Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Dominique Lépingle

Sur certains commutateurs de la théorie des martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 138-147
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__138_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR CERTAINS COMMUTATEURS DE LA THEORIE DES MARTINGALES

par D.Lepingle

Les opérateurs d'intégrale stochastique jouent un peu en théorie des martingales le rôle des opérateurs intégraux singuliers en analyse harmonique, et l'étude des commutateurs $J\beta-\beta J$, où J est un opérateur d'intégrale stochastique et β l'opérateur de multiplication par une martingale $\underline{\underline{BMO}}$, en est un bon exemple. Cette étude a été entreprise par P.A.Meyer dans la note [6], et les remarques qui suivent en sont directement inspirées. Elles en étendent le résultat dans deux directions : permettre à β de représenter la multiplication par une martingale $\underline{\underline{bmo}}_2$, ou élargir la classe des opérateurs J . Les démonstrations ci-dessous présentent de ce fait plus que des analogies avec celles de [6], on les donne cependant dans leur intégralité, avec des notations identiques ou voisines.

Sur l'habituel $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ avec $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_\infty$ sont définis les espaces de martingales

$\underline{\underline{H}}^1$: $E[\sup_t|M_t|]<\infty$ ou $E[[M,M]_\infty^{1/2}]<\infty$

$\underline{\underline{H}}^1_v$: $E[\int_0^\infty |dM_s|]<\infty$

$\underline{\underline{h}}^1$: $M_0=0$ et $E[(\langle M,M\rangle_\infty)^{1/2}]<\infty$

$\underline{\underline{BMO}}$: il existe une constante c telle que pour tout temps d'arrêt T ,

$$E[(M_\infty-M_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T]\leq c^2$$

$\underline{\underline{bmo}}_2$: $M_0=0$ et il existe une constante c telle que pour tout temps d'arrêt T ,

$$E[(M_\infty-M_T)^2|\underline{\underline{F}}_T]\leq c^2 .$$

Nous conviendrons que $\int_0^t$ signifie $\int_{[0,t]}$ et que pour tout processus X, $X_{0-}=0$. La notation $[M,M]_s^t$ désigne $[M,M]_t-[M,M]_s$, même chose pour $\langle M,M\rangle_s^t$. A toute v.a. Y de L^1 on associe la martingale $Y_t=E[Y|F_t]$, et la notation Y désigne indifféremment cette martingale ou sa v.a. terminale.

On rencontrera dans ce qui suit des inégalités comportant la constante c , qui pourra varier de ligne en ligne, mais ne dépendra (éventuellement) que de p $(1<p<\infty)$.

1 . COMMUTATEURS DE L^2

Soit H un processus prévisible borné par 1 . A toute martingale locale X , on sait associer la martingale locale H.X , intégrale stochastique de X par H . On la notera J(X) ou JX . Restreint à L^2 , J est un opérateur borné dans L^2 , de norme ≤ 1 , car

$$E[(JX)^2] = E[<JX,JX>_\infty] = E[\int_0^\infty H_s^2 d<X,X>s] \leq E[<X,X>_\infty] = E[X^2] .$$

Si B et X sont deux martingales de carré intégrable, si β représente l'opérateur qui à X associe la martingale de v.a. terminale $B_\infty X_\infty$, on définit le commutateur de J et de β comme étant l'application qui à X associe la martingale locale $J\beta(X)-\beta J(X)$. La formule de changement de variable donne pour tout $t<\infty$

$$(1) \qquad B_t X_t = \int_0^t B_{s-}dX_s + \int_0^t X_{s-}dB_s + [B,X]_t \quad .$$

