\int_0^t P(B_ix^- + D_iu)dw_i$ sur $\underline{L}^{\overline{P}}_{w_j}$.

Enfin comme $d[w_i,w_j]=0$ si $i\neq j$, toutes les composantes sont nulles, sauf la ième , qui par le Théorème I.8 est donnée par :

$$(2.56)\qquad \int_0^t {}^{p_i}P(Bx^- + Du)dw_i$$

On en déduit que pour $i=1...m$, – on a :

$$(2.57) \qquad H_i = -(\mathcal{K}_i x^- + {}^{p_i}P(B_i x^- + D_i u))$$

De plus on a :

$$(2.58) \qquad Nu = C^* p^- + D^* H$$

On en déduit :

$$(2.59) \qquad (N + \sum_1^m D_i^* \, {}^{p_i}PD)u = -(\sum_1^m D_i^* \, {}^{p_i}PB_i + C^* P^- + D^* \mathcal{K})x^-$$

En remarquant que p_i est un opérateur d'espérance conditionnelle, si P est auto-adjoint positif, ${}^{p_i}P$ est encore auto-adjoint positif et $(N + D^* \, {}^{p}PD)$ est inversible.

Donc :

$$(2.60) \qquad u = -(N + D^* \, {}^{p}PD)^{-1}(D^* \, {}^{p}PB + C^* P^- + D^* \mathcal{K})x^-$$

En remplaçant dans (2.54), il vient :

$$(2.61) \qquad (\dot{P} + PA + A^*P + B^* \, {}^{p}PB + B^*\mathcal{K} + \mathcal{K}B) - (B^* \, {}^{p}PD + PC + \mathcal{K}D)$$

$$(N + D^* \, {}^{p}PD)^{-1}(D^* \, {}^{p}PB + C^*P + D^*\mathcal{K}) + M^*M)x^- = 0 \quad dP \otimes dt \quad \text{p.p.}$$

En écrivant que (2.61) est "vraie" pour tout x^-, on en déduit bien (2.49).

Enfin, on a :

$$(2.62) \qquad -P_T x_T = -M_1^* M_1 x_T$$

et "donc" formellement :

$$(2.63) \qquad P_T = M_1^* M_1 . \quad \square$$

On va maintenant opérer de la même manière pour r_t.

On écrit en effet formellement r_t sous la forme :

$$(2.64) \qquad r_t = r_o + \int_0^t \dot{r} ds + \int_0^t h dw + M_t'$$

avec $(r_o, h, M') \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$

On a alors :

<u>THEOREME</u> II.5. r_t est solution formelle de l'équation :

$$(2.65)\qquad dr = \{(PC + B^*{}^pPD + \mathcal{K} D)(N + D^*{}^pPD)^{-1}C^* - A^*\}rdt + [\{(PC + B^*{}^pPD + \mathcal{K}D)(N + D^*{}^pPD)^{-1}D^* - B^*\}({}^pPg + h) - Pf - \mathcal{K}g]dt + hdw + dM'$$

$$r_T = 0$$

avec $(r_o, h, M') \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$

<u>Preuve</u> : On doit écrire :

$$(2.66)\qquad p_t = -(P_t x_t + r_t)$$

Il vient alors comme précédemment, en utilisant le fait que f et g sont non nécessairement nuls :

$$(2.67)\qquad -\{\dot{P}x^- + P(Ax^- + Cu + f) + \mathcal{K}(Bx + Du + g) + \dot{r}\} = M^*Mx + A^*Px - B^*H + A^*r.$$

$$(2.68)\qquad H_i = -\{\mathcal{K}_i x^- + {}^{p_i}P(B_i x^- + D_i u + g_i) + h_i\}$$

Comme on a :

$$(2.69)\qquad Nu = -C^*P^-x^- - C^*r^- + D^*H$$

il vient :

$$(2.70)\qquad u = -(N + D^*{}^pPD)^{-1}(C^*r^- + (C^*P^- + D^*{}^pPB + D^*\mathcal{K})x^- + D^*({}^pPg + h))$$

De (2.70) on déduit donc :

$$(2.71)\qquad \dot{r} = \{(PC + B^{*p}PD + \mathcal{K}D)(N + D^{*p}PD)^{-1}\, C^* - A^*\}r$$
$$+ \{(PC + B^{*p}PD + \mathcal{K}D)(N + D^{*p}PD)^{-1}D^* - B^*\}({}^pPg + h) - Pf - \mathcal{K}g.$$

De plus on a $r_T = 0$ car en T, on a :

$$(2.72)\qquad p_T = -M_1^*M_1x_T \quad \square.$$

<u>COROLLAIRE</u>. Le contrôle optimal u est formellement donné par :

$$(2.73)\qquad u = -(N + D^{*p}PD)^{-1}\{(C^*P^- + D^{*p}PB + D^*\mathcal{K})x^- + C^*r^- + D^*({}^pPg + h)\}$$

<u>Preuve</u> : C' est la formule (2.70)$\square$.

6– <u>Equation de Riccati : existence de la solution</u>.

Nous ne pourrons pas démontrer l'existence de solutions pour l'équation (2.49) dans le cas général.

Nous allons étudier certains cas particuliers importants où l'équation a une solution.

Nous ne referons naturellement pas les démonstrations d'existence et d'unicité dans chaque cas.

a) <u>Un cas "simple" : les coefficients indépendants</u>.

(Ω^1, F^1, P^1) désigne maintenant un espace de probabilité complet muni d'une filtration complète et continue à droite de sous-tribus $\{F_t^1\}$ complètes de F^1.

A, B, C, D, M, N, M_1 sont ici définis sur Ω^1 et possèdent les mêmes propriétés que précédemment relativement à $\{F_t^1\}$. On a alors :

<u>THEOREME</u> II.6. L'équation de Riccati :

$$(2.74)\qquad dP + \{PA + A^*P + B^*PB - (B^*PD + PC)(N + D^*PD)^{-1}(D^*PB + C^*P) + M^*M\}dt - d\mathcal{M} = 0.$$

$P_T = M_1^* M_1$

où $\mathcal{M}$ est une martingale de carré intégrable a une solution unique dans l'espace des processus $\tilde{P}$ adaptés bornés cadlag à valeurs dans $V \otimes V$ tels que

$$\sup_{(\omega,t)} \text{ess} \, \| (N + D^* \tilde{P} D)^{-1} \| < +\infty \tag{2.75}$$

$\mathcal{M}$ est alors une martingale d'opérateurs auto-adjoints, et P est à valeurs auto-adjointes et positives.

<u>Preuve</u> : Nous reprenons la démonstration de [2].

(2.74) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} dP &= \varphi_t(P)dt + d\mathcal{M} \\ P_T &= M_1^* M_1 \end{aligned} \tag{2.76}$$

On pose :

$$R = \frac{\lambda}{2 \sup_{(\omega,t)} \text{ess} \, \| D \|^2} \tag{2.77}$$

Soit P' un opérateur auto-adjoint positif.

Si P est un opérateur tel que :

$$\| P - P' \| \leqslant R \tag{2.78}$$

alors $N + D^* PD$ a $dP \otimes dt$ p.s. un inverse, et de plus :

$$\| (N + D^* PD)^{-1} \| \leqslant \frac{2}{\lambda} \tag{2.79}$$

Pour prouver cette assertion, il suffit de montrer que :

$$\| D^*(P - P')D \| < \| (N + D^* P' D)^{-1} \|^{-1} \tag{2.80}$$

Soit S la racine carré auto-adjointe et positive de N

Alors :

$$N + D^* P' D = S(I + S^{-1} D^* P' D S^{-1})S \tag{2.81}$$

et donc :

$$(2.82)\qquad \|(N+D^*P'D)^{-1}\| \leq \|S^{-1}\|^2\,\|(I+S^{-1}D^*P'DS^{-1})^{-1}\|$$

Or comme N^{-1} est auto-adjoint, on a :

$$(2.83)\qquad \|N^{-1}\| = \|S^{-1}S^{-1*}\| = \|S^{-1}\|^2$$

De plus comme $S^{-1}D^*P'DS^{-1}$ est auto-adjoint et positif, sa plus petite valeur propre est ≥ 0. La plus grande valeur propre de $(I+S^{-1}D^*P'DS^{-1})^{-1}$ est donc ≤ 1. On en déduit :

$$(2.84)\qquad \|(N+D^*P'D)^{-1}\| \leq \|N^{-1}\|$$

Donc :

$$(2.85)\qquad \|(N+D^*P'D)^{-1}\|^{-1} \geq \|N^{-1}\|^{-1} \geq \lambda$$

Si P vérifie (2.78), alors :

$$(2.86)\qquad \|D^*(P-P')D\| < \frac{\lambda}{2}$$

et comme λ est >0, $\frac{\lambda}{2} < \lambda$.

Alors nécessairement :

$$(2.87)\qquad \|(N+D^*PD)^{-1}\| \leq \frac{\|(N+D^*P'D)^{-1}\|}{1-\|(D^*(P-P')D\|\,\|(N+D^*P'D)^{-1}\|}$$

$$\leq \frac{2}{\lambda}$$

(2.79) est bien démontré.

Pour $\alpha > 0$ et pour $\mathcal{P}$ F_T-mesurable borné, soit $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des processus cadlag adaptés sur $[T-\alpha,T]$ à valeurs dans $V \otimes V$ tels que :

$$(2.88)\qquad \|P_t - {}^1\mathcal{P}\| \leq R$$

avec

$$(2.89)\qquad {}^1\mathcal{P}_t = E^{F_t}\mathcal{P}\,.$$

On munit $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$ de la distance :

$$(2.90) \qquad d(P,P') = \sup\text{ess} \sup_{T-\alpha \leqslant t \leqslant T} \|P_t - P'_t\|$$

Si $\mathcal{P}$ est à valeurs auto-adjointes et positives, alors (2.78)-(2.79) montre qu'il existe une constante $M(\mathcal{P})$ telle que si $P \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, alors :

$$(2.91) \qquad \|\varphi_t(P_t)\| \leqslant M(\mathcal{P}) \quad dP \otimes dt \quad \text{p.s.}$$

De plus si C est une constante dont la valeur sera définitivement fixée <u>ultérieurement</u> , telle que $\sup\text{ess} \|M_1^* M_1\| \leqslant C$; on a :

$$(2.92) \qquad \sup M(\mathcal{P}) \leqslant M < +\infty$$

$$\mathcal{P} \text{ autoadjoint} \geqslant 0$$

$$\|\mathcal{P}\| \leqslant C$$

De même le calcul immédiat de la dérivée de $\varphi_t(P)$ en P montre qu'il existe $k > 0$ tel que si $\mathcal{P}$ est auto-adjoint et positif et si $\|\mathcal{P}\| \leqslant C$, si P et P' sont dans $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, alors :

$$(2.93) \qquad \|\varphi_t(P_t) - \varphi_t(P'_t)\| \leqslant k \|P_t - P'_t\| \quad dP \otimes dt \quad \text{p.s.}$$

Enfin $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$ est un espace métrisable complet.

Soit alors $\mathcal{P} = M_1^* M_1$. Nécessairement, on a :

$$(2.94) \qquad \|M_1^* M_1\| \leqslant C.$$

On pose :

$$(2.95) \qquad \alpha = \frac{R}{M}$$

Soit G l'application qui à $\tilde{P} \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$ associe $\tilde{Q}$ par :

$$(2.96) \qquad \tilde{Q}_t = {}^1\!\left(\mathcal{P} - \int_t^T \varphi_s(\tilde{P}_s)\,ds\right)$$

$\tilde{Q}$ étant la projection optionnelle d'un processus borné cadlag est borné cadlag par [3]-IV-T 28.

