JOSEPH HOROWITZ

Une remarque sur les bimesures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 59-64
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__59_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

UNE REMARQUE SUR LES BIMESURES

par Joseph Horowitz

Soient $(E,\mathcal{E})$, $(F,\mathcal{F})$ deux espaces mesurables, $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ le produit cartésien de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{F}$ (à distinguer de la tribu produit notée $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$). Une <u>bimesure</u> est une fonction $\mu : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

i) $A \to \mu(A,B)$ est une fonction σ-additive sur $\mathcal{E}$ pour tout $B \in \mathcal{F}$

ii) $B \to \mu(A,B)$ est une fonction σ-additive sur $\mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Les bimesures positives (i.e. $\geqq 0$) ont été introduites par Kingman [3] dans son travail sur les mesures de Poisson, et je crois qu'elles seraient utiles dans les applications au "monde réel" . Dellacherie et Meyer disent [1, III.74] que la notion de bimesure "n'est pas d'une importance..." ; bien sûr, il est aussi possible que le monde réel n'ait pas d'importance. De toute façon, c'est la conclusion principale de (1) et (4) ci-dessous, parce qu'une bimesure est en réalité une <u>mesure</u>.

Etant donnée une bimesure positive μ, Kingman [3] a énoncé (sans démonstration, dans le cas où $(F,\mathcal{F})$ est $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne) l'assertion suivante :

(1) <u>Il existe une mesure</u> M <u>sur</u> $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ <u>telle que</u> $M(A\times B)=\mu(A,B)$ <u>pour tout</u> $(A,B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$.

Cette assertion a été prouvée par Morando [4] sous les hypothèses

(2a) μ <u>est positive et</u> $\mu(E,F) < \infty$.

(2b) $\mathcal{F}$ <u>contient une classe compacte</u> $\mathcal{K}$ <u>telle que</u>

$$\underline{\text{pour tout}}\ (A,B) \in \mathcal{E}\times\mathcal{F} \qquad \mu(A,B) = \sup_{\substack{K\in\mathcal{K} \\ K\subset B}} \mu(A,K)$$

Le même genre de théorème paraît dans le livre [1] sous une hypothèse un peu plus forte que (2b) :

(2c) E,F <u>sont des espaces métriques séparables</u>, μ <u>est une mesure tendue en chacun de ses arguments</u>, <u>l'autre étant fixé</u>.

La conclusion aussi est un peu plus forte : M est une mesure tendue.

Remarquons ici que les hypothèses (2a) et (2b) peuvent être remplacées par les suivantes (μ étant toujours supposée positive)

(3a) F <u>est un sous-espace universellement mesurable d'un espace métrique compact</u>, $\mathcal{F}$ <u>est sa tribu borélienne</u>.

(3b) $A \to \mu(A,F)$ <u>est une mesure</u> σ-<u>finie sur</u> E .

Il suffit de prendre une suite (A_n) d'éléments disjoints de $\mathcal{E}$, tels que $\mu(A_n,F) < \infty$, $\cup_n A_n = E$, et d'appliquer le théorème de Morando sur chaque $A_n \times F$. Mais voici une autre méthode. Pour f bornée $\mathcal{F}$-mesurable, soit $\mu(A,f) = \int\mu(A,dy)f(y)$. Alors on voit que $\mu(.,f)$ est une mesure absolument continue par rapport à $\mu(.,F)$ dont la densité $h(.,f)$ est essentiellement bornée, et $h(.,1)= 1$ $\mu(.,F)$-p.s.. L'application $f \to h(.,f)$ est alors " presque markovienne" au sens de [2], et il existe donc un noyau markovien $H(x,dy)$ tel que $H(.,f)=h(.,f)$ $\mu(.,F)$-p.s.. La mesure M est alors donnée par

$$M(g) = \iint_{EF} g(x,y)H(x,dy)\mu(dx,F) \text{ si } g \text{ est } \mathcal{E}\otimes\mathcal{F}\text{-mesurable } \geqq 0.$$