L'inégalité de Kunita-Watanabe montre que le processus $[B,X]$ est à variation intégrable, tandis que les deux intégrales stochastiques définissent des martingales de $\underline{\underline{H}}^1$ par suite de la majoration

$$E[[B_-.X,B_-.X]_\infty^{1/2}] \leq E[(\sup_t|B_t|)[X,X]_\infty^{1/2}] \leq 2\,\|B\|_2\,\|X\|_2$$

et de la majoration correspondante pour $X_-.B$. Chacun des termes de (1) est donc p.s. convergent quand t tend vers l'infini. Soit N la martingale à variation intégrable compensée de $[B,X]$. Alors,

$$\begin{aligned}
J\beta(X) &= \int_0^\infty H_s B_{s-}dX_s + J(\int_0^\infty X_{s-}dB_s) + \int_0^\infty H_s dN_s + J(<B,X>_\infty) \\
\beta J(X) &= \int_0^\infty B_{s-}d(JX)_s + \int_0^\infty (JX)_{s-}dB_s + [B,JX]_\infty \\
&= \int_0^\infty B_{s-}H_s dX_s + \int_0^\infty (JX)_{s-}dB_s + \int_0^\infty H_s d[B,X]_s \\
&= \int_0^\infty H_s B_{s-}dX_s + \int_0^\infty (JX)_{s-}dB_s + \int_0^\infty H_s dN_s + <B,JX>_\infty
\end{aligned}$$

et enfin

$$(2) \qquad J\beta(X)-\beta J(X) = J(\int_0^\infty X_{s-}dB_s) + J(<B,X>_\infty) - \int_0^\infty (JX)_{s-}dB_s - <B,JX>_\infty \quad .$$

Nous aurons besoin pour traiter cette expression de deux petits lemmes.

LEMME 1 . Si B est dans $\underline{\underline{bmo}}_2$, l'opérateur $X \mapsto <B,X>_\infty$ est borné dans L^2 avec une norme majorée par $c\|B\|_{\underline{\underline{bmo}}_2}$.

DEMONSTRATION. On décompose <B,X> en différence de deux processus croissants prévisibles A^+ et A^-; l'inégalité de Fefferman adaptée au cadre $\underline{\underline{h}}^1$-$\underline{\underline{bmo}}_2$

[4,p.211 ou 7,p.408] et mise sous forme conditionnelle donne, avec $b=\|B\|_{\underline{\underline{bmo}}_2}$

$$E[A^+_\infty - A^+_T + A^-_\infty - A^-_T \mid \underline{\underline{F}}_T] = E\Big[\int_{]T,\infty[} |d\langle B,X\rangle_s| \mid \underline{\underline{F}}_T\Big] \leq cb\ E[(\langle X,X\rangle^\infty_T)^{1/2} \mid \underline{\underline{F}}_T]$$

et d'après le lemme de Garsia [5,p.346],

$$E[(A^+_\infty + A^-_\infty)^2] \leq cb^2\ E[\langle X,X\rangle_\infty] \ . \ \blacksquare$$

LEMME 2 . <u>Si</u> B <u>est dans</u> $\underline{\underline{bmo}}_2$, <u>l'opérateur</u> $X \leadsto \int_0^\infty X_{s-}dB_s$ <u>est borné dans</u> L^2 <u>avec une norme majorée par</u> $c\|B\|_{\underline{\underline{bmo}}_2}$.

DEMONSTRATION. Posons $X^*_0=0$, $X^*_t=\sup_{s<t}|X_s|$, et écrivons

$$E\Big[\Big(\int_0^\infty X_{s-}dB_s\Big)^2\Big] = E\Big[\int_0^\infty (X_{s-})^2 d\langle B,B\rangle_s\Big] \leq E\Big[\int_0^\infty (X^*_s)^2 d\langle B,B\rangle_s\Big] \ .$$

