Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Toshio Yamada

Sur une construction des solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas non-lipschitzien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 114-131
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__114_0>

SUR UNE CONSTRUCTION DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES DANS LE CAS NON-LIPSCHITZIEN

par

Toshio YAMADA

Nous consacrons cet article à l'étude du type d'équations que nous avons déjà discuté dans l'article [6]. Dans ce dernier, nous avons démontré que la solution approchée par la méthode des différences finies converge au sens de L^1 vers la solution, sous certaines conditions comprenant la condition höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}$.

Dans cet article-ci, nous allons d'abord donner par la méthode des différences finies une construction de la solution sur un espace probabilisé donné, avec un mouvement brownien donné sur ce dernier.

Puis nous allons voir que la solution approchée converge au sens de L^2 vers la solution. La méthode essentielle que nous utiliserons dans les démonstrations est la même que dans l'article [6]. Mais les démonstrations seront simplifiées et une condition qui a été posée dans ce dernier pour des raisons très techniques n'apparaîtra plus. On connaît déjà l'existence de la solution faible d'équations différentielles stochastiques dont les coefficients sont continus par le théorème de Skorohod [3]. On connaît aussi l'existence de la solution stricte dans le cas où il y a unicité trajectorielle (voir par exemple [5]). La construction effectuée dans cet article ne fournit donc rien de nouveau au problème de l'existence des solutions.

Mais elle peut être intéressante si l'on reconnaît sa simplicité par comparaison avec la construction dans le cas général de Skorohod et si l'on remarque qu'elle est faite sur n'importe quel espace probabilisé donné avec un mouvement brownien arbitraire défini sur ce dernier.

Soit $(\Omega,\mathfrak{F},P;\mathfrak{F}_t)$ un espace probabilisé muni d'une famille croissante de tribus $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ telle que $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ si $s<t$, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ pour chaque t.

Soient $\sigma(t,x)$ et $b(t,x)$ deux fonctions réelles continues définies sur $[0,\infty)\times R^1$. Supposons que $\sigma(t,x)$ et $b(t,x)$ satisfassent aux conditions suivantes.

(A)(1) Il existe une fonction continue $\rho(u)$ définie sur $[0,\infty)$ telle que

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le \rho(|x-y|) \ , \ \forall\ x,y\in R^1 \ .$$

On suppose que $\rho(0)=0$, que ρ est croissante et que l'on a

$$\int_{0+} \rho^{-2}(u)du = \infty \ . \tag{1}$$

(B) Il existe une constante $K_1>0$ telle que

$$|b(t,x)-b(t,y)| \le K_1|x-y| \ , \ \forall\ x,y\in R^1 \ .$$

C'est-à-dire que $b(t,x)$ satisfait la condition lipschitzienne.

(C) Il existe une constante $K_2>0$ telle que

$$|\sigma(t,x)|+|b(t,x)| \le K_2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Nous allons considérer l'équation différentielle stochastique du type d'Ito

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB_s + \int_0^t b(s,x(s))ds \ . \tag{2}$$

DEFINITION. (Solution de (2)). <u>On appelle solution de l'équation (2) un couple</u> $(x(t),B_t)$ <u>tel que</u>

(i) $x(t)$ <u>et</u> B_t <u>sont définis sur</u> $(\Omega,\mathfrak{F},P;\mathfrak{F}_t)$;

(ii) $x(t)$ <u>est un processus continu par rapport à</u> t <u>et</u> $\mathfrak{F}_t$<u>-adapté</u> ;

---

(1) Dans l'article [6], en plus de ces conditions posées sur ρ, on suppose aussi qu'il existe une constante K_0 et un nombre $N>0$ tels que $\rho(u)\le K_0 u$, si $u\ge N$.

(iii) B_t <u>est un mouvement brownien par rapport à</u> $\mathfrak{F}_t$, $B_0 \equiv 0$, <u>c'est-à-dire que</u> B_t <u>est une martingale continue par rapport à</u> $\mathfrak{F}_t$, $E((B_t - B_s)^2/\mathfrak{F}_s) = t-s$ $(t \geq s \geq 0)$ <u>et</u> $B_0 \equiv 0$;

(iv) $(x(t), B_t)$ <u>satisfait</u>

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB_s + \int_0^t b(s,x(s))ds \ .$$

<u>Remarque 1</u> : Les fonctions $\rho(u) = u^{\alpha}$ $(1 \geq \alpha \geq \frac{1}{2})$,

$$\rho(u) = u^{\frac{1}{2}}(\log \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}} \ , \ \rho(u) = u^{\frac{1}{2}}(\log \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}(\log_{(2)}\frac{1}{u}) \ , \ldots$$

définies dans un voisinage à droite de 0 , satisfont (1).

Maintenant, nous allons définir une solution approchée de l'équation (2) par la méthode des différences finies.