Nous allons maintenant étudier le cas où μ est une bimesure <u>finie</u>, mais <u>non nécessairement positive</u>. Nous gardons l'hypothèse (3a), et nous avons :

(4) THEOREME. <u>Il existe une mesure finie</u> (<u>signée</u>) M <u>sur</u> $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ <u>telle que</u> $\mu(A,B)=M(A\times B)$ <u>si et seulement si</u>

$$(5) \qquad \sup \ \Sigma_i \ |\mu(A_i,B_i)| < \infty$$

<u>le sup étant pris sur toutes les familles finies</u> $(A_i,B_i)_{i\in I}$ <u>d'éléments de</u> $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, <u>telles que les rectangles</u> $A_i\times B_i$ <u>soient disjoints</u>.

La condition est évidemment nécessaire, car s'il existe une mesure M comme dans l'énoncé, l'expression (5) est plus petite que la variation totale de M. Inversement, supposons que (5) ait lieu. Définissons pour

$A \in \mathcal{E}$

$$\nu(A) = \sup \sum_{i \in I} |\mu(A_i,B_i)|$$

où $\{A_i \times B_i,\ i \in I\}$ parcourt l'ensemble des familles finies de rectangles disjoints tels que $A_i \subset A$. Alors $0 \leqq \nu(A) < \infty$. Montrons que ν est une mesure sur E. Soit C_n une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{E}$. Alors

$$\begin{aligned} \nu(\bigcup_n C_n) &= \sup \Sigma_i\ |\mu(A_i,B_i)| \qquad (\text{ avec } A_i \subset \bigcup_n C_n\ ) \\ &= \sup \Sigma_i\ |\ \Sigma_n\ \mu(A_i \cap C_n,B_i)| \\ &\leqq \sup \Sigma_i \Sigma_n\ |\mu(A_i \cap C_n,B_i)| \leqq \Sigma_n\ \nu(C_n)\ . \end{aligned}$$

Etant donné $\varepsilon>0$ choisissons pour tout n une famille finie de rectangles disjoints $A_i^n \times B_i^n$ ($i=1,\dots,N_n$) telle que $A_i^n \subset C_n$ et

$$\sum_{i=1}^{N_n} |\mu(A_i^n,B_i^n)| > \nu(C_n) - \varepsilon/2^n$$

alors

$$\sum_n \sum_{i=1}^{N_n} |\mu(A_i^n,B_i^n)| > \sum_n \nu(C_n) - \varepsilon$$

et par conséquent, pour N assez grand

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{N_n} |\mu(A_i^n,B_i^n)| > \sum_n \nu(C_n) - \varepsilon\ .$$

Mais la "grande famille" $\{\ A_i^n \times B_i^n\ ,\ 1 \leqq n \leqq N\ ,\ 1 \leqq i \leqq N_n\}$ est finie, disjointe et $A_i^n \subset \bigcup_n C_n$; donc $\nu(\bigcup_n C_n) \geqq \sum_n \nu(C_n) - \varepsilon$, d'où l'assertion.

Définissons pour f bornée $\mathcal{F}$-mesurable $\mu(A,f) = \int_F \mu(A,dy)f(y)$. Soit $\mu'(A,.)$ la mesure variation totale de la mesure $\mu(A,.)$ sur $\mathcal{F}$

$$\mu'(A,B) = \sup_{\Sigma B_i = B} \Sigma_i\ |\mu(A,B_i)|$$

Alors $\mu'(A,B) \leqq \nu(A)$, et on voit aussitôt que $|\mu(A,f)| \leqq \|f\|\mu'(A,F) \leqq \|f\|\nu(A)$ (où $\|f\| = \sup_y |f(y)|$). Par conséquent, $\mu(.,f)$ est une mesure absolument continue par rapport à ν, dont la densité $h(.,f)$ est essentiellement bornée par $\|f\|$. L'opération $f \to h(.,f)$ est aussi "presque linéaire" , c'est à dire que $h(.,af+bg) = ah(.,f)+b(.,g)$ ν-p.s. (f,g $\mathcal{F}$-mesurables bornées, $a,b \in \mathbb{R}$) et en fait $h(.,\Sigma_n f_n) = \Sigma_n h(.,f_n)$ p.s. si les f_n sont positives et $\Sigma_n f_n$ est bornée. Nous allons montrer dans un instant qu'il existe deux applications positives $f \to h^{\pm}(.,f)$ possédant les mêmes propriétés, telles que $h(.,f) = h^+(.,f) - h^-(.,f)$ - c'est un résultat général sans doute bien connu, mais je trouve plus facile de le démontrer que de le chercher dans Bourbaki . D'après [2], il existe deux noyaux (sous)-markoviens $H^{\pm}(x,dy)$ tels que $h^{\pm}(.,f)= \int H^{\pm}(.,dy)f(y)$ p.s., et alors si l'on pose pour f $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$-mesurable bornée

