

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE LÉPINGLE

Une inégalité de martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 134-137

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__134_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE INEGALITE DE MARTINGALES

par D.Lepingle

Dans [2], P.A.Meyer utilise et redémontre à cette occasion une intéressante inégalité due à E.Stein [3]: si $(Z_n, n \geq 1)$ est une suite de v.a., si $(\mathbb{F}_n, n \geq 0)$ est une suite croissante de tribus, et si $1 < p < \infty$, il existe une constante a_p telle que

$$(I_p) \quad \|(\sum_n E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_p \leq a_p \|(\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_p$$

S'il existait une inégalité I_1 , on aurait aussi par dualité une inégalité I_∞ . En effet, si $\|(\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_\infty < \infty$,

$$\|(\sum_n E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_\infty = \sup \sum_n E[E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}] H_n]$$

pour toutes les suites (H_n) vérifiant $E[(\sum_n H_n^2)^{1/2}] \leq 1$. Mais

$$E[E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}] H_n] = E[H_n | \mathbb{F}_{n-1}] Z_n,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|(\sum_n E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_\infty &\leq \|(\sum_n E[H_n | \mathbb{F}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_1 \|(\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_\infty \\ &\leq a_1' \|(\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_\infty. \end{aligned}$$

On peut vérifier sur l'exemple suivant qu'il n'y a pas d'inégalité I_∞ .

Exemple. Prenons

$$\Omega = [0, 1[$$

$$Z_n = 1 \quad \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right[\quad n \geq 1$$

$$\mathbb{F}_n \quad (n \geq 0) \text{ tribu sur } \Omega \text{ engendrée par les intervalles } \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[.$$

Nous avons $\sum_n Z_n^2 = 1$, tandis que

$$(\sum_n E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}]^2)^{1/2} = \frac{k}{2}^{1/2} \quad \text{sur } \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}} \right[,$$

et cette expression n'est pas bornée sur $[0, 1[$.

Pourtant, nous allons voir que l'inégalité I_1 existe avec $a_1=2$, à condition d'imposer une condition supplémentaire : les Z_n sont $\mathbb{F}_n$ -mesurables (cela ne marche toujours pas pour $p=\infty$ car les Z_n du contre-exemple ci-dessus sont bien $\mathbb{F}_n$ -mesurables). La démonstration est tout à fait différente de celles de Stein et Meyer, elle est en fait intimement liée au théorème de dualité entre $\underline{H}^1$ et $\underline{BMO}$, et peut en être considérée comme une conséquence. Cependant, on la redonne ci-dessous in extenso, car elle est plutôt plus simple que la preuve de la dualité $\underline{H}^1$ - $\underline{BMO}$.

THEOREME . Soit $(\mathbb{F}_n, n \geq 0)$ une suite croissante de sous-tribus dans $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. adaptée à $(\mathbb{F}_n)$. Alors

$$E \left[\left(\sum_n E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}]^2 \right)^{1/2} \right] \leq 2 E \left[\left(\sum_n Z_n^2 \right)^{1/2} \right].$$

DEMONSTRATION. Nous supposons le second membre fini et posons

$$z_n = E[Z_n | \mathbb{F}_{n-1}].$$

Alors

$$E \left[\left(\sum_n z_n^2 \right)^{1/2} \right] = \sup E \left[\sum_n z_n h_n \right],$$

où la suite (h_n) parcourt la boule unité du dual $L^\infty(\mathcal{L}^2)$ de $L^1(\mathcal{L}^2)$. Si

$$h_n = E[H_n | \mathbb{F}_{n-1}],$$

alors

$$E[z_n h_n] = E[z_n h_n] = E[Z_n h_n].$$

Posons

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 & X_n &= \sum_{k=1}^n z_k^2 \\ Y_0 &= 0 & Y_n &= \sum_{k=1}^n h_k^2, \end{aligned}$$