Nous fixons $T > 0$. Soit $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, une subdivision de l'intervalle $[0,T]$ et soit $\|\Delta\| = \sup\limits_{1 \leq \nu \leq n} |t_\nu - t_{\nu-1}|$.

Nous posons $x_\Delta(0) = \alpha(\omega)$ où $\alpha(\omega)$ est $\mathfrak{F}_0$-mesurable. Pour ν , nous posons

$$\begin{aligned} x_\Delta(t_\nu) &= x_\Delta(t_{\nu-1}) + \sigma(t_{\nu-1}, x_\Delta(t_{\nu-1}))(B_{t_\nu} - B_{t_{\nu-1}}) \\ &\quad + b(t_{\nu-1}, x_\Delta(t_{\nu-1}))(t_\nu - t_{\nu-1}) \quad (1 \leq \nu \leq n) \end{aligned}$$

et pour t , $t_\mu \leq t < t_{\mu+1}$, $\mu = 0, \ldots, n-1$, nous posons

$$\begin{aligned} x_\Delta(t) &= x_\Delta(t_\mu) + \sigma(t_\mu, x_\Delta(t_\mu))(B_t - B_{t_\mu}) \\ &\quad + b(t_\mu, x_\Delta(t_\mu))(t - t_\mu) \ . \end{aligned}$$

<u>Remarque 2</u> : Soit $\eta_\Delta(t) = t_\nu$, si $t_\nu \leq t < t_{\nu-1}$, on a alors

$$x_\Delta(t) = \alpha(\omega) + \int_0^t \sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s)))dB_s$$

$$+\int_0^t b(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s)))ds \; .$$

THEOREME. Supposons que $E(\alpha^4(\omega)) < +\infty$.

(i) Soient $(x_\Delta(t),B_t)$, $(x_{\Delta'}(t),B_t)$ deux solutions approchées construites à partir du même mouvement brownien B_t. Supposons que $x_\Delta(0) = x_{\Delta'}(0) = \alpha(\omega)$, alors, $\lim\limits_{\substack{\|\Delta\|\to 0\\ \|\Delta'\|\to 0}} E[\sup\limits_{0\le t\le T} |x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)|^2] = 0$, pour $T < +\infty$.

(ii) On peut construire la solution $(x(t),B_t)$ de l'équation (2), $x(t) = \alpha(\omega) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB_s + \int_0^t b(s,x(s))ds$ où B_t est le même mouvement brownien que dans (i), comme la limite des $x_\Delta(t)$ au sens suivant :

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} E[\sup_{0\le t\le T} |x_\Delta(t) - x(t)|^2] = 0 \; .$$

Pour démontrer le théorème, nous préparons quelques lemmes.

LEMME 1. Sous la condition (C), on a

$$E[x_\Delta^{2p}(t)] \le K_3(1 + E(x_\Delta^{2p}(0))) \; , \; p = 1,2,\ldots$$

où $K_3 > 0$ est une constante indépendante de Δ, de $x_\Delta(0)$ et de t (sans supposer satisfaites les conditions (A) et (B)).

On peut voir la démonstration de ce lemme dans [2].

LEMME 2. Soit A la famille des subdivisions de $[0,T]$. Tous les ensembles suivants sont uniformément intégrables, sous les conditions (C) et $E[\alpha^4(\omega)] < +\infty$.

(i) $\{x_\Delta^p(t) \; , \; \Delta \in A \; , \; t \in [0,T]\}$; $p = 1,2$;

(ii) $\{b(t,x_\Delta(t)) - b(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t)) \; ; \; \Delta\in A \; , \; t\in[0,T]\}$

(iii) $\{\{\sigma(t,x_\Delta(t)) - \sigma(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t)))\}^2 ; \Delta\in A \; , \; t\in[0,T]\}$

(iv) $\{\{b(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t))) - b(\eta_{\Delta'}(t),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(t)))\}^2 \; ; \; \Delta,\Delta'\in A \; , \; t\in[0,T]\}$

(v) $\{\{\sigma(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t))) - \sigma(\eta_{\Delta'}(t),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(t)))\}^2 \; ; \; \Delta,\Delta'\in A \; , \; t\in[0,T]\}$.