Comme $(X^*)^2$ est croissant, adapté et continu à gauche, nous avons $(X^*)^2=K+L$, où K est croissant adapté continu et $L_t=\Sigma_k Y_k 1_{\{T_k<t\}}$, avec $Y_k \in \underline{\underline{F}}_{T_k}$. En remarquant que la projection optionnelle de $\langle B,B\rangle_\infty - \langle B,B\rangle_t$ est égale à celle de $(B_\infty - B_t)^2$, donc majorée par b^2 , il vient

$$\begin{aligned}
E\Big[\Big(\int_0^\infty X_{s-}dB_s\Big)^2\Big] &\leq E\Big[\int_0^\infty K_s d\langle B,B\rangle_s\Big] + \Sigma_k E\Big[\int_0^\infty Y_k 1_{\{T_k<s\}} d\langle B,B\rangle_s\Big] \\
&= E\Big[\int_0^\infty \langle B,B\rangle^\infty_s dK_s\Big] + \Sigma_k E[\langle B,B\rangle^\infty_{T_k} Y_k] \\
&\leq b^2\ E[K_\infty + L_\infty] \\
&\leq 4b^2\ E[X^2] \ . \ \blacksquare
\end{aligned}$$

D'après la relation (2), l'utilisation des lemmes 1 et 2 et de la continuité de J donne immédiatement le

THEOREME 1 . <u>Si</u> B <u>est dans</u> $\underline{\underline{bmo}}_2$, <u>si</u> J <u>est l'opérateur d'intégrale stochastique par un processus prévisible</u> H <u>borné par</u> 1 , <u>le commutateur</u> $J\beta - \beta J$ <u>est un opérateur borné dans</u> L^2 <u>avec une norme majorée par</u> $c\|B\|_{\underline{\underline{bmo}}_2}$.

Nous avons même une réciproque, qui permet de caractériser les éléments de $\underline{\underline{bmo}}_2$.

PROPOSITION 1 . <u>Soit</u> B <u>une martingale de carré intégrable telle que</u>

$$\sup_J \sup_{\|X\|_2 \leq 1} \|(J\beta - \beta J)(X)\|_2 < \infty \quad ,$$

<u>où le premier</u> sup <u>porte sur tous les opérateurs d'intégrale stochastique par des processus prévisibles bornés par</u> 1 , <u>et où le second porte sur toutes les</u> v.a. <u>de</u> L^2 <u>de norme</u> ≤ 1 . <u>Alors</u> $B-B_0$ <u>est dans</u> $\underline{\underline{bmo}}_2$.

DEMONSTRATION. Soient T un temps d'arrêt et A un élément de $\underline{\underline{F}}_T$. En posant $H=1_{[\![0,T]\!]}$ et $X=1_A$, nous avons $J\beta(X)-\beta J(X)=(B_T-B_\infty)1_A$, d'où

$$E\left[(B_\infty-B_T)^2 1_A\right] \leqslant c\ P(A)\ . \blacksquare$$

Par dualité, le théorème 1 nous donne le

COROLLAIRE 1 . Si $U,V\in L^2$ et si J est l'opérateur d'intégrale stochastique par H prévisible, avec $|H|\leqslant 1$, alors $U(JV)-V(JU)$ est dans $\underline{\underline{h}}^1$ et

$$\|U(JV)-V(JU)\|_{\underline{\underline{h}}^1}\leqslant c\|U\|_2\|V\|_2\ .$$

DEMONSTRATION. Supposons d'abord U dans L^∞ et soit B dans $\underline{\underline{bmo}}_2$. Comme J est auto-adjoint dans L^2 ,

$$|E[B(V(JU)-U(JV))]| = |E[V(B(JU)-J(BU))]| \leqslant c\|V\|_2\|B\|_{\underline{\underline{bmo}}_2}\|U\|_2$$

donc, puisque le dual de $\underline{\underline{h}}^1$ est $\underline{\underline{bmo}}_2$,

$$\|V(JU)-U(JV)\|_{\underline{\underline{h}}^1}\leqslant c\|U\|_2\|V\|_2\ .$$

Si maintenant U est dans L^2 et si (U_n) est une suite dans L^∞ telle que $\|U_n-U\|_2\to 0$, alors $W_n=V(JU_n)-U_n(JV)$ converge dans L^1 vers $V(JU)-U(JV)$. Comme (W_n) est une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{h}}^1$, que $\underline{\underline{h}}^1$ est complet [7], et que la convergence dans $\underline{\underline{h}}^1$ entraîne la convergence dans L^1 , nous obtenons

$$\|V(JU)-U(JV)\|_{\underline{\underline{h}}^1} \leqslant c\|U\|_2\|V\|_2\ . \blacksquare$$

2 . OPERATEURS DE MARTINGALES

Ce paragraphe est consacré à la présentation de familles d'opérateurs plus larges que les opérateurs d'intégrale stochastique par les processus prévisibles bornés. Ce sera juste ce qu'il nous faudra pour étendre dans le dernier paragraphe le théorème 3 de [6].