$\tilde{Q}$ est dans $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$. En effet :

$$(2.97) \qquad \| (Q - {}^{1}\mathcal{P}) \| \leqslant \frac{R}{M} M(\mathcal{P}) \leqslant R$$

Pour $\tilde{P}$ et $\tilde{P}'$ dans $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, on a :

$$(2.98) \qquad \| (G(\tilde{P}) - G(\tilde{P}'))_t \| \leqslant k^1 (\int_t^T \| \tilde{P} - \tilde{P}' \| ds)$$

De (2.98), on tire :

$$(2.99) \qquad \| (G(\tilde{P}) - G(\tilde{P}'))_t \| \leqslant k(T-t) d(\tilde{P}, \tilde{P}')$$

En itérant G , il vient :

$$(2.100) \qquad \| (G^{(2)}(\tilde{P}) - G^{(2)}(\tilde{P}'))_t \| \leqslant k^2 d(\tilde{P}, \tilde{P}') \int_t^T (T-s) ds$$

ou encore

$$(2.101) \qquad \| (G^{(2)}(\tilde{P}) - G^{(2)}(\tilde{P}'))_t \| \leqslant k^2 \frac{(T-t)^2}{2\,!} d(\tilde{P}, \tilde{P}')$$

On aura de même :

$$(2.102) \qquad \| (G^{(n)}(\tilde{P}) - G^{(n)}(\tilde{P}'))_t \| \leqslant \frac{k^n (T-t)^n}{n\,!} d(\tilde{P}, \tilde{P}')$$

et donc :

$$(2.103) \qquad d(\dot{G}^{(n)}(\tilde{P}), G^{(n)}(\tilde{P}')) \leqslant \frac{(k^n \alpha)^n}{n!} d(\tilde{P}, \tilde{P}')$$

Pour n assez grand, $\frac{(k\alpha)^n}{n!}$ est < 1 . $G^{(n)}$ est donc une contraction.

G a un point fixe unique dans $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, noté P qui est bien solution de (2.74).

Soit (Ω^2, F^2, P^2) l'espace des fonctions continues définies sur R^+ à valeurs dans R^m , muni de la mesure brownienne P^2, où F^2 a été complétée pour les négligeables de P^2 . Soit $\{F_t^2\}$ la filtration canonique de Ω^2 , complétée par les négligeables de P^2 .

w désigne l'élément générique de Ω^2 .

Soit (Ω,F,P) l'espace $(\Omega^1 \times \Omega^2,(F^1 \otimes F^2)^*,P^1 \otimes P^2)$

On munit Ω de la filtration

$$F_t = (F_t^1 \otimes F_{t-T+\alpha}^2)^{*+} \quad (t \geqslant T-\alpha)$$

(où le signe $*+$ signifie qu'on a complété et régularisé à droite la filtration considérée).

Soit C_2 la constante définie à la proposition II.4 pour le problème de contrôle posé sur (Ω,F,P) . On prend alors $C = C_2$. Soit P la solution unique de (2.74) dans $K_{\mathcal{P}}^{\alpha}$ (où α dépendait de C).

$$(2.104) \qquad \mathcal{M}_t = {}^1(M_1^* M_1 - \int_{T-\alpha}^{T} \varphi_s(P_s)ds)$$

(où ^{1} est la projection optionnelle relativement à $(\Omega^1,F_t^1,P^1))$ est une martingale cadlag bornée relativement à $\{F_t^1\}$ mais aussi à $\{F_t\}$.

Soit en effet A une partie de $\Omega^1 \in F_t^1$ et B une partie de $\Omega^2 \in F_{t-T+\alpha}^2$

Alors pour $t' \geqslant t$, on a :

$$(2.105) \qquad \int_{\Omega} 1_A 1_B \mathcal{M}_{t'} d(P^1 \otimes P^2) = \int_{\Omega^1} 1_A \mathcal{M}_{t'} dP^1 \int_{\Omega^2} 1_B dP^2$$

$$= \int_{\Omega} 1_A 1_B \mathcal{M} dP^1 \otimes dP^2$$

$\mathcal{M}_t$ est donc une martingale relativement à F_t.

Soit alors $t < t'$ et $E \in (F^1_t \otimes F^2_{t-T+\alpha})^{*+}$

Alors pour $t < t'' < t'$, $E \in (F^1_{t''} \otimes F^2_{t''-T+\alpha})^*$ et donc :

$$(2.106) \qquad \int_\Omega 1_E \mathcal{M}_{t'} d(P^1 \otimes P^2) = \int_\Omega 1_E \mathcal{M}_{t''} d(P^1 \otimes P^2)$$

Comme $\mathcal{M}_{t''}$ est cad sur Ω^1 et donc sur Ω, on peut passer à la limite dans (2.106) quand $t'' \downarrow t (t'' > t)$ et il vient :

$$(2.107) \qquad \int_\Omega 1_E \mathcal{M}_{t'} d(P^1 \otimes P^2) = \int_\Omega 1_E \mathcal{M}_t d(P^1 \otimes P^2)$$

$\mathcal{M}_t$ est bien une martingale sur (Ω, F_t, P) (dans [2], on ne se fatiguait pas autant !).

Comme w et $\mathcal{M}_t$ sont des martingales indépendantes, $\mathcal{M}$ est orthogonale à $w_1, \dots w_m$ i.e. $\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_{T-\alpha} \in W^\perp$.

On va maintenant vérifier que P_t est précisément l'opérateur défini à la proposition II.3. Pour $s \in [T-\alpha, T]$, et $h \in L^s_2$ (relativement à l'espace Ω), soit x la solution de :

$$(2.108) \qquad \begin{aligned} dx &= A - C(N + D^*PD)^{-1}(C^*P + D^*PB)\}x dt \\ &\quad + \{B - D(N + D^*PD)^{-1}(C^*P^- + D^*P^-B)\}x^- dw \\ x_s &= h \end{aligned}$$

Grâce au Théorème I.1, (2.108) a une solution unique, puisque tous les opérateurs linéaires intervenant dans (2.108) restent bornés.

On va maintenant montrer que $(x, -Px)$ est solution du système (2.13) (avec f et g nuls), ou encore que $-Px$ est solution de (2.4).

Les calculs – qui ne sont plus ici formels – s'effectuent comme au Théorème II.4.

En particulier :

(2.109) $$H = -\bar{P}\{B - D(N + D^{*}\bar{P}D)^{-1}(D^{*}P^{-}B + C^{*}P^{-})\}x^{-}$$

(2.110) $$M_t = -\int_{T-\alpha}^{t} \langle d\mathcal{M}, x^{-} \rangle$$

(2.111) $$p_{t-\alpha} = -P_{T-\alpha}x_{T-\alpha}$$

Comme $x \in C_2^T$, $H \in (L_{22})^m$ et $p_{T-\alpha} \in L_2^{T-\alpha}$ De plus, on a :

(2.112) $$P_t x_t = P_{T-\alpha}x_{T-\alpha} + \int_{T-\alpha}^{t} (-M^{*}Mx - A^{*}Px + B^{*}H)dt$$

$$- \int_{T-\alpha}^{t} Hdw - M_t$$

Comme $x \in C_2^T$, comme P reste uniformément borné et comme $\int_{T-\alpha}^{t} Hdw \in W$ on vérifie que M_t est une martingale de carré intégrable.

$(x, -Px)$ est bien solution du système (2.13). On applique alors la Proposition II.4 : P est à valeurs $d(P^1 \otimes P^2)$ p.s. autoadjointes $\geqslant 0$ et de plus $\|P_t\| \leqslant C_2$ $d(P^1 \otimes P^2)$ p.s et en particulier :

(2.113) $$\|P_{T-\alpha}\| \leqslant C_2 \quad d(P^1 \otimes P^2) \quad \text{p.s.}$$

On en déduit que dP^1 p.s., P est à valeurs auto-adjointes et positives, et que : (2.114) $\|P_{T-\alpha}\| \leqslant C_2$ dP^1 p.s.

On peut donc itérer l'opération, et en un nombre fini d'étapes atteindre 0 .

Si P est une autre solution de (2.74), on vérifie que $(x, -Px)$ est encore solution du système (2.13), et donc que le processus P_t coïncide avec le processus défini à la Proposition II.3.

Il y a donc bien unicité.

Enfin P_t est à valeurs auto-adjointes positives.

En effet pour tout t on a :

(2.115) $\quad P_t = P_t^*.$

Comme P_t et P_t^* sont continus à droite on a bien p.s. $\quad P_t = P_t^*$.

De plus pour tout t, pour tout $h \in Q^n$, on a :

(2.116) $\quad \langle P_t h, h \rangle \geqslant 0.$

Comme P_t est continu à droite, on a, p.s., pour tout t et tout $h \in Q^n$

$$\langle P_t h, h \rangle \geqslant 0.$$

P_t est bien à trajectoires positives $\square$.

<u>Remarque</u> II.1: Si P' est une solution cadlag bornée à valeurs auto-adjointes positives, elle coïncide nécessairement avec P, puisqu'alors $(N + D^*PD)^{-1}$ reste uniformément borné. $\square$

b) <u>Un cas "simple" : Applications.</u>

$\Omega^1, F^1, P^1, F_t^1$ gardent la même signification que précédemment.

A,B,C,D,M,N,M_1 sont encore définis sur Ω_1.

(Ω^2, F^2, P^2) est un espace de probabilité complet, muni d'une filtration complète $\{F_t^2\}$ et continue à droite.

$w = (w_1 \ldots w_m)$ est une martingale de carré intégrable m-dimensionnelle définie sur (Ω^2, F^2, P^2) , telle que :

$$d < w_i, w_j > = \partial_{ij} dt. \tag{2.117}$$

(Ω,F,P) est l'espace $(\Omega^1 \times \Omega^2, F^1 \otimes F^2, P^1 \otimes P^2)$ muni de la filtration $(F_t^1 \otimes F_t^2)^{*+}$.

(x_o,f,g) est un élément de $L_2^o \times L_{21} \times (L_{22})^m$ (relativement à (Ω,F,P)).

On pose alors le problème de contrôle sur (Ω,F,P).

P_t désigne la solution unique de l'équation donnée par le Théorème II.6.

On a alors simplement :

<u>THEOREME</u> II.7. L'équation

$$\begin{aligned} dr &= \{(PC + B^*PD)(N + D^*PD)^{-1}C^* - A^*\}rdt \\ &+ (PC + B^*PD)(N + D^*PD)^{-1}D^* - B^*\}(Pg + h) \\ &- Pf\}dt + hdw + dM' \\ r_{T=0} & \end{aligned} \tag{2.118}$$

avec $(r_o, h, M') \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$ a une solution unique.

<u>Preuve</u> : Tous les coefficients sont bornés. On procède alors comme au Théorème II.2 $\square$.

On a enfin le résultat fondamental

<u>THEOREME</u> II.8. Le contrôle :

$$u = -(N + D^*P^-D)((C^*P^- + D^*P^-B)x^- + C^*r^- + D^*(P\bar{g} + h)) \tag{2.119}$$

est optimal.

<u>Preuve</u> : Il suffit en effet de vérifier que $(x, -Px - r)$ est solution du système (2.13).

On n'a pas ici $i \neq j$, $d[w_i, w_j] = 0$ et une vérification directe s'impose donc.

On montre comme au Théorème II.6 que $\mathcal{M}_t$ est une martingale bornée sur Ω.

Par rapport aux calculs effectués dans (2.55), la seule difficulté va être de montrer que la projection de $\int_0^t P(Bx^- + Du)dw_i$ sur $\underline{L}^{\bar{P}}_{w_j}$ est égale à 0 si $i \neq j$ et à $\int_0^t P^-(Bx^- + Du)dw_i$ si $i = j$.

Pour cela il suffit de montrer qu'on a l'égalité :

$$(2.120) \qquad \int_0^t P(Bx^- + Du)dw_i = \int_0^t P^-(Bx^- + Du)dw_i$$

i.e. que l'intégrale est en fait une intégrale prévisible. Pour montrer (2.120), il suffit de montrer que P et w_i n'ont pas de sauts communs, ou encore que $\mathcal{M}$ et w_i n'ont pas de sauts communs.