Démonstration : Nous allons donner la démonstration de (iii). D'après la condition (C) et le lemme 1, on a :

$$E[\{\sigma(t,x_\Delta(t)) - \sigma(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t))\}^4]$$

$$\leq 4E[\sigma^4(t,x_\Delta(t))] + 4E[\sigma^4(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t)))]$$

$$\leq 4K_2^4\{E[1+2x_\Delta^2(t)+x_\Delta^4(t)] + E[1+2x_\Delta^2(\eta_\Delta(t)) + x_\Delta^4(\eta_\Delta(t))]\}$$

$$\leq 8K_2^4\{1+2K_3(1+E[\alpha^2(\omega)]) + K_3'(1+E[\alpha^4(\omega)])\} < +\infty .$$

Puisque le membre de droite ne dépend que de $E[\alpha^2(\omega)]$ et de $E[\alpha^4(\omega)]$, $E[\{\sigma(t,x_\Delta(t)) - \sigma(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t)))\}^2]$ est uniformément borné pour $\Delta \in A$ et $t \in [0,T]$. Alors on peut voir d'après le Théorème de La Vallée Poussin (voir par exemple Dellacherie-Meyer [4], p. 38) que l'ensemble des processus $\{\{\sigma(t,x_\Delta(t)) - \sigma(\eta_\Delta(t),x_\Delta(\eta_\Delta(t))\}^2 \; ; \; \Delta \in A \; , \; t \in [0,T]\}$ est uniformément intégrable.

On peut obtenir les résultats (i), (ii), (iv) et (v) par des méthodes semblables.

LEMME 3. Sous la condition (C), on a

$$E[|x_\Delta(t) - x_\Delta(s)|^2] \leq K_4|t-s| \; , \; t,s \in [0,T]$$

où $K_4 > 0$ est une constante indépendante de $\Delta \in A$, et de $t,s \in [0,T]$ (sans supposer satisfaites les conditions (A) et (B)).

Démonstration : Soit $s \leq t$, nous avons

$$\begin{aligned} E[|x_\Delta(t) - x_\Delta(s)|^2] &\leq 2E[(\int_s^t \sigma(\eta_\Delta(u),x_\Delta(\eta_\Delta(u)))dB_u)^2] \\ &\quad + 2E[(\int_s^t b(\eta_\Delta(u),x_\Delta(\eta_\Delta(u)))du)^2] \\ &\leq 2(\int_s^t E[\sigma^2(\eta_\Delta(u),x_\Delta(\eta_\Delta(u)))]du) \\ &\quad + 2(t-s)(\int_s^t E[b^2(\eta_\Delta(u),x_\Delta(\eta_\Delta(u)))]du) . \end{aligned}$$

D'après la condition (C), on a :

$$\leq 2\left(\int_s^t E[K_2^2(1+x_\Delta^2(\eta_\Delta(u)))]du\right)$$

$$+\ 2(t-s)\left(\int_s^t E[K_2^2(1+x_\Delta^2(\eta_\Delta(u)))]du\right) .$$

D'après le lemme 1, on sait que $E(x_\Delta^2(\eta_\Delta(u))) \leq K_3(1+E[\alpha^2(\omega)])$; alors, on a :

$$\leq 2K_5(t-s)+2K_5(t-s)^2 \leq K_4(t-s)$$

où

$$K_5 = K_2^2\{1+(K_3(1+E[\alpha^2(\omega)]))\}$$

et

$$K_4 = 2(K_5+K_5T) . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

LEMME 4. <u>Etant donné un</u> $\varepsilon>0$, <u>il existe</u> $\delta>0$ <u>tel que</u>

$$\text{(i)}\ E\left[\int_0^T |b(s,x_\Delta(s))-b(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s)))|ds\right]<\varepsilon$$

$$\text{(ii)}\ E\left[\int_0^T \{\sigma(s,x_\Delta(s))-\sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s)))\}^2ds\right]<\varepsilon \quad \text{où} \quad \|\Delta\|<\delta .$$

<u>Démonstration</u> : Nous allons donner seulement la démonstration de (ii). On peut obtenir (i) par la même méthode.

D'abord, nous allons démontrer par l'absurde pour chaque $s\in[0,T]$ que

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} E\{\sigma(s,x_\Delta(s))-\sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s)))\}^2 = 0 . \tag{3}$$

Supposons qu'il y ait une suite de subdivisions Δ_n , $\|\Delta_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$, telle que

$$\lim_n E\{\sigma(s,x_{\Delta_n}(s))-\sigma(\eta_{\Delta_n}(s),x_{\Delta_n}(\eta_{\Delta_n}(s)))\}^2 = c>0 . \tag{4}$$

Posons

Posons

$$\sigma_{2N}(s,x) = \begin{cases} \sigma(s,x) & \text{si } |x| < 2N \\ \sigma(s,2N) & \text{si } x \geq 2N \\ \sigma(s,-2N) & \text{si } x \leq -2N . \end{cases}$$

D'après le lemme 3, on sait que :

$$E[|x_{\Delta_n}(s) - x_{\Delta_n}(\eta_{\Delta_n}(s))|^2] \leq K_4 \|\Delta_n\| ,$$

alors, on peut choisir $\{\Delta_{n_p}\} \subset \{\Delta_n\}$ tel que :

$$|x_{\Delta_{n_p}}(s) - x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))|$$

tend vers 0 (p.s.), lorsque n_p tend vers l'infini.