et majorons

$$\begin{aligned} \sum_n E[|Z_n| |h_n|] &= E \left[\sum_n \frac{|Z_n|}{x_n^{1/4}} x_n^{1/4} |h_n| \right] \\ &\leq \left(E \left[\sum_n \frac{z_n^2}{x_n^{1/2}} \right] \right)^{1/2} \left(E \left[\sum_n x_n^{1/2} h_n^2 \right] \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme,

$$E\left[\sum_n \frac{Z_n^2}{X_n^{1/2}}\right] = E\left[\sum_n \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n^{1/2}}\right] \leq 2E\left[\sum_n (X_n^{1/2} - X_{n-1}^{1/2})\right] = 2E[X_\infty^{1/2}] .$$

Pour le second terme,

$$E\left[\sum_n X_n^{1/2} h_n^2\right] = E\left[\sum_n X_n^{1/2} (Y_n - Y_{n-1})\right] = E\left[\sum_n (Y_\infty - Y_{n-1})(X_n^{1/2} - X_{n-1}^{1/2})\right]$$

Comme (Z_n) est adaptée, (X_n) est adaptée et cela montre que le dernier terme est égal à $E\left[\sum_n (E[Y_\infty - Y_{n-1} | \mathcal{F}_n])(X_n^{1/2} - X_{n-1}^{1/2})\right]$. Mais

$$E[Y_\infty - Y_{n-1} | \mathcal{F}_n] = h_n^2 + E\left[\sum_{k>n} h_k^2 | \mathcal{F}_n\right] \leq h_n^2 + E\left[\sum_{k>n} H_k^2 | \mathcal{F}_n\right] \leq 2 ,$$

d'où

$$E\left[\sum_n X_n^{1/2} h_n^2\right] \leq 2 E[X_\infty^{1/2}] .$$

On aura reconnu presque exactement la méthode due à C. Herz de démonstration de la dualité $\underline{H}^1 - \underline{BMO}$, cependant nous n'avons pas prononcé du tout le mot "martingale" (sauf dans le titre!) . Nous avons plutôt démontré le résultat suivant:

si la racine carrée de la variation quadratique d'un processus optionnel (discret) est intégrable, c'est vrai aussi pour le compensateur prévisible de ce processus.

Il est facile en reprenant la démonstration d'obtenir également l'inégalité suivante, sous la même condition pour (Z_n) :

$$E\left[\left(\sum_n (Z_n - E[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}])^2\right)^{1/2}\right] \leq 2\sqrt{2} E\left(\sum_n Z_n^2\right)^{1/2}$$

(la meilleure constante est quelque part entre 2 et $2\sqrt{2}$) . Cette fois-ci, c'est bien un résultat de martingales : si la racine carrée de la variation quadratique d'un processus optionnel A est intégrable, la martingale compensée de A est dans $\underline{H}^1$.

Le passage au temps continu ne présente pas de difficulté : si X optionnel est tel que $\{X \neq 0\}$ soit à coupes dénombrables et si $E[(\sum_t X_t^2)^{1/2}] < \infty$, alors X admet une projection prévisible $\tilde{X}$, il existe une unique martingale N dans $\underline{H}^1$ somme compensée de sauts telle que $\Delta N = X - \tilde{X}$ et

$$E\left[[N, N]_\infty^{1/2}\right] \leq 2\sqrt{2} E\left[(\sum_t X_t^2)^{1/2}\right] .$$

En particulier, si M est une martingale locale, si H est optionnel et si

$$E\left[\left(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s\right)^{1/2}\right] < \infty ,$$

alors l'intégrale optionnelle H.M vérifie [1, lemme V.18]

$$E\left[[H.M, H.M]_\infty^{1/2}\right] \leq 2\sqrt{2} E\left[\left(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s\right)^{1/2}\right] .$$

REFERENCES

- [1] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Proba. X, Lecture Notes in Math. 511, Springer, Berlin (1976).
- [2] P.A. MEYER : Martingales locales fonctionnelles additives II.
(à paraître).
- [3] E.M. STEIN : Topics in harmonic analysis . Princeton (1970).