Or considérons l'espace (Ω, F, P) muni de la filtration $(F^1 \otimes F_t^2)^{*+}$

w_i est alors une martingale quasi continue à gauche, et $\mathcal{M}$ est un processus cadlag prévisible. $(w_i \neq w_i^-)$ est un ensemble mince réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêts totalement inaccessibles, et $(\mathcal{M} \neq \mathcal{M}^-)$ est un ensemble mince réunion dénombrable de temps d'arrêts prévisibles. Donc $(\mathcal{M} \neq \mathcal{M}^-) \cap (w_i \neq w_i^-)$ est évanescent.

On a donc bien (2.120).

Les calculs qui ne sont maintenant plus formels se poursuivent comme aux Théorème II.4 et II.6. $\square$.

Remarque II.2 L'utilisation du mouvement brownien, au Théorème II.6, nous a permis de généraliser les résultats à une classe beaucoup plus large de problèmes. $\square$

c) Un cas "difficile" : le cas des martingales à sauts.

Nous allons maintenant résoudre l'équation du Théorème II.4 dans un cas plus général que le cas précédent.

$\Omega^1, F_t^1, P^1, A, B, C, D, M, N, M_1$ gardent leur définition précédente.

m_1 désigne un entier $\leqslant m$.

$(w_1, \dots w_{m_1})$ est une famille de martingales de carré intégrable <u>sommes compensées de sauts</u> telles que :

a) (2.121) $d < w_i, w_i > = dt$.

b) (2.122) Si $i \neq j$ $d[w_i, w_j] = 0$.

c) (2.123) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout i, les sauts de w_i sont en module $> \varepsilon$.

Dans la suite l'opérateur p_i est l'opérateur J associée à $M = w_i$ $N = w_i$, $J = \bar{P}$, pour $i = 1 \dots m_1$ et désigne l'identité pour $i = m_1 + 1 \dots m$ (on justifiera cette convention ultérieurement).

On va alors considérer l'équation (2.49) en modifiant - en apparence - les conventions sur les points suivants

$$(2.124) \quad \begin{aligned} &\cdot\ \mathcal{H} = (\mathcal{H}_1 \dots \mathcal{H}_{m_1}) \in (L_{22})^{m_1} \\ &\cdot\ B^* \mathcal{H} = \sum_1^{m_1} B_i^* \mathcal{H}_i \\ &\cdot\ \int_0^t \mathcal{H} dw = \sum_1^{m_1} \int_0^t \mathcal{H}_i dw_i \end{aligned}$$

W_{m_1} désigne ici l'espace stable engendré par les w_i $(i=1 \dots m_1)$, $W_{m_1}^{\perp}$ son orthogonal (pour Ω^1).

La martingale formelle $\int_0^t \mathcal{H} . dw + \mathcal{M}_t$ peut se décomposer en $\mathcal{N}_t^c + \mathcal{N}_t^d$, où $\mathcal{N}^c$ est sa partie continue, et $\mathcal{N}^d$ sa partie totalement discontinue. $\mathcal{N}^d$ et P ont les mêmes sauts. Donc $\mathcal{N}^d$ est la somme compensée des sauts de P . De plus comme les w_i sont totalement discontinues, la projection de $\mathcal{N}^c$ sur W_{m_1} est nulle. On en déduit que $\int_0^t \mathcal{H} dw$ est la projection de $\mathcal{P}^d$ sur W_{m_1}.

De plus $\mathcal{P}_t^d$ peut se décomposer en $\sum_1^{m_1} \mathcal{P}_t^{d_i} + \mathcal{P}_t'$ où $\mathcal{P}_t^{d_i}$ est une somme compensée de sauts inclus dans des sauts de w_i et où $\mathcal{P}_t'$ n'a aucun saut commun avec les w_i : en effet les w_i ont des sauts différents, puisque si $i \neq j$, $d[w_i, w_j] = 0$

Donc $\mathcal{P}_t^{d_i}$ est la somme compensée des sauts de P communs avec w_i. Or par définition de l'intégrale optionnelle, on a :

$$(2.125) \qquad \mathcal{P}_t^{d_i} = \int_0^t \frac{\Delta P}{\Delta w_i} \, dw_i$$

ou $\frac{\Delta P}{\Delta w_i}$ est le processus optionnel égal :

- à $\frac{\Delta P}{\Delta w_i}$ si $|\Delta w_i| > 0$
- à 0 si $\Delta w_i = 0$.

Comme les w_i n'ont pas de sauts communs, par le Théorème I.8, la projection de $\mathcal{P}^{d_i}$ sur W_{m_1} est égale à $\int_0^t {}^{p_i}(\frac{\Delta P}{\Delta w_i}) dw_i$ On en déduit que formellement :

$$(2.126) \qquad \mathcal{H}_i = {}^{p_i}(\frac{\Delta P}{\Delta w_i})$$

Pour résoudre l'équation (2.49), il suffit donc de résoudre l'équation :

$$(2.127) \qquad dP + \{PA + A^*P + B^{*p}PB + B^{*p}\frac{\Delta P}{\Delta w} + \frac{{}^p\Delta P}{\Delta w_i}B - (B^{*p}PD + PC + \frac{{}^p\Delta P}{\Delta w}D)$$

$$(N + D^{*p}PD)^{-1}(D^{*p}PB + C^*P + D^{*p}\frac{\Delta P}{\Delta w}) + M^*M\}dt - d\mathcal{M}' = 0$$

$$P_T = M_1^* M_1$$

avec les conventions :

- $\mathcal{M}'$ est une martingale bornée.

$$B^{*p}PB = \sum_1^m B_i^{*p_i} PB_i$$

$$B^{*p} \frac{\Delta P}{\Delta w} = \sum_1^{m_1} B_i^{*p_i} \frac{\Delta P}{\Delta w_i}$$

$$B^{*p}PD = \sum_1^m B_i^{*p_i} PD_i$$

$$(2.128) \qquad {}^p\frac{\Delta P}{\Delta w} D = \sum_1^{m_1} {}^{p_i}\frac{\Delta P}{\Delta w_i} D_i$$

$$D^{*p}PD = \sum_1^m D_i^{*p}PD_i$$

et les conventions correspondantes pour les autres termes.

On a alors :

<u>THEOREME</u> II.9. L'équation (2.127) a une solution unique dans l'espace des processus bornés adaptés cadlag à valeurs dans $V \otimes V, \tilde{P}$, tels que :

$$(2.129) \qquad \text{sup ess} \, \| (N + D^{*p}\tilde{P}D)^{-1} \| < +\infty$$

$\mathcal{M}'$ est alors une martingale bornée d'opérateurs auto-adjoints, et P à valeurs autoadjointes et positives.

<u>Preuve</u> : (2.127) peut s'écrire :

$$(2.130) \qquad dP = \varphi_t(P, {}^pP)dt + d\mathcal{M}'$$

Reprenons alors les notations du Théorème II.6.

Si $P \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ est auto-adjoint et positif , et tel que $\|\mathcal{P}\| \leqslant C$

on a :

$$(2.131) \qquad \| P_t - {}^1\mathcal{P} \| \leqslant R$$

On en déduit :

$$(2.132) \qquad \| {}^pP - {}^{p1}\mathcal{P} \| \leqslant {}^p\| P - {}^1\mathcal{P} \| \leqslant R$$

et donc comme ${}^{p\,1}\mathcal{P}$ est $dP \otimes dt$ p.s. auto-adjoint et positif, on a, par (2.79):

$$(2.133) \qquad \| (N + D^{*\,p}PD)^{-1} \| \leqslant \frac{2}{\lambda}$$

De même on a pour $P \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$:

$$(2.134) \qquad \| {}^p\frac{\Delta P}{\Delta w} \| \leqslant \frac{2(C+R)}{\varepsilon} .$$

On en déduit que si $P \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, on a (2.91). On aura également la relation (2.92). De plus par la définition de φ_t on a, pour P et $P' \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$.

$$(2.135) \qquad \| \varphi_t(P, {}^pP) - \varphi_t(P', {}^pP') \| \leqslant k(\| P_t - P'_t \| + \sum_1^{m_1} {}^{p_i} \| P_t - P'_t \|)$$

On définit alors G comme en (2.96) et on vérifie que G applique $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$ dans lui-même. On a alors :

$$(2.136) \qquad \| G(\tilde{P}) - G(\tilde{P}'))_t \| \leqslant k\ {}^1\!\int_t^T (\| \tilde{P} - \tilde{P}' \| + {}^p\| \tilde{P} - \tilde{P}' \|) ds$$

Mais par définition $\int_{T-\alpha}^{t} {}^{p_i} \| \tilde{P} - \tilde{P}' \| ds$ est le compensateur prévisible de $\int_{T-\alpha}^{t} \| P - P' \| d[w_i, w_i]$

Donc on a :

$$(2.137) \qquad \| (G(\tilde{P}) - G(\tilde{P}'))_t \| \leqslant k\ {}^1\!\int_t^T \| \tilde{P} - \tilde{P}' \| (ds + \sum_1^{m_1} d[w_i, w_i])$$

De (2.137), on tire :

$$(2.138) \qquad \|(G(\tilde P)-G(\tilde P'))_t\| \leqslant k\; d(\tilde P,\tilde P')^1\int_t^T (ds + d[w,w])$$

ou encore :

$$(2.138)' \qquad \|(G(\tilde P)-G(\tilde P'))_t\| \leqslant k(m_1+1)(T-t)d(\tilde P,\tilde P')$$

En itérant , de (2.137), (2.138)', on tire :

$$(2.139) \qquad \|(G^{(2)}(\tilde P)-G^{(2)}(\tilde P'))_t\| \leqslant \frac{(k\;(m_1+1)(T-t))^2}{2!}\, d(\tilde P,\tilde P')$$

Plus généralement on montre :

$$(2.140) \qquad \|(G^{(n)}(\tilde P)-G^{(n)}(\tilde P'))_t\| \leqslant \frac{(k(m_1+1)(T-t))^n}{n!}\, d(\tilde P,\tilde P')$$

et donc :

$$(2.141) \qquad d(G^{(n)}(\tilde P),G^{(n)}(\tilde P')) \leqslant \frac{(k(m_1+1)\alpha)^n}{n!}\, d(\tilde P,\tilde P').$$

On raisonne alors comme au Théorème II.6 pour trouver une solution unique dans $K^{\alpha}_{\mathcal{F}}$ de (2.127).

On définit alors (Ω^2,F^2,F^2_t,P^2) , qui est l'espace canonique du mouvement brownien $m-m_1$ dimensionnel.

On vérifie alors comme en (2.108),(2.109), (2.110) que l'opérateur P est précisément l'opérateur associé au problème de contrôle sur Ω, avec naturellement $w = (w_1,\dots w_{m_1},\dots w_m)$.

P est donc à valeurs définies positives et $\|P_{T-\alpha}\| \leqslant C_2$.

On peut alors itérer l'opération un nombre fini de fois, et démontrer ainsi l'existence et l'unicité des solutions de (2.127) $\square$.

d) <u>Un cas difficile : applications</u>.

Ω^1,P^1,F^1,F^1_t gardent la même signification que précédemment. A,B,C,D,M,N,

M_1 sont encore définis sur Ω_1 , ainsi que $(w_1\dots w_{m_1})$ qui ont les mêmes propriétés qu'en c).

(Ω^2, F^2, P^2) est un espace de probabilité complet, muni d'une suite croissante complète et continue à droite de sous-tribus F_t^2 .

$(w_{m_1+1}, \dots . w_m)$ est une famille de martingales de carré intégrable sur (Ω^2, F^2, P^2), telles que :

$$(2.142) \qquad d < w_i, w_j > = \partial_{ij} dt \qquad i,j = m_1+1, \dots m.$$

On pose :

$$\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$$

$$F = (F^1 \otimes F^2)^*$$

$$F_t = (F_t^1 \otimes F_t^2)^{*+}$$

(x_o, f, g) est un élément de $L_2^o \times L_{21} \times (L_{22})^m$ (relativement à Ω).

