

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RENZO CAIROLI

Une représentation intégrale pour les martingales fortes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 162-169

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__162_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__162_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REPRESENTATION INTEGRALE POUR LES MARTINGALES FORTES

par R. Cairoli

Soit $W = \{W_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ un processus de Wiener à deux paramètres, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$, soit $\mathcal{F}_z$ la tribu engendrée par $\{W_\zeta, \zeta \prec z\}$ et par les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. Comme d'habitude, $(s, t) \prec (s', t')$ signifie ici $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

Nous dirons qu'un processus est adapté, s'il est adapté à la famille $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$. Nous poserons $\mathcal{F}_{s\infty} = \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_{st}$, $\mathcal{F}_{\infty t} = \bigvee_{s \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_{st}$ et $\mathcal{F}_{\infty} = \bigvee_{z \in \mathbb{R}_+^2} \mathcal{F}_z$. Nous désignerons en outre par R_{st} le rectangle $[0, s] \times [0, t]$ et par $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Suivant [1], nous dirons qu'un processus $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une martingale forte, s'il est nul sur les axes, adapté, intégrable et si

$$(1) \quad E\{M_{s't'} - M_{st'} - M_{s't} + M_{st} | \mathcal{F}_{s\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty t}\} = 0$$

pour tout $(s, t) \prec (s', t')$.

Il a été démontré dans [1] (théorème 8.1) que toute martingale forte de carré intégrable est représentable sous la forme d'une intégrale stochastique, par rapport à W , d'un processus

adapté. Dans le présent article, nous étendons cette représentation aux martingales fortes dont le carré n'est pas intégrable. Comme l'intégrale stochastique d'un processus adapté est continue (cf. [4], [5]), un corollaire du résultat est que les martingales fortes admettent une version continue. Cette conclusion ne paraît pas surprenante, compte tenu du récent résultat dû à J.B. Walsh (cf. [3]), selon lequel toute martingale forte relative à une famille croissante de tribus continue à droite admet une version continue à droite.

L'instrument de base est la représentation intégrale donnée dans [2]. Nous allons d'abord l'étendre aux 2-martingales locales. Par 2-martingale locale nous entendons un processus $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ nul sur les axes et tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ fixé, $\{M_{st}, t \in \mathbb{R}_+\}$ est une martingale locale ordinaire relative à $\{\mathcal{F}_{\infty t}, t \in \mathbb{R}_+\}$.

Théorème 1. Soit $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ une 2-martingale locale adaptée et mesurable. Il existe un processus $\alpha = \{\alpha(z;s) : z \in \mathbb{R}_+^2, s \in \mathbb{R}_+\}$ tel que

- (a) $(z;s;\omega) \rightarrow \alpha(z;s;\omega)$ est $\mathcal{B}^2 \times \mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mesurable,
- (b) $\alpha(u,v;s)$ est $\mathcal{F}_{sv}$ -mesurable si $u \leq s$ et $= 0$ si $u > s$,
- (c) pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $\int_{R_{st}} \alpha^2(\zeta;s) d\zeta < \infty$ p.s.,

et pour lequel on a

$$(d) \quad M_{st} = \int_{R_{st}} \alpha(\zeta;s) dW_\zeta,$$

pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$.

Démonstration. Les martingales de carré intégrable relatives à $\{\mathcal{F}_{\omega t}, t \in \mathbb{R}_+\}$ admettent une version continue (cf. [2]), donc aussi chacune des martingales locales $\{M_{st}, t \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R}_+\}$. En posant, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\tilde{M}_{st} = \begin{cases} \lim_{\substack{v \rightarrow t \\ v \in \mathbb{Q}}} M_{sv} & \text{si la limite existe,} \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

nous obtenons donc une version $\tilde{M}$ de M qui est mesurable et telle que, pour s fixé, $t \rightarrow \tilde{M}_{st}$ est p.s. continue. Cette version sera encore notée par M . Posons, pour chaque n ,

$$T_s^n(\omega) = \begin{cases} \inf\{t: |M_{st}(\omega)| \geq n\} & \text{si } \{ \} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si } \{ \} = \emptyset, \end{cases}$$

et, pour chaque m ,

$$T_s^{nm}(\omega) = \begin{cases} \frac{j}{2^m} & \text{si } \frac{j-1}{2^m} < T_s^n(\omega) \leq \frac{j}{2^m}, j = 0, 1, 2, \dots, \\ \infty & \text{si } T_s^n(\omega) = \infty. \end{cases}$$