Nous avons

$$E[\sigma(s,x_{\Delta_{n_p}}(s) - \sigma(\eta_{\Delta_{n_p}}(s),x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$\leq E[\{\sigma_{2N}(s,x_{\Delta_{n_p}}(s)) - \sigma_{2N}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s),x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$+ E[2\sigma^2(s,x_{\Delta_{n_p}}(s)) : |x_{\Delta_{n_p}}(s)| > N]$$

$$+ E[2\sigma^2(s,x_{\Delta_{n_p}}(s)) : |x_{\Delta_{n_p}}(s)| \leq N , |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| > 2N]$$

$$+ E[2\sigma^2(\eta_{\Delta_{n_p}}(s),x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| > N]$$

$$+ E[2\sigma^2(\eta_{\Delta_{n_p}}(s),x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| \leq N , |x_{\Delta_{n_p}}(s)| > 2N] .$$

D'après le lemme 3, on a :

$$P(|x_{\Delta_{n_p}}(s) - x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| > N) \leq \frac{K_4^{\frac{1}{2}}\|\Delta_{n_p}\|^{\frac{1}{2}}}{N} .$$

Alors, d'après la condition (C), on peut obtenir que

$$E[\{\sigma(s,x_{\Delta_{n_p}}(s)) - \sigma(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$\leq E[\{\sigma_{2N}(s,x_{\Delta_{n_p}}(s)) - \sigma_{2N}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$+ E[2K_2^2(1 + x^2_{\Delta_{n_p}}(s)) : |x_{\Delta_{n_p}}(s)| > N]$$

$$+ 2K_2^2(1+N^2)\,\frac{K_4^{\frac{1}{2}}\|\Delta n_p\|^{\frac{1}{2}}}{N}$$

$$+ E[2K_2^2(1 + x^2_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| > N]$$

$$+ 2K_2^2(1+N^2)\,\frac{K_4^{\frac{1}{2}}\|\Delta n_p\|^{\frac{1}{2}}}{N}$$

$$= E[I_1] + E[I_2] + E[I_3] + 4K_2^2(1+N^2)\,\frac{K_4^{\frac{1}{2}}\|\Delta n_p\|^{\frac{1}{2}}}{N} .$$

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Nous savons d'après le lemme 2 que $x^2_\Delta(t)$, $\Delta \in A$, $t \in [0,T]$ sont uniformément intégrables, alors, on peut choisir N tel que $E[I_2] + E[I_3] < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour N fixée, $\sigma_{2N}(s,x)$ est uniformément continu par rapport à $(s,x) \in [0,T] \times R^1$. Par ailleurs $|\eta_{\Delta_{n_p}}(s) - s|$ tend vers 0 $(p \to \infty)$ et $|x_{\Delta_{n_p}}(s) - x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))|$ tend vers 0 , p.s. $(p \to \infty)$. Alors, on peut choisir n_{p_1} tel que $E[I_1] < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n_{p_1} < n_p$.

Enfin, on peut choisir n_{p_2} tel que

$$4K_2^2(1+N^2)\,\frac{K_4^{\frac{1}{2}}\|\Delta n_p\|^{\frac{1}{2}}}{N} < \frac{\varepsilon}{3} , \text{ pour } n_{p_2} < n_p .$$

Finalement, on a pour $n_p > \max(n_{p_1}, n_{p_2})$

$$E[\{\sigma(s,x_{\Delta_{n_p}}(s)) - \sigma(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)))\}^2] < \varepsilon .$$

Cette inégalité est contradictoire à (4). Alors, on en déduit

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} E[\{\sigma(s,x_\Delta(s)) - \sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s)))\}^2] = 0 .$$

Pour finir la démonstration, remarquons que

$$E[\{\sigma(s,x_\Delta(s)) - \sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s)))\}^2] \ , \ s \in [0,T]$$

sont uniformément intégrables par rapport à ds sur $[0,T]$. (Cela résulte de l'inégalité

$$\int_0^T [E\{\sigma(s,x_\Delta(s)) - \sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s)))\}^2]^2 ds$$

$$\leq \int_0^T \{4K_2^2(1+K_3(1+E(\alpha^2(\omega))))\}^2 ds < +\infty .)$$

Alors, on a, d'après (3)

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} E\left(\int_0^T \{\sigma(s,x_\Delta(s)) - \sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s)))\}^2 ds\right) = 0 .$$

C.Q.F.D.