P désigne la solution unique de l'équation (2.127) sur (Ω^1, F^1, P^1).

On a alors :

<u>THEOREME</u> II.10. L'équation (2.65) avec les conventions du Théoréme II.9 et les conventions supplémentaires :

$$i = 1 \dots m_1 \qquad \mathcal{K}_i = {}^{p_i}\left(1_{|\Delta w_i| > o} \frac{\Delta P}{\Delta w_i}\right)$$

$$i = m_1 + 1 \dots m \qquad \mathcal{K}_i = 0$$

avec $(r_o, h, M') \in L_2^o \times (L_{22})^m \times W^{\perp}$

a une solution unique.

<u>Preuve</u> : On raisonne comme pour le Théorème II.7. $\square$

On a enfin :

<u>THEOREME</u> II.11. Le contrôle optimal u est donné par la formule (2.73), avec les conventions du Théorème II.10.

<u>Preuve</u> : Il suffit de vérifier que $(x, -(Px+r))$ sont les états primal et dual du problème, quand u est donné par (2.73).

Comme on n'a pas nécessairement

$$d[w_i, w_j] = 0 \quad \text{pour} \quad i > m_1,\ j > m_1, \quad i \neq j \tag{2.143}$$

on n'est pas sous les conditions du Théorème II.4.

On va cependant vérifier que formellement tout se passe comme au Théorème II.4. Il suffit pour cela de calculer la projection sur W de $N_t^i = \int_0^t P(B_i x^- + D_i u)dw_i$

Les $\underline{w}_i$ sont mutuellement orthogonales. On peut donc projeter successivement sur chaque $\underline{L}_{w_j}^P$.

• Si $i \leqslant m_1$, $j \leqslant m_1$, comme $d[w_i, w_j] = 0$, , la projection de N^i sur $\underline{L}_{w_j}^{\overline{P}}$ est nulle, si $j \neq i$ et égale à $\int_0^t {}^{P_i}P(B_i x^- + D_i u)dw_i$ si $j = i$.

• Si $i \leqslant m_1$, $j > m_1$, on vérifie comme au Théorème II.8 que $d[w_i, w_j] = 0$, et donc que la projection de N^i sur $\underline{L}_{w_j}$ est nulle.

• Comme P et $w_i (i > m_1)$ ne peuvent avoir de sauts communs, on a pour $i > m_1$

$$\int_0^t P(B_i x^- + D_i u)dw_i = \int_0^t P^-(B_i x^- + D_i u)dw \tag{2.144}$$

L'intégrale est donc dans ce dernier cas une intégrale prévisible.

Comme au Théorème II.8, on est donc formellement ramené aux conditions du Théorème II.4. $\square$.

e) Extensions.

Le lecteur aura remarqué que la difficulté essentielle pour la résolution de l'équation (2.49) provient du terme $\mathcal{H}$, qui y intervient de manière quadratique. Pour résoudre (2.49) on a traité le cas où $\mathcal{H} = 0$ et le cas où $\mathcal{H}$ est une fonction linéaire continue de P.

Nous allons traiter rapidement le cas où seule une fonction linéaire de $\mathcal{H}$ apparaît dans (2.49).

On reprend les hypothèses de II.6.a).

Soit m_1 un entier tel que $0 \leqslant m_1 \leqslant m$.

$w = (w_1, \dots, w_{m_1})$ est une martingale de carré intégrable définie sur Ω_1, telle que

- (2.145) $\qquad d < w_i, w_j > = \delta_{ij} dt.$
- (2.146) $\qquad$ si $i \neq j \quad d[w_i, w_j] = 0$

Pour $i \leqslant m_1$, p_i est l'opérateur J associé à $M = w_i$, $N = w_i$, $J = \overline{P}$. Pour $i > m_1$, p_i est l'opérateur identité.

On suppose de plus

(2.147) $\qquad$ si $i \leqslant m_1$, $D_i = 0$

THEOREME II.12. L'équation :

$$(2.148) \qquad dP + \{PA + A^*P + B^{*p}PB + B^*\mathcal{H} + \mathcal{H}B - (B^{*p}PD + PC)(N + D^{*p}PD)^{-1}$$

$$(D^{*p}PB + C^*P) + M^*M\}dt - \mathcal{H}dw - d\mathcal{M} = 0$$

$$P_T = M_1^* M_1.$$

où $\mathcal{M} \in W^{\perp}$ et où $\int_0^t \mathcal{H}\, dw + \mathcal{M}_t$ est une martingale appartenant à BMO a une solution unique dans l'espace des processus adaptés bornés cadlag à valeurs dans $V \otimes V$ tels que :

$$(2.149) \qquad \underset{(\omega, t)}{\sup \operatorname{ess}} \|(N + D^{*p}PD)^{-1}\| < +\infty$$

P est alors à valeurs autoadjointes définies positives.

Preuve : Nous donnons une démonstration rapide, basée essentiellement sur un théorème de point fixe dans ... BMO.

Soit α tel que $0 < \alpha \leqslant 1$. Soit K'^{α} l'ensemble des classes de processus prévisibles tels que :

$$(2.150) \qquad \|\mathcal{H}\|_{\alpha} = \sup \text{ess} \Big(\sup_{T-\alpha \leqslant t \leqslant T} {}^1\!\int_t^T |\mathcal{H}|^2 dt\Big)^{1/2} < +\infty$$

On munit K'^{α} de la norme (2.150). K'^{α} est alors un espace de Banach.

On choisit alors $\mathcal{P}$ comme dans la preuve du Théorème II.6. $K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$ garde le même sens qu'au Théorème II.6, et est munit de la métrique d .

R est défini par (2.77).

(2.148) s'écrit :

$$(2.151) \qquad \begin{cases} dP = \varphi_t(P_t, {}^pP_t, \mathcal{H}_t)dt + \mathcal{H}\, dw + d\mathcal{M}. \\ P_T = M_1^* M_1. \end{cases}$$

Il existe $M(\mathcal{P})$ et k tel que si $P \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, on a :

$$(2.152) \qquad |\varphi_t(P, {}^pP, \mathcal{H}) \leqslant M(\mathcal{P}) + k|\mathcal{H}|.$$

Si C est une constante > 0, on a de plus :

$$(2.153) \qquad \sup_{\|\mathcal{P}\| \leqslant C} M(\mathcal{P}) < M < +\infty .$$

De même si $\|\mathcal{P}\| \leqslant C$, si P et $P' \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}}$, on a :

$$(2.154) \qquad |\varphi_t(P, {}^pP, \mathcal{H}) - \varphi_t(P', {}^pP', \mathcal{H}')| \leqslant k'(|P-P'| + {}^p|P-P'| + |\mathcal{H} - \mathcal{H}'|).$$

Si $\|\mathcal{P}\| \leqslant C$, soit G'_1 l'application qui à $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{H}}) \in K^{\alpha}_{\mathcal{P}} \times K'^{\alpha}$ associe le processus $\tilde{Q}_t$ par :

$$(2.155) \qquad \tilde{Q}_t = {}^1\Big(\mathcal{P} - \int_t^T \varphi(\tilde{P}, {}^p\tilde{P}, \tilde{\mathcal{H}})ds\Big) \quad T-\alpha \leqslant t \leqslant T$$

$\tilde{Q}$ est alors un processus cadlag. De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$(2.156) \qquad \|\tilde{Q}_t - {}^1\mathcal{P}_t\| \leqslant {}^1\!\int_t^T |\varphi(P, {}^pP, \mathcal{H})| ds \leqslant M(T-t) + k(T-t)^{1/2} \|\tilde{\mathcal{H}}\|_{\alpha}$$

Par [7], p 334, ${}^1\mathcal{P}$ appartient à BMO, et de plus

$$(2.157)\qquad \|\mathcal{P}\|_{BMO} \leqslant \sqrt{5}\, C$$

Par [7], p 334, $M_t = \tilde{Q}_t - \int_{T-\alpha}^{t} \varphi(\tilde{P}, {}^p\tilde{P}, \mathcal{K})ds$ est un élément de BMO, et de plus :

$$(2.158)\qquad \|M\|_{BMO} \leqslant \sqrt{5}\, C + 2\sqrt{3}(M\alpha + k\sqrt{\alpha}\, \|\tilde{\mathcal{K}}\|_{\alpha})$$

Il suffit en effet d'exprimer $\int_t^T \tilde{\varphi}(\tilde{P}, {}^p\tilde{P}, \tilde{\mathcal{K}})ds$ comme différence de deux potentiels gauches, et d'utiliser la majoration (2.156).

On décompose alors M suivant $L_2^{T-\alpha}$, W et $W^{\perp}$:

$$(2.159)\qquad M_t = M_{T-\alpha} + \int_{T-\alpha}^{t} \tilde{K}dw + \mathcal{M}_t.$$

Par la définition de BMO, on déduit de (2.158) que comme $\mathcal{M} \in W^{\perp}$, on a

$$(2.160)\qquad \|\tilde{K}\|_{\alpha} \leqslant \|M\|_{BMO}$$

ou encore :

$$(2.161)\qquad \|\tilde{K}\|_{\alpha} \leqslant \sqrt{5}\, C + 2\sqrt{3}(M\alpha + k\sqrt{\alpha}\, \|\tilde{\mathcal{K}}\|_{\alpha}).$$

Si $(\tilde{P}', \tilde{\mathcal{K}}') \in K^{\alpha}_{\mathcal{S}} \times K'^{\alpha}$, et si $\tilde{Q}'$ et $\tilde{K}'$ sont les processus construits comme précédemment à partir de $(\tilde{P}', \tilde{\mathcal{K}}')$, on a :

$$(2.162)\qquad \|\tilde{Q} - \tilde{Q}'\|_t \leqslant k''(\alpha d(\tilde{P}, \tilde{P}') + \sqrt{\alpha}\, \|\tilde{\mathcal{K}} - \tilde{\mathcal{K}}'\|_{\alpha})$$

$$(2.163)\qquad \|\tilde{K} - \tilde{K}'\|_{\alpha} \leqslant 2\sqrt{3}\, k''(\alpha d(\tilde{P}, \tilde{P}') + \sqrt{\alpha}\, \|\tilde{\mathcal{K}} - \tilde{\mathcal{K}}'\|_{\alpha}).$$

On pose

$$(2.164)\qquad M' = 2(\sqrt{5}\, C + 2\sqrt{3}\, M).$$

On peut choisir $\alpha \leqslant 1$ et > 0 assez petit pour que :

$$2\sqrt{3}\, k\sqrt{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$(2.165)\qquad 2\sqrt{3}\, k''(2\alpha + 2\sqrt{\alpha}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

$$M\alpha + k\sqrt{\alpha}\, M' \leqslant R.$$

Soit $B'^{\alpha}_{M'}$ la boule fermée de rayon M' et de centre O dans K'^{α}.

Alors grâce à (2.156) (2.160)-(2.165), on vérifie que l'application

$$(2.166) \qquad (\tilde{P},\tilde{\mathcal{K}}) \longrightarrow (\tilde{Q},\tilde{K})$$

applique $K^{\alpha}_{\mathcal{S}} \times B'^{\alpha}_{M'}$ dans $K^{\alpha}_{\mathcal{S}} \times B'^{\alpha}_{M'}$, et que c'est une contraction. Elle a donc un point fixe. On a donc résolu localement (2.148) (on vérifie incidement que l'itération (2.103) est en fait inutile).

Soit $(w_{m_1+1} \ldots\ldots w_m)$ un mouvement brownien "indépendant" de Ω^1 construit comme au Théorème II.6. On considère alors le problème de contrôle sur un espace de probabilité produit sur l'intervalle $[T-\alpha,T]$. Soit C_1 la constante définie à la proposition II.4.