DEFINITIONS.

- Nous dirons que J est un opérateur de martingales si :
  - a/J est une application linéaire de l'espace des martingales locales dans lui-même;
  - b/pour toute martingale locale X et tout temps d'arrêt T , $J(X^T)=(J(X))^T$.
- Nous dirons que J est un opérateur de martingales borné dans L^p $(1<p<\infty)$ si :
  - a/J est une application linéaire de l'espace des martingales locales,localement dans L^p , dans lui-même;
  - b/la restriction de J à L^p est bornée dans L^p ;
  - c/pour toute martingale locale X , localement dans L^p , et tout temps d'arrêt T , $J(X^T)=(J(X))^T$.

En fait, cette propriété de commutation aux espérances conditionnelles par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_T$ en entraîne une autre, comme l'a remarqué M.Yor pour p=2 [8,lemme 1]. Rappelons que si $t\geq 0$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$, t_A désigne le temps d'arrêt égal à t sur A , à $+\infty$ sur A^c .

PROPOSITION 2 . <u>Tout opérateur</u> J <u>borné dans</u> L^p (<u>où</u> $1<p<\infty$), <u>commutant aux espérances conditionnelles par rapport aux tribus</u> $\underline{\underline{F}}_{t_A}$, <u>où</u> $t\geq 0$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$, <u>commute également aux opérateurs d'intégrale stochastique par rapport aux processus prévisibles bornés.</u>

DEMONSTRATION. Si H est de la forme $1_{[\![0_A]\!]}$ pour $A\in\underline{\underline{F}}_0$, ou $1_{]\!]s_B,t_B]\!]}$, $s<t$ et $B\in\underline{\underline{F}}_s$, nous avons par hypothèse, pour $X\in L^p$,

$$J(H.X) = H.(JX) \quad .$$

On passe ensuite aux processus prévisibles bornés en remarquant que la tribu prévisible est engendrée par les processus H ci-dessus et en vérifiant que les conditions d'application du théorème des classes monotones [2,p.20] sont bien remplies : si H^n converge uniformément vers H prévisible borné,

$H^n.X \to H.X$ dans L^p puisque (Burkholder) $E[(\int_0^\infty (H_s-H_s^n)^2 d[X,X]_s)^{p/2}] \to 0$,

donc $J(H^n.X) \to J(H.X)$ dans L^p par continuité de J , tandis que

$H^n.JX \to H.JX$ dans L^p puisque $E[(\int_0^\infty (H_s-H_s^n)^2 d[JX,JX]_s)^{p/2}] \to 0$;

même chose si H^n converge en croissant vers H . ∎

Une conséquence immédiate de cette proposition, obtenue en posant $H=1_{[\![0,T]\!]}$, est que tout opérateur borné dans L^p commutant aux espérances conditionnelles par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_{t_A}$, commute à toutes les espérances conditionnelles par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_T$ et peut ainsi se prolonger par localisation et recollement en un opérateur de martingales borné dans L^p .

Remarquons que les opérateurs d'intégrale stochastique par des processus optionnels bornés [5] définissent pour tout $1<p<\infty$ des opérateurs de martingales bornés dans L^p . On peut se demander s'il en existe d'autres. S'il existe une martingale M de carré intégrable telle que toute martingale nulle en zéro soit une intégrale stochastique de M par un processus prévisible, il a été montré dans [8] que la classe des opérateurs de martingales bornés dans L^2 est réduite aux opérateurs d'intégrale stochastique par les processus prévisibles bornés. Cependant, ce n'est pas la situation générale : Yor en donne un exemple [8,p.510], nous en verrons un second un peu plus loin.