Nous allons utiliser la fonction $\varphi_m(u)$ que nous avons introduite pour traiter de l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques (voir [5]) c'est-à-dire, soit $1 = a_0 > a_1 > \ldots > a_m > 0$ une suite telle que

$$\int_{a_1}^{a_0} \rho^{-2}(u)du = 1, \ldots \int_{a_m}^{a_{m-1}} \rho^{-2}(u)du = m \ , \ a_m \to 0 \quad (m \to \infty) .$$

Soit $\varphi_m(u)$, $m = 1,2,\ldots$, une suite de fonctions telle que

(i) $\varphi_m(u)$ est définie sur $[0,\infty)$ et appartient à $C^2([0,\infty))$ et $\varphi_m(0) = 0$

$$\text{(ii)} \quad \varphi_m'(u) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq u \leq a_m \\ \text{entre } 0 \text{ et } 1 & , \ a_m < u < a_{m-1} \\ 1 & , \ u \geq a_{m-1} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad \varphi_m''(u) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq u \leq a_m \\ \text{entre } 0 \text{ et } \frac{2}{m}\rho^{-2}(u) & , \ a_m < u < a_{m-1} \\ 0 & , \ u \geq a_{m-1} \end{cases}$$

Et puis nous prolongeons $\varphi_m(u)$ sur $(-\infty,\infty)$ symétriquement, c'est-à-dire, $\varphi_m(u) = \varphi_m(|u|)$. Alors, on peut voir que $\varphi_m(u)$ appartient à $C^2[(-\infty,\infty)]$

et $\varphi_m(u) \uparrow |u|$.

On peut obtenir très facilement le lemme suivant.

LEMME 5. $|u| - a_m \leq \varphi_m(u)$.

Enfin, nous pouvons passer à la démonstration du théorème.

<u>1re étape</u> : Démonstration du fait que

$$\lim_{\substack{\|\Delta\| \to 0 \\ \|\Delta'\| \to 0}} E|x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)| = 0 \quad \text{pour chaque} \quad t \in [0,T] \text{ .}$$

D'après le lemme 5 et la formule d'Ito, nous avons

$$\text{(5)} \qquad E|x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)| - a_m \leq E[\varphi_m(x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t))]$$

$$= E[\varphi_m(x_\Delta(0), x_{\Delta'}(0))]$$

$$+ E[\int_0^t \varphi_m'(x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s))\{\sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(s)) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(s))\}dB_s]$$

$$+ E[\int_0^t \varphi_m'(x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s))\{b(\eta_\Delta(s), x_\Delta(s)) - b(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(s))\}ds]$$

$$+ E[\tfrac{1}{2} \int_0^t \varphi_m''(x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s))\{\sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(s)) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(s))\}^2 ds] \text{ .}$$

Nous savons que $\varphi_m(x_\Delta(0), x_{\Delta'}(0)) = \varphi_m(\alpha(\omega), \alpha(\omega)) = 0$ et que le deuxième terme du membre de gauche de (5) est aussi 0 , et nous rappelons que $|\varphi_m'(u)| \leq 1$. Donc, on a d'après (5)

$$\text{(6)} \qquad E|x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)|$$

$$\leq a_m + E[\int_0^t |b(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - b(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))|ds]$$

$$+ E[\tfrac{1}{2} \int_0^t \varphi_m''(x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s))\{\sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\}^2 ds]$$

$$= a_m + E[I^{\Delta,\Delta'}] + E[J^{\Delta,\Delta'}] \text{ .}$$

Pour $E[I^{\Delta,\Delta'}]$, on a

(7) $$E[I^{\Delta,\Delta'}] \le E[\int_0^t |b(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - b(s,x_\Delta(s))|ds]$$

$$+ E[\int_0^t |b(s,x_\Delta(s)) - b(s,x_{\Delta'}(s))|ds]$$

$$+ E[\int_0^t |b(s,x_{\Delta'}(s)) - b(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))|ds]$$

$$= E[I_1^{\Delta,\Delta'}] + E[I_2^{\Delta,\Delta'}] + E[I_3^{\Delta,\Delta'}] .$$

Pour $E[J^{\Delta,\Delta'}]$, on a

(8) $$E[J^{\Delta,\Delta'}] \le \frac{3}{2} E[\int_0^t \|\varphi_m''\|\{\sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - \sigma(s,x_\Delta(s))\}^2 ds]$$

$$+ \frac{3}{2} E[\int_0^t \varphi_m''(x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s))\{\sigma(s,x_\Delta(s)) - \sigma(s,x_{\Delta'}(s))\}^2 ds]$$

$$+ \frac{3}{2} E[\int_0^t \|\varphi_m''\|\{\sigma(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s))) - \sigma(s,x_{\Delta'}(s))\}^2 ds]$$

$$= E[J_1^{\Delta,\Delta'}] + E[J_2^{\Delta,\Delta'}] + E[J_3^{\Delta,\Delta'}]$$

où $\|\varphi_m''\| = \sup_u |\varphi_m''(u)|$.