On prend alors $C=C_1$. Dans ces conditions, il reste à vérifier que sur $[T-\alpha,T]$, $(x,-Px)$ est solution du système (2.13) avec f et g nuls. P résoud formellement l'équation (2.49). Il faut donc vérifier que u donné formellement par (2.73) et H donnée formellement par (2.57) sont dans L^U_{22} et $(L_{22})^m$.

Soit $x_{T-\alpha} \in L^2_{T-\alpha}$. On étudie le problème de contrôle relativement à $x_{T-\alpha}$. Or comme $D_1=D_2=\ldots D_{m_1}=0$, le contrôle optimal formel u est donné par (2.73) :

$$(2.167) \qquad u=-(N+D^{*p}P\,D)^{-1}(D^{*p}P\,B+C^{*}P^{-})x^{-}.$$

Comme P est borné, grâce au Théorème I.1 on vérifie que $u \in L^U_{22}$.

Par (2.57), on a :

$$(2.168) \qquad H_i=-(\mathcal{K}_i\,x^{-}+{}^{p_i}P(B_i x^{-}+D_i u)).$$

Comme x^{-} est localement borné, on vérifie immédiatement que $H\in(L_{22})^m_{loc}$. De même $\int_{T-\alpha}^{t} d\mathcal{M}\,x^{-}$ est dans $W^{\perp}_{loc}$. De (2.55), on déduit que M est dans $W^{\perp}_{loc}$, puisque P est un processus borné. Or comme $p=-Px$, $p\in C^T_2$. Enfin p est solution de l'équation (2.4), sans toutefois qu'on sache a priori si $(H,M)\in(L_{22})^m\times W^{\perp}$. Or par le Théorème I.3, on sait que cette dernière condition est vérifiée. Le processus P est donc bien le processus défini à la Proposition II.3 sur l'intervalle $[T-\alpha,T]$.

Par la Proposition II.4, $P_{T-\alpha}$ est autoadjoint ≥ 0 et $\|P_{T-\alpha}\| \leq C_1$.

On peut donc itérer l'opération et atteindre 0 en un nombre fini d'étapes. L'unicité de la solution de (2.148) se démontre comme pour le Théorème II.6. $\square$

Pour résoudre un problème de contrôle général à partir du Théorème II.12, on procède comme précedemment. Donnons-nous en effet un deuxième espace probabilisé filtré Ω^2, sur lequel est définie une martingale de carré intégrable $(w_{m_1+1},\ldots w_m)$ telle que

$$(2.169) \quad d\langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij}dt$$

On se place alors sur l'espace produit $\Omega^1\times\Omega^2$. On peut alors résoudre le problème de contrôle en utilisant P quand f et g sont nuls.

Si f et g sont non nuls, supposons les bornés. L'équation (2.65) a une solution unique par le Théorème I.2. Par (2.68), on vérifie alors que $H\in(L_{22})^m_{loc}$. On vérifiera de même que $M\in W^{\perp}_{loc}$. Comme $p = -(Px + r)$ est dans C_2^T , en réutilisant le Théorème I.3, on voit que $(H,M)\in(L_{22})^m \times W^{\perp}$. Le problème de contrôle est bien résolu.

CHAPITRE III

LE CONTROLE LINEAIRE QUADRATIQUE : LE CAS GENERAL

Nous allons examiner le cas où dans l'équation linéaire qui est contrôlée apparaissent des intégrales optionnelles, et où le contrôle n'est plus nécessairement prévisible. Les résultats donnés ici englobent presque tous les résultats de la section II.

On reprend les hypothèses du chapitre I.1 et on fait l'hypothèse supplémentaire :

(3.1) si $i \neq j$, $d[w_i, w_j] = 0$.

1- Une équation différentielle stochastique optionnelle.

V est un espace vectoriel de dimension finie.

$A, (B_i)_{i=1\dots m}$ sont une famille de processus optionnels bornés à valeurs dans $V \otimes V$.

Pour $x_0 \in L_2^0$, $u \in L_{21}$, $v = (v_1 \dots v_m) \in L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \dots \times L_{22}^{[w_m,w_m]}$ et $M \in \underline{L}$, on considère l'équation :

$$(3.2) \qquad \begin{cases} dx = (Ax + u)dt + (Bx^- + v)dw + dM \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

i.e x doit vérifier :

$$(3.3) \qquad x_t = x_0 + \int_0^t (Ax + u)dt + \sum_{i=1}^m \int_0^t (B_i x^- + v)dw_i + M_t.$$

Notons qu'ici les intégrales stochastiques dans (3. 3) sont optionnelles.

On a alors :

THEOREME III.1. L'équation (3.2) a une solution unique à trajectoires cadlag. De plus l'application $(x_0, u, v, M) \longrightarrow x$ est linéaire continue de

$L_2^o \times L_{21} \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \ldots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \underline{L}$ dans C_T^2. La norme de cette application reste uniformément bornée quand A,B,T restent uniformément bornés.

Preuve : On raisonne comme pour le Théorème I.1.

Les majorations (1.11) et (1.13) sont conservés.

La majoration (1.12) devient :

$$(3.4) \qquad E\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t (Bx^- + v).dw\Big|^2\Big) \leqslant 4E\int_0^T |Bx^- + v|^2 d[w,w]$$

$$\leqslant k''\Big(E\int_0^T |x^-|^2 ds + E\int_0^T |v|^2 d[w,w]\Big)$$

On peut alors continuer le raisonnement comme au Théorème I.1. $\square$.

2- Calcul stochastique élémentaire

On va montrer l'analogue de la Proposition I.1.

Remarquons que les w_i sont quasi-continues à gauche puisque

$$(3.5) \qquad d < w_i, w_i > = dt.$$

On pose alors la définition suivante :

DEFINITION III.1. $\overset{o}{W}$ est l'espace des martingales M de carré intégrable arrêtées en T qui s'écrivent :

$$(3.6) \qquad M_t = \int_0^t H_1 dw_1 + \ldots \int_0^t H_m . dw_m$$

avec $(H_1 \ldots . H_m) \in L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \ldots L_{22}^{[w\ ,w\ ]}$.

Comme les w_i sont quasi continues à gauche, et comme $d[w_i,w_j] = 0$ si $i \neq j$, on a par [7], p 275:

$$(3.7) \qquad E|M_T|^2 = E\int_0^T |H|^2 d[w,w].$$

On en déduit immédiatement que $\overset{o}{W}$ est fermé et stable au sens de [7], p 262.

Soit $\overset{o}{W}^{\perp}$ son orthogonal - faible ou fort - au sens de [7] p 261 dans $\underline{L}$.

On a immédiatement :

<u>PROPOSITION</u> III.1. Pour que $M \in \overset{o}{W}^{\perp}$, il faut et il suffit que :

$$[M,w_1] = [M,w_2] = \dots = [M,w_m] = 0. \tag{3.8}$$

<u>Preuve</u> : Pour que $M \in \overset{o}{W}^{\perp}$, il faut et il suffit que pour tout $(H_1 \dots H_m) \in L_{22}^{[w_1,w_1]} \dots \times L_{22}^{[w_m,w_m]}$, $[M,H.w]$ soit une martingale. On en déduit que pour tout $i = 1 \dots m$, $\langle M,w_i \rangle = 0$.

De plus $\int_0^t Hd[M,w]$ est une martingale. Si $\Delta M \Delta w_i$ n'est pas le processus nul sur $[0,T]$, soit S un temps d'arrêt tel que $P(S \leqslant T) > 0$ et que $(\Delta M \Delta w_i)_S \neq 0$.

On pose $T' = S \wedge T$. Soit H_i le processus optionnel $1_{t=T'} \operatorname{Sgn}(\Delta M \Delta w_i)_{T'}$. On a :

$$\int_0^T H_i d[M,w_i] = (\Delta M \Delta w_i)^2_{T'} \tag{3.9}$$

et donc $\int_0^T H_i d[M,w_i] \geqslant 0$ et est non nul. Il y a contradiction. □

Soit $(x_0, \dot{x}, H, M)$ et $(p_0, \dot{p}, H', M')$ deux éléments de $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \dots L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o}{W}^{\perp}$.

On pose :

$$\left\{ \begin{aligned} x_t &= x_0 + \int_0^t \dot{x} ds + \int_0^t H\, dw + M_t \\ p_t &= p_0 + \int_0^t \dot{p} ds + \int_0^t H' dw + M'_t \,. \end{aligned} \right. \tag{3.10}$$

On a alors l'équivalent de la Proposition I.1.

PROPOSITION III.2. Le processus N_T défini par

$$(3.11) \qquad N_t = \langle p_t, x_t \rangle - \langle p_o, x_o \rangle - \int_o^t (\langle \dot{p}, x_s \rangle + \langle p, \dot{x} \rangle) ds$$

$$- \int_o^t HH' d[w,w] - \langle M_t, M'_t \rangle$$

est une martingale uniformément intégrable nulle en 0.

Preuve : Les formules (1.24) et (1.25) restent vraies.

De plus comme les w_i sont quasi continues à gauche, on a par [7], p 276 :

$$(3.12) \qquad [\overset{k}{H_i} . w_i, \overset{k}{H'_j} . w_j] = \int_o^t \overset{k}{H_i} \overset{k}{H'_j} d[w_i, w_j]$$

La proposition en résulte. □.

3- Equations adjointes.

Soit $\overset{o}{\Phi}$ l'application linéaire qui à $(x_o, v, M) \in L_2^o \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \ldots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o\perp}{W}$ associe $x_T \in L_2^T$ où x est donné par le système (3.2), avec $u = 0$

p_i désigne l'opérateur d'espérance conditionnelle pour la mesure $d[w_i, w_i]$ par rapport à la tribu prévisible $\bar{P}$.

Soit $\overset{o}{\Psi}$ l'application linéaire qui à $(p_o, v', M') \in L_2^o \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \ldots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o\perp}{W}$ associe $p_T \in L_2^T$ où $p \in C_2^T$ est donné par :

$$(3.13) \qquad \begin{cases} dp = -(A^* p + {}^pB^* v')dt + v'.dw + dM'. \\ p(0) = p_o. \end{cases}$$

(Rappelons que

$$(3.14) \qquad {}^pB^* v' = \sum_{i=1}^m {}^{p_i}B_i^* v'_i).$$

On a alors l'équivalent du Théorème I.2.

THEOREME III.2. $\overset{\circ}{\Phi}$ et $\overset{\circ}{\Psi}$ sont deux opérateurs continus inversibles d'inverses continus et de plus :

$$\overset{\circ}{\Psi} = (\overset{\circ}{\Phi}{}^{*})^{-1} \tag{3.15}$$

Preuve : Appliquons la Proposition III.2 à x_t et p_t.

On a :

$$E < p_T,x_T > = E < p_o,x_o > + E\int_o^T (< p,Ax > - < A^*p + {}^pB^*v',x^- >)dt \tag{3.16}$$
$$+ E\int_o^T < v',v+Bx^- > d[w,w] + E < M_T',M_T >$$

Or par hypothèse, on a :

$$E\int_o^T < {}^pB^*v',x^- > dt = E\int_o^T < B^*v',x^- > d[w,w]. \tag{3.17}$$

On en déduit :

$$E < p_T,x_T > = E < p_o,x_o > + E\int_o^T < v,v' > d[w,w] + E < M_T',M_T > . \tag{3.18}$$

On en déduit comme pour le Théorème II.2 que $\overset{\circ}{\Phi}$ est injective.

Pour démontrer la surjectivité de $\overset{\circ}{\Phi}$, il suffit de décomposer $y + {}^1\tilde{x}_o$ dans (1.40) suivant $L_2^o,\overset{\circ}{W}$ et $\overset{\circ}{W}{}^{\perp}$ au lieu de le décomposer suivant L_2^o,W et $W^{\perp}$.