Voici une caractérisation commode des opérateurs de martingales bornés dans L^2 .

THEOREME 2 . Soit J un opérateur borné dans L^2 , de norme ≤ 1 , et commutant à l'espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}_0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a/ J commute aux espérances conditionnelles par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_{t_A}$;

b/ pour toute martingale M de carré intégrable, $\langle M,M\rangle - \langle JM,JM\rangle$ est un processus croissant.

DEMONSTRATION. a/ Soit M une martingale de carré intégrable et soit N=JM . Pour $s<s'$ et $A\in\underline{\underline{F}}_s$, si $X=M_{s'_A}-M_{s_A}$, alors $JX=N_{s'_A}-N_{s_A}$ et

$$E[(N_{s'}-N_s)^2 1_A] = E[(JX)^2] \leq E[X^2] = E[(M_{s'}-M_s)^2 1_A] .$$

Si τ est la subdivision $(u=t_0<t_1<\ldots<t_n=t)$,

$$\Sigma_i\ E[(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^2|\underline{\underline{F}}_{t_i}] \leq \Sigma_i\ E[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2|\underline{\underline{F}}_{t_i}] .$$

Lorsque le pas de τ tend vers 0 , le premier membre tend dans $\sigma(L^1,L^\infty)$ vers $\langle N,N\rangle_u^t$, le second vers $\langle M,M\rangle_u^t$ [3], et par conséquent

$$\langle N,N\rangle_u^t \leq \langle M,M\rangle_u^t .$$

b/ Si T est un temps d'arrêt et M une martingale de carré intégrable, de $\langle M^T,M^T\rangle_T^\infty=0$ nous tirons d'après l'hypothèse que $\langle J(M^T),J(M^T)\rangle_T^\infty=0$, et cela entraîne que $J(M^T)=(J(M^T))^T$. D'autre part, le processus

$$\langle M-M^T,M-M^T\rangle = \langle M,M\rangle - \langle M,M\rangle^T$$

étant nul sur $[\![0,T]\!]$, il en résulte que

$$\langle J(M-M^T),J(M-M^T)\rangle_0^T = 0 .$$

Comme J commute à l'espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}_0$, la martingale $J(M-M^T)$ est nulle en zéro, d'où $(J(M))^T=(J(M^T))^T$, et on a vu que ce dernier terme vaut $J(M^T)$. ■

COROLLAIRE 2 . Si J est un opérateur de martingales borné dans L^2 , sa restriction à $\underline{\underline{h}}^1$ est bornée dans $\underline{\underline{h}}^1$.

DEMONSTRATION. J est bien défini sur $\underline{\underline{h}}^1$ puisque les martingales de $\underline{\underline{h}}^1$ sont localement de carré intégrable. Si $\|J\|$ est la norme de J comme opérateur dans L^2 , d'après le théorème 2 et par localisation,

$$\langle JM,JM\rangle_\infty \leq \|J\|^2 \langle M,M\rangle_\infty ,$$

d'où la conclusion. ■

COROLLAIRE 3 . <u>Soient</u> J <u>un opérateur de martingales borné dans</u> L^2 <u>et</u> M <u>une martingale de carré intégrable nulle en zéro</u>.

a/ <u>Si</u> M <u>est somme compensée de sauts prévisibles, il en est de même de</u> JM .

b/ <u>Si</u> M <u>n'a pas de saut prévisible, il en est de même de</u> JM .