D'après la condition (A) et la définition de φ_m'' , on a

(9) $$E[J_2^{\Delta,\Delta'}]$$

$$\le \frac{3}{2} E[\int_0^t \{ \sup_{a_m \le |x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s)| \le a_{m-1}} \frac{2}{m} \rho^{-2}(x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s))\rho^2(x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s))\} ds]$$

$$\le \frac{3T}{m} .$$

Alors, on peut voir que

(10) $$E[J^{\Delta,\Delta'}] \le \frac{3T}{m} + E[J_1^{\Delta,\Delta'}] + E[J_3^{\Delta,\Delta'}] .$$

Etant donné un $\varepsilon > 0$, on peut choisir $m > 0$, tel que

(11) $$0 < a_m < \frac{\varepsilon}{6} , \ \frac{3T}{m} < \frac{\varepsilon}{6} .$$

Puis d'après le lemme 4, il existe $\delta>0$ tel que

(12)
$$E[I_1^{\Delta,\Delta'}] < \frac{\varepsilon}{6}\ ,\ E[I_3^{\Delta,\Delta'}] < \frac{\varepsilon}{6}\ ,\ E[J_1^{\Delta,\Delta'}] < \frac{\varepsilon}{6}$$
$$E[J_3^{\Delta,\Delta'}] < \frac{\varepsilon}{6}\ .$$

Alors, d'après les relations (6) à (12), on a

$$E|x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)| < \varepsilon + E[I_2^{\Delta,\Delta'}]\ .$$

D'après la condition (B), on a

$$E|x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)| < \varepsilon + K_1 \int_0^t E|x_\Delta(s) - x_{\Delta'}(s)|ds\ .$$

Donc, on en déduit pour $t \in [0,T]$

$$E|x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)| \le \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_1^n T^n}{n!}\ .$$ C.Q.F.D.

<u>2me étape</u> : Nous allons démontrer le fait que

(13)
$$\lim_{\substack{\|\Delta\|\to 0\\ \|\Delta'\|\to 0}} E[\sup_{0\le t\le T} |x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)|^2] = 0\ .$$

D'abord, nous préparons le lemme suivant.

LEMME 6. <u>Etant donné un</u> $\varepsilon>0$, <u>il existe</u> $\delta>0$ <u>tel que</u>

(i) $$E[\int_0^T \{\sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\}^2 ds] < \varepsilon$$

(ii) $$E[\int_0^T \{b(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - b(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\}^2 ds] < \varepsilon$$

où $\|\Delta\|<\delta$ et $\|\Delta'\|<\delta$.

<u>Démonstration</u> : Nous allons donner suelement la démonstration de (i).

D'abord nous démontrerons par l'absurde que

(14)
$$\lim_{\substack{\|\Delta\|\to 0\\ \|\Delta'\|\to 0}} E[\{\sigma(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\}^2] = 0\ ,$$

pour chaque $s \in [0,T]$.

Supposons qu'il y ait deux suites de subdivisions de $[0,T]$, Δ_n ; Δ'_n $n=1,2,\ldots$ telles que $\|\Delta_n\| \to 0$, $\|\Delta'_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ et

(15) $$\lim_{n\to\infty} E[\{\sigma(\eta_{\Delta_n}(s), x_{\Delta_n}(\eta_{\Delta_n}(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'_n}(s), x_{\Delta'_n}(\eta_{\Delta'_n}(s)))\}^2] = c > 0 .$$

Puisque

$$E[|x_{\Delta_n}(\eta_{\Delta_n}(s)) - x_{\Delta'_n}(\eta_{\Delta'_n}(s))|]$$

$$\le E[|x_{\Delta_n}(\eta_{\Delta_n}(s)) - x_{\Delta_n}(s)|] + E[|x_{\Delta_n}(s) - x_{\Delta'_n}(s)|]$$

$$+ E[|x_{\Delta'_n}(s) - x_{\Delta'_n}(\eta_{\Delta'_n}(s))|] ,$$

on a d'après le lemme 3 et le résultat de la 1re étape,

$$\lim_{n\to\infty} E[|x_{\Delta_n}(\eta_{\Delta_n}(s)) - x_{\Delta'_n}(\eta_{\Delta'_n}(s))|] = 0 .$$

Alors, on peut choisir n_p , $p=1,2,\ldots$ tel que

$$\lim_{p\to\infty} |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)) - x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))| = 0 \quad \text{p.s.}$$

Posons

$$\sigma_{2N}(s,x) = \begin{cases} \sigma(s,x) & \text{si } |x| \le 2N \\ \sigma(s,2N) & \text{si } x > 2N \\ \sigma(s,-2N) & \text{si } x < -2N . \end{cases}$$

Nous avons

$$E[\{\sigma(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s), x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$\le E[\{\sigma_{2N}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) - \sigma_{2N}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s), x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$+ E[2\sigma^2(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| \ge N]$$

$$+ E[2\sigma^2(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| < N \,,\ |x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))| > 2N]$$

$$+ E[2\sigma^2(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s), x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))| \geq N]$$

$$+ E[2\sigma^2(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s), x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))| < N \,,\ |x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| > 2N] \,.$$