Enfin de (3.18), on déduit bien (3.15). □

On a enfin l'analogue du Théorème I.3 :

THEOREME III.3. Si $(p,v',M') \in C_2^T \times L_{22_{loc}}^{[w_1,w_1]} \cdots \times L_{22_{loc}}^{[w_m,w_m]} \times \overset{\circ}{W}{}^{\perp}_{loc}$ est solution de (3.13), alors $(v',M') \in L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \cdots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{\circ}{W}{}^{\perp}$.

Preuve : Grâce au Théorème III.2, la preuve est la même qu'au Théorème I.3. □

4 - Une formule de résolution de l'équation backward pour des martingales à sauts unité.

On va donner l'analogue des Théorèmes I.6 et I.7 (le cas où $w_1 \ldots w_m$ sont continues est identique au cas traité au Théorème I.5).

THEOREME III.4. Si pour tout $i=1 \dots M$, w_i est une martingale somme compensée de sauts d'amplitude $+1$, et s'il existe M tel que :

$$(3.19) \quad \sup_{i=1\dots m} \|(I+B_i^*)^{-1}\| \leqslant M$$

alors l'équation

$$(3.20) \quad \begin{aligned} & dZ = ZA^* dt + Z^- B^*.dw \\ & Z(0) = I \end{aligned}$$

a une solution unique à valeurs dans $V \otimes V$.

Z est à trajectoires cadlag et appartient à C_2^T.

Enfin Z est à valeurs inversibles.

Preuve : Remarquons tout d'abord que dans (3.20), l'intégrale stochastique est optionnelle. L'existence et l'unicité résultent alors du Théorème III.1.

On considère alors l'équation :

$$(3.21) \quad \begin{cases} dZ' = \{-A^* - {}^p((I+B^*)^{-1} - I)B^*\} Z' dt + ((I+B^*)^{-1} - I)Z'^- dw \\ Z'(0) = I \end{cases}$$

Par [7], p 303, on a :

$$(3.22) \quad Z'_t Z_t = I + \int_0^t Z' Z A^* dt + \int_0^t \overline{Z'} Z^- B^* dw + \int_0^t (-A^* - {}^p((I+B^*)^{-1} - I)B^*) Z' Z dt$$
$$+ \int_0^t ((I+B^*)^{-1} - I) Z'^- Z^- dw + \sum_{\Delta w_i \neq 0} ((I+B_i^*)^{-1} - I) Z'^- Z^- B_i^*$$

Or $\int_0^t ((I+B^*)^{-1} - I) Z'^- Z^- B^*.dw$ est la somme compensée des sauts apparaîssant dans la somme Σ du membre de droite de (3.22).

De plus par définition, on sait que $\int_0^t {}^p((I+B^*)^{-1} - I) Z_t'^- Z_t^- B_t^*) dt$ est le compensateur prévisible de la somme Σ (la vérification est immédiate par la propriété caractéristique du projecteur ^{p}).

On en déduit qu'en posant $U = Z'Z$, on a :

$$dU = (UA^* - A^*U)dt + {}^p[((I+B^*)^{-1} - I)(U^- B^* - B^* U^-)]dt + ((I+B^*)^{-1}\bar{U}(I+B^*) - \bar{U})dw \tag{3.23}$$

On vérifie que $U = I$ est solution unique de (3.23).

Z est donc inversible. □

On en déduit immédiatement:

<u>THEOREME</u> III.5. Si pour tout $i = 1 \dots m$, w_i est une martingale somme compensée de sauts d'amplitude $+1$, et s'il existe k tel que :

$$\sup_{i=1\dots m} \| (I + B_i^*)^{-1} \| \leqslant k \tag{3.24}$$

alors si $R_T \in L_2^T$, l'équation

$$\begin{aligned} &dp = -(A'p + {}^pB^*v')dt + v'.dw + M'_t \\ &p_T = R_T. \end{aligned} \tag{3.25}$$

a une solution unique telle que $(p_o, v', M) \in L_2^o \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \dots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o}{W}{}^{\perp}$.

De plus si Z_t est la solution de (3.20), on a :

$$p_t = Z_t^{-1}\ {}^1Z_T R_T. \tag{3.26}$$

<u>Preuve</u> : L'existence et l'unicité de la solution de (3.25) résulte du Théorème III.1.

Par la Proposition III.2, on sait que

$$Z_t p_t - \int_o^t (ZA^*p - Z(A^*p + {}^pB^*v'))dt - \int_o^t Z^- B^* v' d[w,w] \tag{3.27}$$

est une martingale.

De plus on sait que

$$\int_o^t Z^- B^* v' dw = \int_o^t Z^- B^* v' d[w,w] - \int_o^t Z^- {}^pB^* v' dt. \tag{3.28}$$

$Z_t p_t$ est donc une martingale locale. Comme elle est uniformément intégrable, c'est une martingale. Le Théorème en résulte. □

5- Le problème de contrôle.

H et U sont des espaces vectoriels de dimension finie.

- $(C_i)_{i=1..m}$ $(D_i)_{i=1...m}$ sont une famille de processus optionnels bornés

à valeurs dans $U \otimes V$.

- M est un processus optionnel borné à valeurs dans $V \otimes H$.

- N est un processus optionnel borné à valeurs autoadjointes de $U\otimes U$, tel qu'il

existe $\lambda > 0$ pour lequel pour tout $u \in U$, on ait :

$$(3.29) \qquad \langle Nu,u \rangle \geqslant \lambda |u|^2.$$

- M_1 est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $V \otimes H$ et

F_T-mesurable.

- f est un élément de L_{21}
- $g=(g_1...g_m)$ est un élément de $L_{22}^{[w_1,w_1]} \times ... \times L_{22}^{[w_m,w_m]}$
- x_o est un élément de L_2^o.

On pose la définition suivante :

DEFINITION III.2 dS est la mesure :

$$(3.30) \qquad dS = \frac{1}{m+1}(dt + \sum_{i=1}^{m} d[w_i,w_i])$$

d_o est la densité optionnelle $\frac{dt}{dS}$

Pour $i=1...m$, d_i est la densité optionnelle $\frac{d[w_i,w_i]}{dS}$.

L_{22}^U est l'ensemble des classes de processus optionnels u à valeurs dans U tel que :

$$(3.31) \qquad E\int_o^T |u|^2 dS < +\infty .$$

J désigne une tribu de $\Omega \times [0,+\infty[$ telle que $\overline{P} \subset J \subset \overline{O}$.

${}^J L_{22}^U$ est l'ensemble des éléments de L_{22}^U possédant un représentant J-mesurable.

j_S désigne l'opérateur d'espérance conditionnelle relativement à la tribu J pour la mesure dS.

Pour i=1...m (resp i=0) j_i est l'opérateur d'espérance conditionnelle relativement à la tribu J pour la mesure $d[w_i,w_i]$ (resp dt).

Par [4]-IV- T66, on sait que pour tout processus optionnel, on peut trouver un processus prévisible qui coïncide avec ce processus sauf sur une famille dénombrable de temps d'arrêts. Pour $u \in L_{22}^U$, ${}^{j_o}u$ est donc la classe d'équivalence dans L_{22} de U.

De plus pour $i = 1...m$, on a :

$$ {}^{j_i}H = \frac{{}^{j_S}d_i H}{{}^{j_S}d_i} \tag{3.32} $$

En particulier

$$ {}^{p_i}H = {}^{p_S}d_i H. \tag{3.33} $$

On pose alors la définition suivante :

<u>DEFINITION</u> III.3. Pour $u \in L_{22}^U$, soit $x \in C_2^T$ la solution unique au sens du Théorème III.1 de

$$ \begin{aligned} &dx = (Ax + {}^{p_S}(Cu) + f)dt + (Bx^- + Du + g)dw \\ &x(0) = x_o \end{aligned} \tag{3.34} $$

Le problème linéaire quadratique (J) est la recherche de $u \in {}^J L_{22}^U$ minimisant:

$$ u \longrightarrow \overset{o}{I}(u) = E\int_0^T |Mx|^2 dt + E\int_0^T < Nu,u > dS + E|M_1 x_T|^2. \tag{3.35} $$

La forme du système (3.34),(3.35) doit être justifiée. Remarquons tout d'abord qu' un contrôle optionnel permet de donner des impulsions aux systèmes aux instants de sauts des martingales.

En prenant en compte ces impulsions dans $\overset{o}{I}$, nous nous garantissons que la taille et le nombre des impulsions ne sera pas démesuré.

L'introduction de ${}^{p_S}Cu$ peut paraître plus étonnante. Sa justification est en fait essentiellement de caractère fonctionnel. De plus si $C = Cd_o$, ${}^{p_S}Cu$ est alors la classe de Cu dans L_{22} ; dans ce cas, la dérive de x ne dépend pas des valeurs de u sur les sauts des w_i, ce que le lecteur pourrait trouver plus "intuitif".

Malheureusement même dans ce dernier cas le problème dual au sens de [1] de ce problème - qui sera le thème d'un autre article - fait apparaître le projecteur ${}^{p}S$ dans la dérivée et pas sa forme trivialisée ${}^{p_S}d_o$.

Enfin J peut être choisi parmi les grandes - et les petites - tribus de la théorie générale des processus.

Généralement on prendra $J = \bar{O}$ ou $J = \bar{P}$.

La tribu des accessibles ne présente guère d'intérêt ici : en effet en modifiant un processus u accessible sur une famille dénombrable de temps accessibles, on obtient un processus u' prévisible. Comme les w_i sont quasi continues à gauche, les temps de sauts sont totalement inaccessibles. $(u \neq u')$ est donc négligeable pour dS.

Une tribu J plus intéressante est la tribu engendrée par les processus optionnels tels que pour une famille d'arrêts $\mathcal{C}$ pour tout $T \in \mathcal{C}$, u_T est $\mathfrak{F}_T$-mesurable. Ainsi on peut prendre pour J la tribu des optionnels stricts de Le Jan.

Si tous les coefficients $A,B,\dots,M,N,f,g$ sont prévisibles et si u est prévisible, l'équation (3.34) coïncide avec l'équation (2.1), et de plus $\mathring{I}(u)$ coïncide avec $J(u)$.

6- Existence d'une solution.

THEOREME III.6. Le problème linéaire quadratique (J) a une solution unique.

Preuve : On procède comme au Théorème II.1 en utilisant les résultats de continuité du Théorème III.1. □

7- Des conditions nécessaires et suffisantes.

On va maintenant écrire des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

On a alors :

THEOREME III.7. Pour que $u \in {}^{J}L^{U}_{22}$ soit solution du problème linéaire quadratique (J), il faut et il suffit que si p est la solution unique de :

$$(3.36) \qquad dp = (M^*Mx - A^*p - {}^{p}B^*H)dt + H.dw + dM$$
$$p_T = -M_1^*M_1x_T$$

avec $(p_o,H,M) \in L^o_2 \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \ldots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o}{W}{}^{\perp}$

alors

$$(3.37) \qquad ({}^{j}S_N)u = ({}^{j}S_{C^*})p^- + {}^{j}S(dD^*H) \quad dS \text{ p.p.}$$

Preuve : On va encore calculer : $< \overset{o}{I}'(u),v-u >$.

Soient x^u_t et x^v_t les processus solutions de (3.34) pour les contrôles u et v.

On a :

$$(3.38) \qquad < \overset{o}{I}'(u),v-u > = 2E\int_0^T < M^*Mx^u,x^v-x^u > dt + 2E\int_0^T < Nu,v-u > dS$$
$$+ 2E < M_1^* M_1x^u_T,x^v_T-x^u_T >.$$

Comme en (2.7), et grâce au Théorème III.2, on vérifie immédiatement que le système :

$$(3.39) \qquad dp = (M^*Mx^u - A^*p - {}^{p}B^*H)dt + Hdw + dM$$
$$p_T = -M_1^* M_1x^u_T$$

avec $(p_o,H,M) \in L^o_2 \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \ldots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o}{W}{}^{\perp}$

a une solution unique.