DEMONSTRATION. a/ Si T est un temps d'arrêt prévisible >0 , si $U \in L^2(\underline{\underline{F}}_T)$ et $E[U|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$, la martingale U_t est égale à $U1_{\{T\leq t\}}$, d'où $JU=J(U^T)=(JU)^T$, donc la martingale JU est arrêtée en T . Si (T_n) est une suite annonçant T , $U^{T_n}=0$, donc $(JU)^{T_n}=0$, ce qui prouve que JU est nulle avant T . On passe ensuite aisément par linéarité et continuité aux sommes finies puis dénombrables de sauts prévisibles.

b/ On sait que M n'a pas de saut prévisible si et seulement si $\langle M,M\rangle$ est continu. D'après le théorème 2, $\langle JM,JM\rangle$ est nécessairement continu si $\langle M,M\rangle$ l'est. ■

Cependant, l'image d'une martingale continue n'est pas nécessairement continue et à l'inverse l'image d'une martingale purement discontinue peut être continue et non constante. Considérons un espace sur lequel sont définis un mouvement brownien B et un processus de Poisson compensé P indépendants avec pour $(\underline{\underline{F}}_t)$ la filtration engendrée par B et P . Toute martingale de carré intégrable s'écrit alors

$$M = a + H.B + K.P ,$$

où a est une constante, H et K sont prévisibles et vérifient

$$E\left[\int_0^\infty (H_s^2+K_s^2)ds\right] < \infty .$$

Si on définit J par

$$JM = a + K.B + H.P ,$$

J est un opérateur de martingales borné dans L^2 qui permute B et P .

En fait les opérateurs de martingales les plus intéressants sont ceux dont la restriction à chacun des L^p $(1<p<\infty)$ y est bornée; D'après la théorie de Burkholder-Gundy [1], c'est le cas des opérateurs que Herz [4] appelle des <u>contractions de martingales</u> et qui possèdent par définition les trois propriétés suivantes :

- J est un opérateur de martingales ;
- la restriction de J à L^2 est bornée dans L^2 ;
- la restriction de J à $\underline{\underline{H}}^1_v$ est bornée de $\underline{\underline{H}}^1_v$ dans $\underline{\underline{H}}^1$.

Il est aussi possible dans ce cas, grâce à la décomposition de Davis, de démontrer que la restriction de J à $\underline{\underline{H}}^1$ y est bornée, et c'est le point central de la démonstration des inégalités de Davis par Herz [4].

3. COMMUTATEURS DE L^p

Fixons p, où $1<p<\infty$, et désignons par q le conjugué de p $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$. Considérons un opérateur de martingales J borné dans L^p, de norme $\|J\|$. Si B est maintenant une martingale de $\underline{\underline{BMO}}$ et si $X\in L^p$, l'expression (1) de B_tX_t est encore valable, mais si B n'est pas bornée, l'intégrale stochastique $\int_0^t B_{s-}dX_s$ n'est pas nécessairement convergente à l'infini dans L^p. Cependant, elle converge dans L^r pour tout $r<p$: du fait que $B\in\underline{\underline{BMO}}$, $B_\infty\in L^s$ pour tout $s<\infty$ d'après l'inégalité de John-Nirenberg et par conséquent

$$E[(\int_0^\infty B_{s-}^2 d[X,X]_s)^{r/2}] \leq E[\sup_t |B_t|^r \, [X,X]_\infty^{r/2}]$$

$$\leq (E[\sup_t |B_t|^{\frac{pr}{p-r}}])^{\frac{p-r}{p}} (E[[X,X]_\infty^{p/2}])^{r/p} \quad .$$

Occupons-nous d'abord des autres termes figurant dans le second membre de (1).

LEMME 3 . Si B est dans $\underline{\underline{BMO}}$, l'opérateur $X\mapsto [B,X]_\infty$ est borné dans L^p avec une norme majorée par $c\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}$.