D'après la condition (C) et d'après le fait que

$$P(|x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)) - x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))| \geq N)$$

$$\leq \frac{1}{N} E[|x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)) - x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))|] \,,$$

on a

$$E[\{\sigma(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s), x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$\leq E[\{\sigma_{2N}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) - \sigma_{2N}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s), x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s)))\}^2]$$

$$+ 2E[K_2^2(1 + x^2_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))| \geq N]$$

$$+ 2E[K_2^2(1 + x^2_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))) : |x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))| \geq N]$$

$$+ 4K_2^2(1 + N^2)\, \frac{E[|x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)) - x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s))|]}{N}$$

$$= E[J_1] + E[J_2] + E[J_3] + E[J_4] \,.$$

Fixons un $\varepsilon > 0$. Nous savons d'après le lemme 2 que $x^2_\Delta(t)$, $\Delta \in t$, $t \in [0,T]$ sont uniformément intégrables, alors on peut choisir N, tel que $E[J_2] + E[J_3] < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour N fixé, $\sigma_{2N}(s,x)$ est borné et uniformément continu par rapport à $(s,x) \in [0,T] \times R^1$. D'ailleurs, nous savons que $|\eta_{\Delta_{n_p}}(s) - \eta_{\Delta'_{n_p}}(s)|$ tend vers 0 $(p \to \infty)$ et que $|x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s)) - x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))|$ tend vers 0 p.s. $(p \to \infty)$.

Alors, on peut choisir n_{p_1} tel que $E[J_1] < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n_p > n_{p_1}$. Enfin, on peut choisir n_{p_2} tel que $E[J_4] < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n_p > n_{p_2}$. Finalement, on a pour $n_p > \max(n_{p_1}, n_{p_2})$

$$E[\{\eta_{\Delta_{n_p}}(s), x_{\Delta_{n_p}}(\eta_{\Delta_{n_p}}(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s), x_{\Delta'_{n_p}}(\eta_{\Delta'_{n_p}}(s)))\}^2] < \varepsilon .$$

Cette inégalité est contradictoire à (15). Alors, on en déduit (14).

Pour finir la démonstration, on peut voir facilement d'après la condition (C) et le lemme 1 que

$$E[\{\sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s)) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\}^2] \ ; \ \Delta, \Delta' \in A$$

sont uniformément intégrable par rapport à ds sur $[0,T]$. Alors, on a d'après (14) :

$$\lim_{\substack{\|\Delta\| \to 0 \\ \|\Delta'\| \to 0}} E[\int_0^T \{\sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\}^2 ds] = 0 .$$

Maintenant, nous allons démontrer (13). On a d'abord

$$\begin{aligned} x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t) &= \int_0^t \{\sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\} dB_s \\ &+ \int_0^t \{b(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - b(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\} ds \\ &= L_1(t) + L_2(t) . \end{aligned}$$

Alors,

$$|x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)|^2 \le 2L_1^2(t) + 2L_2^2(t) . \tag{16}$$

Pour $L_1(t)$, d'après l'inégalité de Doob, on a

$$\begin{aligned} E(\sup_{0 \le t \le T} L_1^2(t)) &\le 4.E[L_1^2(T)] \\ &= 4E[\int_0^T \{\sigma(\eta_\Delta(s), x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - \sigma(\eta_{\Delta'}(s), x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))\}^2 ds] . \end{aligned} \tag{17}$$

Pour $L_2(t)$, on a

$$L_2^2(t) \le \left(\int_0^t |b(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - b(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))|ds\right)^2 .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$L_2^2(t) \le t.\int_0^t |b(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - b(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))|^2 ds .$$

Alors,

$$\text{(18)}\quad E[\sup_{0\le t\le T} L^2(t)] \le T.E[\int_0^T |b(\eta_\Delta(s),x_\Delta(\eta_\Delta(s))) - b(\eta_{\Delta'}(s),x_{\Delta'}(\eta_{\Delta'}(s)))|^2 ds] .$$

Enfin, d'après (16), (17), (18) et le lemme 6, on a

$$\text{(13)}\qquad \lim_{\substack{\|\Delta\|\to 0\\ \|\Delta'\|\to 0}} E[\sup_{0\le t\le T} |x_\Delta(t) - x_{\Delta'}(t)|^2] = 0 .$$

C.Q.F.D.

<u>3me étape</u> : Construction de la solution.

Choisissons une suite $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,2,\dots$ telle que

$$\text{(19)}\qquad \sum_{i=1}^{\infty} 4^i \varepsilon_i < +\infty.$$

D'après le résultat (13), de la 2me étape, on peut trouver une suite de subdivisions Δ_i , $i = 1,2,\dots$ telle que

(i) $\|\Delta_i\| \to 0$ $(i \to \infty)$ et

(ii) $E[\sup_{0\le t\le T} |x_{\Delta_i}(t) - x_{\Delta_{i+1}}(t)|^2] < \varepsilon_i$: $i = 1,2,\dots$.