Grâce à la Proposition III.2, on a :

$$(3.40)\qquad E < p_T, x_T^v - x_T^u > = E\int_0^T < M^* M_x^u - A^* p - {}^{p}B^* H, x^{v-} - x^{u-} > dt$$

$$+ E\int_0^T < p_t^-, A(x^v - x^u) + {}^{p}S\, C(v-u) > dt + E\int_0^T < H, B(x^{v-} - x^{u-})$$

$$+ D(v-u) > d[w,w].$$

Or par définition on a :

$$(3.41)\qquad E\int_0^T < {}^{p}\dot{B}^* H, x^{v-} - x^{u-} > dt = E\int_0^T < B^* H, x^{v-} - x^{u-} > d[w,w]$$

$$(3.42)\qquad E\int_0^T < p^-, {}^{p}S\, C(v-u) > dt = E\int_0^T < p^-, C(v-u) > dS$$

En remplaçant $d[w_i, w_i]$ par $d_i dS$, il vient :

$$(3.43)\qquad < \overset{o}{I}'(u), v-u > = 2E\int_0^T < Nu - C^* p^- - dD^* H, v-u > dS$$

Par le Théorème 0.1, on en déduit que pour que u soit solution du problème (J) il faut et il suffit que (3.36) soit vérifié $\square$.

<u>Remarque</u> III.1. Si tous les coefficients de l'équation (3.34) et du critère (3.35) sont J-mesurables, (3.37) s'écrit :

$$(3.44)\qquad Nu = C^* p^- + ({}^{j}S\, d) D^*\, {}^{j}H$$

Or par le Théorème I.8 $\int_0^t {}^{J}H dw$ est la projection sur $\overset{J}{W}$ de $\int_0^t H.dw + M_t$ où $\overset{J}{W}$ est l'ensemble des éléments de $\overset{o}{W}$ qui s'écrivent sous la forme $\int_0^t H' dw$ avec H' J-mesurable.

Le système (3.36)–(3.37) peut donc s'écrire :

$$(3.45)\qquad \begin{aligned} &dp = (M^* Mx - A^* p - {}^{p}B^* H')dt + H' dw + dM \\ &p_T = 0 \end{aligned}$$

avec $(p_o, H', M') \in L_2^o \times {}^J L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \ldots \times {}^J L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{J\perp}{W}$ et de plus

(3.45') $\qquad Nu = C^* \bar{p} + ({}^{j_S} d) D^* H'$

On retrouve ainsi un système formellement identique au système (2.2),(2.3). []

8- Le problème de feedback.

Une propriété essentielle des opérateurs ${}^{j_i}, {}^{j_S}$ que nous avons vue dans (1.69) et que si T' est un temps d'arrêt, on a :

$$(3.46) \qquad {}^{j_i} 1_{t>T'} = 1_{t>T'} {}^{j_i}$$

$${}^{j_S} 1_{t>T'} = 1_{t>T'} {}^{j_S}$$

ceci essentiellement parce que $\bar{P} \subset J$.

On peut alors procéder comme à la section II.4 et considérer le système à partir d'un temps constant $t \leqslant T$ ou d'un temps d'arrêt $T' \leqslant T$.

On construit alors comme à la Proposition II.3 un opérateur P_t et une v.a. de carré intégrable r_t.

Les relations (3.46) montrent alors que en tout $t \in [0,T]$, on a :

$$(3.47) \qquad p_t = -(P_t x_t + r_t)$$

On voit donc bien pourquoi il est essentiel que J contienne $\bar{P}$ pour que le problème du feedback ait un sens.

On établit alors sur P et r des résultats formellement identiques aux résultats de la section II.4. $\square$.

9- Les équations de Riccati formelles.

Comme en II.5 , on écrit formellement

$$(3.48) \qquad P_t = P_o + \int_0^t \dot{P} ds + \int_0^t \mathcal{H} dw + \mathcal{M}_t$$

avec $(P_o, \dot{P}, \mathcal{H}, \mathcal{M}) \in L_2^o \times L_{21} \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \times \ldots \times L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o\perp}{W}$.

$$(3.49)\qquad r_t = r_o + \int_o^t \dot{r}ds + \int_o^T hdw + M'_t$$

avec $(r_o, \dot{r}, h, M) \in L_2^o \times L_{22} \times L_{22}^{[w_1,w_1]} \times .. \, L_{22}^{[w_m,w_m]} \times \overset{o\perp}{W}$

On a alors :

THEOREME III.8. P est solution formelle de l'équation :

$$(3.50)\qquad dP + \{PA + A^*P + {}^p(B^*PB + B^*\mathcal{K} + \mathcal{K}B) - {}^pS[{}^jS(P^-C + d(B^*PD + \mathcal{K}D))({}^jS(N + dD^*PD))^{-1}\, {}^jS(C^*P^- + d(D^*PB + D^*\mathcal{K}))] + M^*M\}dt - \mathcal{K}dw - d\mathcal{M} = 0.$$

$$P_T = M_1^* M_1$$

THEOREME III.9 r est solution formelle de l'équation :

$$(3.51)\qquad \begin{aligned} dr = {} & \{{}^pS[(P^-C + d(B^*PD + \mathcal{K}D))({}^jS(N + dD^*PD))^{-1}\, {}^jS C^*] - A^*\}rdt \\ & + \{{}^pS[(P^-C + d(B^*PD + \mathcal{K}D))({}^jS(N + dD^*PD))^{-1}\, {}^jS(dD^*(Pg + h)] \\ & - Pf - {}^p(\mathcal{K}g + B^*(Pg + h))\}dt + hdw + dM' \end{aligned}$$

$$r_T = 0.$$

COROLLAIRE : Le contrôle optimal u est donné par :

$$(3.52)\qquad u = -\,({}^jS(N + dD^*PD))^{-1}\, {}^jS\{(C^*P^- + dD^*(\mathcal{K} + PB))x^- + C^*r^- + dD^*(Pg + h)\}$$

Preuve : Par la formule de Pratelli-Yoeurp donnée dans [7] p 345,

on a :

$$(3.53)\qquad P_t x_t = P_o x_o + \int_o^t Pdx + \int_o^t dPx^- + \int_o^t d < \mathcal{K}.w, (Bx^- + Du + g).w > .$$

Or par la définition des projecteurs ^{p}, on vérifie que :

$$(3.54)\qquad \int_o^t d < \mathcal{K}.w, (Bx^- + Du + g).w > = \int_o^t {}^p\mathcal{K}(Bx^- + Du + g)dt.$$

On doit donc avoir grâce à (3.36) :

$$(3.55)\qquad \dot{P}x + P(Ax + {}^{p_S}(Cu) + f) + {}^{p}(\mathcal{K}(Bx^- + Du + g)) + \dot{r} = -M^*Mx - A^*Px - A^*r + {}^{p}B^*H.$$

$$(3.56)\qquad \mathcal{K}x^- + P(Bx^- + Du + g) + h = -H.$$

$$(3.57)\qquad ({}^{j_S}N)u = -{}^{j_S}(C^*(\bar{P}x^- + r^-)) + {}^{j_S}dD^*H.$$

En remplaçant H donné par (3.56) dans (3.57), on obtient u par la formule (3.52).

En annulant dans (3.55) le coefficient de x^-, qu'on peut ici identifier à x puisque $x^- = x$ $dP \otimes dt$ p.p. / et le coefficient constant, on obtient l'équation (3.51) pour r et l'équation :

$$(3.58)\qquad \dot{P} + PA + A^*P + {}^{p}(B^*PB + B^*\mathcal{K} + \mathcal{K}B) - (P\,{}^{p_S}C + {}^{p}(B^*PD + \mathcal{K}D))$$
$$({}^{j_S}(N + dD^*PD))^{-1}\,{}^{j_S}(C^*P^- + d(D^*PB + D^*\mathcal{K})) + M^*M = 0$$

ou les opérateurs p et p_S agissent sur tout ce qui est à leur droite.

Pour symétriser l'expression (3.58) – P est autoadjoint – on remarque que

$$(3.59)\qquad P\,{}^{p_S}C = {}^{p_S}P^-C \qquad dP \otimes dt \quad \text{p.p.}$$

De plus par (3.33), on a :

$$(3.60)\qquad {}^{p_i}X = {}^{p_S}d_iX.$$

Enfin comme $\bar{P} \subset J$, et comme ce qui est à droite de $P\,{}^{p_S}C + {}^{p}(B^*PD + \mathcal{K}D)$ est J-mesurable, on peut ajouter l'opérateur j_S devant ce terme. □

10- Résolution de l'équation de Riccati.

On va chercher à résoudre les équations (3.50),(3.51) lorsque $J = \bar{O}$ ou $J = \bar{P}$.

a) Le contrôle prévisible à coefficients indépendants.

On se place ici sous les hypothèses de II.6 b) en acceptant toutefois que $A,B\ldots N$ soient des processus optionnels définis sur Ω^1 et que g soit optionnel sur $\Omega^1 \times \Omega^2$

On suppose de plus que $J=\overline{P}$.

P est alors solution de l'équation (2.74) (ce qui montre que le fait que $A,B..N$ soient optionnels au lieu d'être prévisibles n'a aucune importance puisqu'on peut les remplacer par leurs projections prévisibles sur Ω^1).

En effet si P est la solution unique de (2.74) sur Ω^1 il est a fortiori solution de (3.50) sur $\Omega^1 \times \Omega^2$, avec $\mathcal{H}_0 = 0$. En effet soit X est un processus optionnel borné défini sur Ω^1.

Alors on a sur $\Omega^1 \times \Omega^2$:

$$(3.61) \qquad {}^{p_S}X = X \quad d(P_1 \otimes P_2) \otimes dt \quad \text{p.p.}$$

En effet si ^{3} est l'opérateur de projection prévisible sur Ω^1, $({}^3X \neq X)$ est à coupes dénombrables. Comme w est une martingale quasi continue à gauche sur $(\Omega^1 \times \Omega^2, (F^1 \otimes F_t^2)^*_+, P^1 \otimes P^2)$, $({}^3X \neq X)$ est négligeable pour la mesure dS sur $(\Omega^1 \times \Omega^2) \times [0,T]$, puisqu'il est négligeable pour dS_{ω_1} (i.e. en fixant ω_1). Alors ${}^{p_S}X = {}^{p_S}\,{}^3X$, et comme ${}^{p_S}\,{}^3X = {}^3X$ on a bien (3.61), (2.74) est donc bien une forme de (3.50).

On vérifie alors que P et x n'ont pas de sauts communs, et on termine le raisonnement comme au Théorème II.8. □

On résoud alors (3.51) grâce au Théorème III.2, (en y supposant $\mathcal{H} = 0$, $d_i = 1$ pour $i = 1\ldots m$, en supprimant partout les opérateurs p_S, j_S et p_i chaque fois qu'ils n'opèrent pas directement sur g ou h. On obtient en fait une équation du type (2.118), où g est remplacé par ${}^pg$. Le contrôle est alors donné par (2.119) en remplaçant encore g par ${}^pg$.

b) <u>Le contrôle prévisible dans le cas des martingales à sauts.</u>

On peut aussi résoudre l'équation de Riccati associée au problème $(\overline{P})$ dans le cas analogue du cas étudié en II.6.c) et d). La seule différence réside dans le fait que nous avons ici des intégrales optionnelles au lieu d'intégrales prévisibles.

Nous laissons le soin au lecteur d'écrire complètement les équations.

c) Le contrôle optionnel : le cas des martingales à sauts.

Il est important de remarquer que dans le cas où $J=\overline{0}$, il n'y a pas de "séparation" dans l'équation (3.50) donnant P même quand les coefficients sont indépendants de w, ce qui rend la résolution de l'équation beaucoup plus difficile.

On va la résoudre dans un cas particulier. On fait toutes les hypothèses de II.6.c), en acceptant toutefois que les processus $A, B\dots$ soient optionnels sur Ω_1.