A noter que T_s^n est un temps d'arrêt relatif à la famille $\{\mathcal{F}_{st}, t \in \mathbb{R}_+\}$ et que $T_s^{nm}(\omega)$ converge en décroissant vers $T_s^n(\omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. Posons

$$M_{st}^n(\omega) = \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} M_{s, T_s^{nm}(\omega) \wedge t}(\omega) & \text{si la limite existe,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le processus M^n ainsi défini est adapté et mesurable. En outre, pour s fixé,

$$t \rightarrow M_{st}^n \text{ est indistinguable de } t \rightarrow M_{s, T_s^n \wedge t},$$

ce qui implique, en particulier, que M^n est une 2-martingale de carré intégrable. D'après le théorème 1.3 de [2], il existe donc un processus $\alpha_n = \{\alpha_n(z; s) : z \in \mathbb{R}_+^2, s \in \mathbb{R}_+\}$ vérifiant (a) et (b), tel que $E\{\int_{R_{st}} \alpha_n^2(\zeta; s) d\zeta\} < \infty$ et que

$$(2) \quad M_{s, T_s^n \wedge t}^n = M_{st}^n = \int_{R_{st}} \alpha_n(\zeta; s) dW_\zeta,$$

pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$. Nous allons maintenant vérifier que les α_n peuvent être collés ensemble de manière à produire le processus α cherché. A cet effet, remplaçons t par $T_s^{n-1} \wedge t$ dans (2) et faisons ensuite la même substitution dans (2), écrite pour $n-1$ à la place de n . Du fait que $T_s^{n-1} \leq T_s^n$, les premiers membres des deux relations obtenues coïncident, donc les deux derniers aussi et nous en concluons que, pour s fixé, p.s.

$$\alpha_n(\zeta; s) = \alpha_{n-1}(\zeta; s) \text{ pour p.t. (presque tout) } \zeta \in R_{s, T_s^{n-1}}.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} \alpha(u, v; s) &= \alpha_1(u, v; s) \quad \text{si } v \leq T_s^1, \\ &= \alpha_n(u, v; s) \quad \text{si } T_s^{n-1} < v \leq T_s^n, \quad n \geq 2, \\ &= 0 \quad \text{autrement.} \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que T_s^n converge en croissant p.s. vers l'infini, quand $n \rightarrow \infty$, il est facile de voir que le processus α ainsi défini répond aux exigences du théorème.

Théorème 2. Si $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une martingale forte, il existe un processus $\varphi = \{\varphi(z), z \in \mathbb{R}_+^2\}$ adapté et mesurable, tel que $\int_{R_z} \varphi^2(\zeta) d\zeta < \infty$ p.s. pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$ et pour lequel on a

$$(3) \quad M_z = \int_{R_z} \varphi(\zeta) dW_\zeta,$$

pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$.

Démonstration. Les martingales relatives à la famille $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ étant continues en probabilité, elles admettent une version mesurable, d'après le théorème de Doob. Quitte à redéfinir M_{st} comme au début de la démonstration du théorème 1, nous pouvons donc supposer que M est mesurable et que $t \rightarrow M_{st}$ est p.s. continue pour s fixé. En particulier, M est alors une 2-martingale locale adaptée et mesurable et il existe, d'après le théorème 1, un processus α vérifiant (a) - (d). Posons, pour $s < s'$ fixés et pour chaque n ,

$$T^n = \begin{cases} \inf\{t: \int_{R_{st}} \alpha^2(\zeta; s) d\zeta \vee \int_{R_{s't}} \alpha^2(\zeta; s') d\zeta \geq n\} & \text{si } \{ \} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si } \{ \} = \emptyset. \end{cases}$$

Alors T^n est un temps d'arrêt relatif à la famille $\{\mathcal{F}_{\infty t}, t \in \mathbb{R}_+\}$ et, d'après (d), qui est encore valable lorsque t est remplacé par un temps d'arrêt borné relatif à cette famille, si $t < t'$ et r est quelconque,

$$(4) \quad M_{r, T^n \wedge t'} - M_{r, T^n \wedge t} = \int_{R_{r, T^n \wedge t'} - R_{r, T^n \wedge t}} \alpha(\zeta; r) dW_\zeta.$$

D'autre part, toujours pour $s < s'$ fixés, (1) implique que

$\{M_{s',t} - M_{st}, t \in \mathbb{R}_+\}$ est une martingale relative à la famille $\{\mathcal{F}_{s\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty t}, t \in \mathbb{R}_+\}$, donc, d'après le théorème d'arrêt de Doob,

$$(5) \quad E\{M_{s',T^n \wedge t'} - M_{s,T^n \wedge t'} - M_{s',T^n \wedge t} + M_{s,T^n \wedge t} \mid \mathcal{G}_t\} = 0,$$

où $\mathcal{G}_t$ est la tribu des $F \in \mathcal{F}_\infty$ tels que $F \cap \{T^n \wedge t \leq v\} \in \mathcal{F}_{s\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty v}$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent, en introduisant l'expression du deuxième membre de (4) dans (5), nous obtenons

$$(6) \quad E\left\{ \int_{R_{s',T^n \wedge t'}}^{\int_{R_{s',T^n \wedge t}}} \alpha(\zeta; s') dW_\zeta - \int_{R_{s,T^n \wedge t'}}^{\int_{R_{s,T^n \wedge t}}} \alpha(\zeta; s) dW_\zeta \mid \mathcal{G}_t \right\} = 0.$$