Puisque

$$P\{\sup_{0\le t\le T} |x_{\Delta_i}(t) - x_{\Delta_{i+1}}(t)| > \frac{1}{2^i}\} = P\{\sup_{0\le t\le T} |x_{\Delta_i}(t) - x_{\Delta_{i+1}}(t)|^2 > \frac{1}{4^i}\}$$

$$\le 4^i E[\sup_{0\le t\le T} |x_{\Delta_i}(t) - x_{\Delta_{i+1}}(t)|^2] < 4^i \varepsilon_i ,$$

on a d'après (19),

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{\sup_{0\le t\le T} |x_{\Delta_i}(t) - x_{\Delta_{i+1}}(t)| > \frac{1}{2^i}\} < \sum_{i=1}^{\infty} 4^i \varepsilon_i < +\infty .$$

Alors, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $x_{\Delta_i}(t)$ converge uniformément sur $[0,T]$ p.s. $(i\to\infty)$. Posons $x(t) = \lim_{i\to\infty} x_{\Delta_i}(t)$, $t\in[0,T]$. On a d'abord

$$\lim_{i\to\infty} E[\sup_{0\le t\le T} |x_{\Delta_i}(t) - x(t)|^2] = 0 \tag{20}$$

et on peut voir facilement que $x(t)$ est continu par rapport à $t\in[0,T]$ et que $x(t)$ est $\mathfrak{F}_t$-adapté pour chaque $t\in[0,T]$.

Enfin, nous allons démontrer que $(x(t),B_t)$ est la solution.

Pour cela, on a d'abord,

$$E[\sup_{0\le t\le T} |x(t) - \alpha(\omega) - \int_0^t \sigma(s,x(s))dB_s - \int_0^t b(s,x(s))|^2]$$

$$\le 3E[\sup_{0\le t\le T} |x(t) - x_{\Delta_i}(t)|^2]$$

$$+ 3E[\int_0^T \{\sigma(s,x(s)) - \sigma(\eta_{\Delta_i}(s),x_{\Delta_i}(\eta_{\Delta_i}(s)))\}^2 ds]$$

$$+ 3E[T\int_0^T |b(s,x(s) - b(\eta_{\Delta_i}(s),x_{\Delta_i}(\eta_{\Delta_i}(s)))|^2 ds]$$

$$= E[N_i^{(1)}] + E[N_i^{(2)}] + E[N_i^{(3)}] .$$

En utilisant la même discussion que dans le lemme 6, on peut voir que $E[N_i^{(2)}]$ et $E[N_i^{(3)}]$ convergent vers 0 lorsque $i\to\infty$. Par ailleurs, nous savons que $E[N_i^{(1)}]$ tend vers 0 $(i\to\infty)$.

Alors, on en déduit

$$E[\sup_{0\le t\le T} |x(t) - \alpha(\omega) - \int_0^t \sigma(s,x(s))dB_s - \int_0^t b(s,x(s))ds|^2] = 0 .$$

Alors,

$$x(t) = \alpha(\omega) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB_s + \int_0^t b(s,x(s))ds . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>4me étape</u> : Soit $x_\Delta(t)$ une solution approchée, on a

$$E[\sup_{0\le t\le T} |x_\Delta(t)-x(t)|^2]$$

$$\le 2E[\sup_{0\le t\le T} |x_\Delta(t)-x_{\Delta_i}(t)|^2] + 2E[\sup_{0\le t\le T} |x_{\Delta_i}(t)-x(t)|^2] ,$$

où $x_{\Delta_i}(t)$ est la même solution approchée que celle introduite dans la 3me étape.

Alors, d'après (13) et (20), on a

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} E[\sup_{0\le t\le T} |x_\Delta(t)-x(t)|^2] = 0 .$$

La démonstration du théorème est achevée. L'unicité des solutions de l'équation de ce type est déjà connue (voir par exemple [5]). C.Q.F.D.

REFERENCES

[1] ITO, K. On stochastic differential equations. Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1951).

[2] MARUYAMA, G. Continuous markov process and stochastic equations. Rend. Circ. Mat. Palermo, ser. 2, T.4, 48-90 (1955).

[3] SKOROHOD, A.V. Studies in the theory of random processes. Kiev (1961).

[4] DELLACHERIE, C. ; MEYER, P.A. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris (1975).

[5] YAMADA, T. ; WATANABE, S. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto Univ., Vol. 11, n° 1, 155-167 (1971).

[6] YAMADA, T. Sur l'approximation des solutions d'équations différentielles stochastiques. Z.W. 36, 153-164 (1976).

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 1
Université Louis Pasteur
7, rue René-Descartes

67084 STRASBOURG Cédex (France)