THEOREME III. 10. Sur Ω^1, sur l'équation :

$$
\begin{aligned}
& dP + \Big\{ PA + A^*P + \sum_{i=1}^{m_1} p_i \Big(B_i^* P B_i + B^*\Big(\frac{\Delta P}{\Delta w_i}\Big) + \Big(\frac{\Delta P}{\Delta w_i}\Big)B\Big) + \sum_{m_1+1}^{m} B_i^* P B_i \\
& - \frac{1}{(m+1)} \sum_{1}^{m_1} p_i \Big[\Big(P^- C + (m+1)\Big(B_i^* P D_i + \Big(\frac{\Delta P}{\Delta w_i}\Big) D_i\Big)\Big) \\
& \Big(N + (m+1) D_i^* P D_i\Big)^{-1} \Big(C^* P^- + (m+1)\Big(D_i^* P B_i + D_i^* \frac{\Delta P}{\Delta w_i}\Big)\Big)\Big] \qquad (3.62) \\
& - \Big(\frac{m+1-m_1}{m+1}\Big)\Big(P C + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^{m} B_i^* P D_i\Big)\Big)\Big(N + \Big(\frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^{m} \\
& D_j^* P D_j\Big)^{-1} \Big(C^* P + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^{m} D_k^* P B_k\Big) + M^* M \Big\} dt - d\mathcal{M} = 0 \\
& P_T = M_1^* M_1
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{M}$ est une martingale de carré intégrable a une solution unique dans l'espace des processus bornés adaptés cadlag P' tels que le coefficient de dt appliqué à P' dans (3.62) soit $dP \otimes dt$ essentiellement borné. P est alors à valeurs autoadjointes positives, et $\mathcal{M}$ est une martingale bornée d'opérateurs autoadjoints.

Preuve : Comme dans la preuve des Théorèmes II.6 et II.9, on considère l'espace canonique Ω^2 du mouvement brownien $m-m_1$ dimensionnel noté $(w_{m_1+1}\dots w_m)$ et on forme l'espace produit $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$.

Montrons tout d'abord que formellement, (3.62) est l'équation (3.50), en admettant que P ne dépend que de ω_1.

Nous avons vu en II.6. c) que dans (3.50), si $i=1\dots m_1$, on a $\mathcal{V}_i = \frac{\Delta P}{\Delta w_i}$. De plus pour $i \geqslant m_1+1$, ${}^{p_i}X$ est la classe d'équivalence de X dans L_{22}. Les premiers termes de (3.62) sont donc bien justifiés.

On a de plus :

$$(3.63) \qquad dS = \frac{\sum_1^{m_1} d[w_i,w_i]}{m+1} + \left(\frac{m+1-m_1}{m+1}\right)dt.$$

Enfin, on a grâce à (3.33) :

$$(3.64) \qquad {}^{p_S} = \frac{1}{m+1}\left(\sum_1^m {}^{p_i} + {}^{p_S}do\right)$$

où ${}^{p_S}do$ est l'opérateur qui à X borné associe sa classe d'équivalence dans L_{22}.

Comme pour $i > m_1+1$, $p_i = {}^{p_S}do$, il vient :

$$(3.65) \qquad {}^{p_S} = \frac{1}{m+1}\left(\sum_1^{m_1} {}^{p_i} + (m+1-m_1)\,{}^{p_S}do\right)$$

L'opérateur $\frac{m+1-m_1}{m+1}\;{}^{p_S}do$ n'opère pas sur d_i $(1 \leqslant i \leqslant m_1)$ puisque $d[w_i,w_i]$ et dt sont des mesures singulières.

De plus pour $i=m_1+1\dots m$, on a : $d_i = \frac{m+1}{m+1-m_1}$ dt p.p..

Enfin, pour $i=1\dots m_1$, $d_i = m+1$, $d[w_i,w_i]$ p.p. et de plus les mesures $d[w_i,w_i]$ et $d[w_j,w_j]$ sont singulières pour $i \leqslant m_1$ et $j \neq i$.

On a donc bien identifié formellement (3.62) et (3.50).

On montre alors l'existence et l'unicité de la solution de (3.62) comme aux Théorèmes II.6 et II.9, en vérifiant que P correspond bien à un problème de contrôle optionnel sur $\Omega^1 \times \Omega^2$. □

On se place maintenant sous les hypothèses de II.6 . d), qu'on modifie de la manière suivante :

- $A, B, \dots N$ peuvent être pris optionnels sur Ω^1.

- g peut être pris optionnel sur $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$.

- $(w_{m_1+1} \dots w_m)$ est une martingale continue sur (Ω^2, F^2, P^2) telle que

$d < w_i, w_j > = \partial_{ij} dt$ (i.e. un mouvement brownien).

La continuité de cette dernière martingale joue ici un rôle essentiel. Réécrivons le système (3.34)-(3.35) dans la forme particulière traitée ici. Grâce à (3.65), on a :

$$(3.66) \qquad \begin{aligned} dx &= [Ax + \frac{1}{m+1}(\sum_1^{m_1} p_i Cu + (m+1-m_1)Cu + f]dt + \sum_1^m (B_i x^- + D_i u + g_i) dw_i \\ x(0) &= x_o . \end{aligned}$$

Grâce à (3.63), $\overset{o}{I}(u)$ s'écrit :

$$(3.67) \qquad \overset{o}{I}(u) = E\int_o^T |Mx|^2 dt + \frac{1}{m+1}(\sum_1^{m_1} E\int_o^T < Nu, u > d[w_i, w_i] + (m+1-m_1) \; E\int_o^T < Nu, u > dt \;) + E|M_1 x_T|^2 .$$

<u>THEOREME</u> III.11. Sur $\Omega^1 \times \Omega^2$, l'équation :

$$(3.68) \qquad \begin{aligned} dr = \{ & \frac{1}{(m+1)} \sum_1^{m_1} p_i [(P^- C + (m+1)(B_i^* PD_i + \frac{\Delta P}{\Delta w_i} D_i)(N + (m+1)D_i^* PD_i)^{-1} \\ & (C^* r^- + (m+1) D_i^* (Pg_i + h_i))] + \frac{m+1-m_1}{m+1} \sum_{m_1+1}^m (PC + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^m B_i^* PD_i) \\ & (N + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^m D_j^* PD_j)^{-1} (C^* r + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^m D_k^* (Pg_k + h_k)) \\ & - A^* r - Pf - \sum_1^{m_1} p_\ell (\frac{\Delta P}{\Delta w_\ell} g_\ell + B_\ell^* (Pg_\ell + h_\ell)) - \sum_{m_1+1}^m B_n^* (Pg_n + h_n) \} dt \\ & + h dw + dM' \\ r_T = 0 & \end{aligned}$$

avec $(r_0, h, M') \in L_2^o \times L_{22}^{[w_1, w_1]} \times \ldots L_{22}^{[w_{m_1}, w_{m_1}]} \times (L_{22})^{m-m_1} \times \overset{o}{W}{}^{\perp}$

a une solution unique.

Preuve : L'équation est l'équation (3.51) écrite dans le cas particulier traité ici. On utilise alors le Théorème III.2 $\square$

COROLLAIRE. Le contrôle optimal est donné par :

(3.69) a) Pour $i=1\ldots m_1$, si $\Delta w_i \neq 0$ $u = -(N + (m+1)D_i^* P D_i)^{-1}$

$$((C^* P^- + (m+1) D_i^* (\frac{\Delta P}{\Delta w_i} + PB_i))x^- + C^* r^- + (m+1) D^* (Pg_i + h_i))$$

(3.70) b) sur $\bigcap_1^{m_1} (\Delta w_{i_t} = 0)$ $u = -(N + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^{m} D_i^* P D_i)^{-1}$

$$(C^* P^- + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^{m} D_j^* P B_j) x^- + C^* r^- + \frac{m+1}{m+1-m_1} \sum_{m_1+1}^{m} D_k^* (Pg_k + h_k))$$

Preuve : Cette formule résulte du Corollaire des Théorèmes III.8 et III. 9 $\square$.

c) Extensions.

On peut résoudre (3.50) dans un cas formellement identique au cas traité au Théorème II.12.

On suppose en effet $(w_1 \ldots w_{m_1})$ donnés comme en II.6. e), et vérifient les mêmes hypothèses qu'en II.6. e).

Ω^2 est l'espace canonique du mouvement brownien $m-m_1$ dimensionnel. On forme encore un espace produit $\Omega^1 \times \Omega^2$.

On peut alors former les d_i sur $\Omega^1 \times \Omega^2$ qui sont ici des processus optionnels sur Ω^1.

A,B,C,D... sont naturellement encore définis sur Ω^1.

On suppose enfin que pour $i \leqslant m_1$, $D_i = 0$.

Alors si $J = \overline{0}$ en supposant que P ne dépend que de ω_1, (3.50) s'écrit :

(3.71) $dP + \{PA + A^*P + {}^P(B^*PB + B^*\mathcal{K} + \mathcal{K}B) - {}^{P_S}(P^-C + d\,B^*PD)(N + dD^*PD)^{-1}$

$(C^*P^- + dD^*PB) + M^*M\}dt - \mathcal{K}dw - d\mathcal{M} = 0.$

$$P_T = M_1^* M_1 .$$

où l'operateur p_S est maintenant restreint aux fonctions qui ne dépendent que de ω_1.

Au lieu de (2.150), on posera pour $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_m)$:

$$(3.72) \qquad \|\mathcal{K}\|_\alpha = \underset{T-\alpha\leqslant t\leqslant T}{\text{supess}} \left(\int_t^T \|\mathcal{K}\|^2 \, d[w,w] \right)^{1/2} = \text{supess} \underset{T-\alpha\leqslant t\leqslant T}{\sup} \left(\int_t^T p \|\mathcal{K}\|^2 \, ds \right)^{1/2}$$

Alors on a :

$$(3.73) \qquad E\int_{T-\alpha}^T p|\mathcal{K}|\,ds \leqslant \sqrt{\alpha}\left(E\int_{T-\alpha}^T (p|\mathcal{K}|)^2 ds\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\alpha}\left(E\int_{T-\alpha}^T |\mathcal{K}|^2 d[w,w]\right)^{1/2}$$

ou encore :

$$(3.74) \qquad E\int_{T-\alpha}^T p|\mathcal{K}|\,ds \leqslant \sqrt{\alpha}\, \|\mathcal{K}\|_\alpha .$$

On pourra ainsi démontrer les inégalités correspondant à (2.156), (2.158), (2.161).

On peut donc utiliser un théorème de point fixe pour démontrer que (3.71) a une solution unique sur intervalle $[T-\alpha, T]$. En utilisant le Théorème III.3 et (3.56), on poursuit comme au Théorème II.12.

Comme à la section II.6 e), on peut résoudre le problème de contrôle sur un espace produit plus général, en imposant toutefois que $(w_{m_1}+1 \dots w_m)$ soit un mouvement brownien, pour que les densités d_i soient optionnelles sur Ω^1. On peut aussi résoudre le problème avec les termes affines f et g quand ils sont bornés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISMUT J.M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. J. Math. Anal. Appl. 44 (1973), p 384-404.

[2] BISMUT J.M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. SIAM J. Control 14 (1976), p 419-444.

[3] DELLACHERIE C. Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 67. Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1972

[4] DELLACHERIE C., MEYER P.A. Probabilités et Potentiels 2ème édition. Paris:Hermann 1975.

[5] HAUSSMAN U.G. Optimal stationary control with state and control dependent noise, SIAM J. of control, p 184-198 (1971).

[6] LIONS J.L. Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris:Dunod 1968. Traduction Anglaise, Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1971.

[7] MEYER P.A. Cours sur les Intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités n° 10, p 245-400, Lecture Notes in Mathematics n° 511, Berlin-Heidelberg-New-York : Springer (1976).

[8] WONHAM W.M. On a matrix Riccati equation of stochastic control. SIAM J. of control, 6, p. 312-326 (1968).

[9] BISMUT J.M. On optimal control of linear stochastic equations with a linear-quadratic criterion. SIAM J. Control, 15, (1977), p1-4.