Mais en raison du choix de T^n et des propriétés de l'intégrale stochastique,

$$E\left\{ \int_{R_{s',T^n \wedge t'}}^{\int_{R_{s,T^n \wedge t'}}} \alpha(\zeta; s') dW_\zeta - (R_{s',T^n \wedge t} - R_{s,T^n \wedge t}) \mid \mathcal{G}_t \right\} = 0,$$

ce qui fait que (6) s'écrit aussi sous la forme

$$E\left\{ \int_{R_{s,T^n \wedge t'}}^{\int_{R_{s,T^n \wedge t}}} (\alpha(\zeta; s') - \alpha(\zeta; s)) dW_\zeta \mid \mathcal{G}_t \right\} = 0,$$

ou encore (cf. lemme 9.6 de [1])

$$\int_{R_{s\infty}} E\{I_{\{T^n \wedge t < v \leq T^n \wedge t'\}} (\alpha(u, v; s') - \alpha(u, v; s)) \mid \mathcal{G}_t\} dW_{uv} = 0.$$

Il s'ensuit que, pour p.t. $(u, v) \in R_{s\infty}$,

$$(7) \quad E\{I_{\{T^n \wedge t < v \leq T^n \wedge t'\}} (\alpha(u, v; s') - \alpha(u, v; s)) \mid \mathcal{G}_t\} = 0.$$

Considérons un $(u, v) \in R_{s\infty}$ tel que $v > 0$ et que (7) vaille pour tout t et t' appartenant à un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}_+$

et faisons tendre t en croissant et t' en décroissant, le long de cet ensemble, vers v . Nous obtenons

$$\begin{aligned} E\{I_{\{v \leq T^n\}}(\alpha(u, v; s') - \alpha(u, v; s)) | \mathcal{G}_v\} &= \\ &= I_{\{v \leq T^n\}}(\alpha(u, v; s') - \alpha(u, v; s)) = 0. \end{aligned}$$

En faisant tendre alors n vers l'infini, il en résulte que, pour $s < s'$ fixés,

$$\alpha(\zeta; s') = \alpha(\zeta; s) \quad \text{pour p.t. } \zeta \in R_{s\infty},$$

d'où nous concluons que, pour p.t. $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha(u, v; s)$ est une fonction p.s. essentiellement constante de $s > u$. Posons, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u+1/n}{n} \int_u^{\alpha(u, v; r)} dr & \text{si l'intégrale} \\ & \text{et la limite existent,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le processus φ ainsi défini est adapté et mesurable et nous avons, pour p.t. $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$(8) \quad \alpha(u, v; s) = \varphi(u, v) \quad \text{pour p.t. } s > u.$$

Par conséquent, pour p.t. $s \in \mathbb{R}_+$, l'égalité dans (8) a lieu pour p.t. $(u, v) \in R_{s\infty}$ et nous voyons donc que, grâce à la propriété (c) du théorème 1,

$$\int_{R_z} \varphi^2(\zeta) d\zeta < \infty \quad \text{p.s. pour tout } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

De plus, si s est hors de l'ensemble exceptionnel, l'égalité p.p.

des intégrants α et φ implique

$$(9) \quad M_{st} = \int_{R_{st}} \alpha(\zeta; s) dW_{\zeta} = \int_{R_{st}} \varphi(\zeta) dW_{\zeta},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Mais le premier et le dernier membre sont continus en probabilité, donc ils coïncident pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Cairoli et J.B. Walsh : Stochastic integrals in the plane, Acta mathematica, 134, 1975, p. 111-183.
- [2] R. Cairoli et J.B. Walsh : Martingale representations and holomorphic processes, Annals of Probability, 5, 1977, p. 511-521.
- [3] J.B. Walsh : Right continuity of martingales. A paraître.
- [4] E. Wong et M. Zakai : An extension of stochastic integrals in the plane, Annals of Probability, 5, 1977.
- [5] E. Wong et M. Zakai : The sample function continuity of stochastic integrals in the plane. A paraître.

Département de mathématiques
Ecole polytechnique fédérale
Avenue de Cour 61
1007 Lausanne, Suisse