DEMONSTRATION. On décompose $[B,X]$ en différence de deux processus croissants adaptés A^+ et A^- ; l'inégalité de Fefferman sous forme conditionnelle donne avec $b=\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}$

$$E[A_\infty^+-A_{T-}^++A_\infty^--A_{T-}^-|\underline{\underline{F}}_T]= E[\int_{[T,\infty[} |d[B,X]_s|\,|\underline{\underline{F}}_T] \leq cb\; E[([X,X]_{T-}^{\infty})^{1/2}|\underline{\underline{F}}_T]$$

et d'après la version optionnelle du lemme de Garsia,

$$E[(A_\infty^++A_\infty^-)^p] \leq cb^p\; E[[X,X]_\infty^{p/2}] \quad . \blacksquare$$

LEMME 4 . Si B est dans $\underline{\underline{BMO}}$, l'opérateur $X\mapsto\int_0^\infty X_{s-}dB_s$ est borné dans L^p avec une norme majorée par $c\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}$.

DEMONSTRATION. Posons $K_t=\sup_{s\leq t}X_s^2$; c'est un processus croissant continu à droite et adapté. Pour tout temps d'arrêt T ,

$$E[\int_{[T,\infty[} X_{s-}^2 d[B,B]_s|\underline{\underline{F}}_T] \leq E[\int_{[T,\infty[} K_s d[B,B]_s|\underline{\underline{F}}_T] = E[\int_{[T,\infty[} [B,B]_{s-}^\infty dK_s|\underline{\underline{F}}_T] \quad .$$

Le processus $[B,B]_\infty-[B,B]_{t-}$ ayant sa projection optionnelle majorée par b^2 , il vient

$$E[\int_{[T,\infty[} X_{s-}^2 d[B,B]_s|\underline{\underline{F}}_T] \leq b^2\; E[K_\infty|\underline{\underline{F}}_T] \quad .$$

Si $p\geq 2$, le lemme de Garsia permet d'affirmer que

$$E[(\int_0^\infty X_{s-}^2 d[B,B]_s)^{p/2}] \leq cb^p\; E[K_\infty^{p/2}] \quad ,$$

et avec les inégalités de Burkholder et de Doob cela donne

$$E[|\int_0^\infty X_{s-}dB_s|^p] \leq cb^p\, E[|X|^p] \ .$$

Lorsque $1<p<2$, nous allons obtenir le résultat par dualité. Pour $X\in L^p$ et $Y\in L^\infty$, si $W=B_-.X$ et $Z=B_-.Y$, nous avons vu que W converge dans L^r pour tout $r<p$ et on voit de même que Z converge dans L^s pour tout $s<\infty$. On a alors pour tout t

$$E[Y_t\int_0^t B_{s-}dX_s] = E[\int_0^t Y_{s-}dW_s] + E[\int_0^t W_{s-}dY_s] + E[\int_0^t B_{s-}d[X,Y]_s]$$

$$E[X_t\int_0^t B_{s-}dY_s] = E[\int_0^t X_{s-}dZ_s] + E[\int_0^t Z_{s-}dX_s] + E[\int_0^t B_{s-}d[X,Y]_s] \quad ;$$

on vérifie encore sans peine grâce aux inégalités de Burkholder que les intégrales stochastiques des membres de droite sont uniformément intégrables donc d'espérance nulle, d'où

$$\begin{aligned} E[Y_t(B_tX_t)-Y_t\int_0^t B_{s-}dX_s] &= E[X_t(B_tY_t)-X_t\int_0^t B_{s-}dY_s] \\ &\leq \|X\|_p \, \|B_tY_t-\int_0^t B_{s-}dY_s\|_q \\ &= \|X\|_p \, \|\int_0^t Y_{s-}dB_s+[B,Y]_t\|_q \\ &\leq c\,\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}\, \|X\|_p\, \|Y\|_q \end{aligned}$$

puisque $q>2$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|B_tX_t-\int_0^t B_{s-}dX_s\|_p &= \sup_{Y\in L^\infty,\|Y\|_q\leq 1} E[Y_t(B_tX_t)-Y_t\int_0^t B_{s-}dX_s] \\ &\leq c\,\|X\|_p\,\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}} \ . \end{aligned}$$

Par différence, nous pouvons en conclure que la martingale $\int_0^t X_{s-}dB_s$ converge dans L^p , avec

$$\|\int_0^\infty X_{s-}dB_s\|_p \leq c\|X\|_p\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}} \ . \quad \blacksquare$$

Passons à l'expression du commutateur. Posons pour tout $n\geq 1$

$$T_n = \inf\{t:|B_t|>n\} \ .$$

D'après la proposition 2, pour tout n,

$$(B_-.JX)^{T_n} = B_-1_{[\![0,T_n]\!]}.JX = J(B_-1_{[\![0,T_n]\!]}.X) = J((B_-.X)^{T_n}) = (J(B_-.X))^{T_n}$$

et cela entraîne que les martingales $J(B_-.X)$ et $B_-.JX$ sont identiques. Des expressions

$$J\beta(X) = J(\int_0^\infty B_{s-}dX_s) + J(\int_0^\infty X_{s-}dB_s) + J([B,X]_\infty)$$

$$\beta J(X) = \int_0^\infty B_{s-}d(JX)_s + \int_0^\infty (JX)_{s-}dB_s + [B,JX]_\infty$$

nous tirons

$$J\beta(X) - \beta J(X) = J(\int_0^\infty X_{s-}dB_s) + J([B,X]_\infty) - \int_0^\infty (JX)_{s-}dB_s - [B,JX]_\infty .$$

Les lemmes 3 et 4 nous permettent alors d'établir le

THEOREME 3 . <u>Si</u> B <u>est dans</u> $\underline{\underline{BMO}}$, <u>si</u> J <u>est un opérateur de martingales borné dans</u> L^p , <u>de norme</u> $\|J\|$, <u>le commutateur</u> $J\beta-\beta J$ <u>est un opérateur borné dans</u> L^p <u>avec une norme majorée par</u> $c\|J\| \|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}$.

Nous en déduisons aisément le

COROLLAIRE 4 . <u>Si</u> $U\in L^p$, $V\in L^q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ <u>et si</u> J <u>est l'opérateur d'intégrale stochastique par un processus optionnel</u> H , <u>avec</u> $|H|\leq 1$, <u>alors</u>

$$\|U(JV)-V(JU)\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq c\|U\|_p\|V\|_q .$$

DEMONSTRATION. Si H est optionnel, borné, si $M_t=E[M_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ avec $M_\infty\in L^\infty$ et $N_t=E[N_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ avec $N_\infty\in L^q$, par définition de H.M et de H.N ,

$$E[N_\infty(H.M)_\infty] = E[\int_0^\infty H_s d[M,N]_s] = E[M_\infty(H.N)_\infty] .$$

Pour B dans $\underline{\underline{BMO}}$, U dans L^∞ et V dans L^q, nous obtenons donc

$$|E[B(U(JV)-V(JU))]| = |E[V(J(BU)-B(JU))]| \leq c\|V\|_q\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}\|U\|_p$$

et on conclut comme dans le corollaire 1 en approchant U dans L^p par une suite (U_n) dans L^∞. ■

Département de Mathématiques
Université d'Orléans

REFERENCES

[1] D.L.BURKHOLDER et R.F.GUNDY. Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta Math. 124,249-304,1970 .

[2] C.DELLACHERIE et P.A.MEYER. <u>Probabilités et potentiel</u>. Hermann 1975 .

[3] C.DOLEANS. Construction du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D). C.R.Acad.Sci.Paris 264,600-602,1967 .

[4] C.HERZ. Bounded mean oscillation and regulated martingales. Trans. Amer.Math.Soc. 193,199-215,1974 .

[5] P.A.MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Proba.X. Lecture Notes in Math. 511. Springer 1976 .

[6] P.A.MEYER. Caractérisation de BMO par un opérateur maximal. Séminaire Proba. XI. Lecture Notes in Math. 581. Springer 1977 .

[7] M.PRATELLI. Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable. Séminaire Proba.X. Lecture Notes in Math. 511. Springer 1976 .

[8] M.YOR. Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques. Séminaire Proba. XI. Lecture Notes in Math. 581 Springer 1977 .