$$M^{\pm}(f) = \iint_{EF} f(x,dy)H^{\pm}(x,dy)\nu(dx)$$

la mesure cherchée est $M=M^{+}-M^{-}$.

Voici le théorème dont nous avons besoin. Nous écrivons hf au lieu de h(.,f).

(6) THEOREME. <u>Soit</u> $f \to hf$ <u>une application de l'espace</u> $b(\mathcal{F})$ <u>des fonctions</u> $\mathcal{F}$<u>-mesurables bornées dans l'espace</u> $L^{\infty}(E,\mathcal{E},\nu)$, <u>telle que</u>

i) $|hf| \leqq \|f\|$ <u>p.s</u>. .

ii) $h(af+bg) = ahf + bhg$ <u>p.s</u>. ($a,b \in \mathbb{R}$, $f,g \in b(\mathcal{F})$)

iii) $h(\Sigma_n f_n) = \Sigma_n hf_n$ ($f_n \geqq 0$, $\Sigma_n f_n \in b(\mathcal{F})$)

<u>Alors il existe deux applications</u> $h^{\pm}$ <u>possédant les mêmes propriétés et de plus</u>

iv) $f \geqq 0 \Rightarrow h^{\pm}f \geqq 0$ <u>p.s</u>.

<u>et telles que</u> $h = h^{+}-h^{-}$.

Rappelons rapidement la définition du <u>supremum essentiel</u> d'une famille quelconque $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables, disons uniformément bornée en valeur absolue (voir [5, p.43] pour le cas général) sur l'espace mesuré fini $(E,\mathcal{E},\nu)$. Posons

$$\alpha = \sup_J \int (\sup_{i\in J} f_i)d\nu$$

J parcourant l'ensemble des parties dénombrables de I. Il existe alors un J tel que $\alpha= \int(\sup_{i\in J} f_i)d\nu$, et l'on pose alors

$$\operatorname{sup.ess}_{i\in I} f_i = \sup_{i\in J} f_i \qquad \text{p.s. .}$$

D'autre part, il suffit de définir $h^{+}f$ pour $f\geqq 0$ et de vérifier (i)-(iii) dans ce cas (avec $a,b \geqq 0$). On définira alors $h^{+}f$ pour $f\in b(\mathcal{F})$ comme $h^{+}(f^{+})-h^{+}(f^{-})$, où $f^{+} = f\vee 0$, $f^{-}=(-f)\vee 0$ comme d'habitude.

Définissons pour $f \geqq 0$

(7) $$h^{+}f = \operatorname{sup.ess}_{0\leqq g\leqq f} hg$$

Alors h^{+} satisfait à la condition iv) parce que $h(0)=0$ p.s., et l'on a

$h^+(af) = ah^+f$ pour $a \geqq 0$.

1°) $h^+(f_1+f_2) = h^+(f_1)+h^+(f_2)$ $(f_1,f_2 \geqq 0)$

Nous avons

$$h^+(f_1+f_2) = \underset{0\leqq g\leqq f_1+f_2}{\text{sup.ess}}\ hg$$

Pour une telle g soit $g_1=f_1\wedge g$, $g_2=g-g_1$. Alors $g=g_1+g_2$, $g_i\leqq f_i$ $(i=1,2)$ et ainsi

$$h^+(f_1+f_2) = \underset{0\leqq g\leqq f_1+f_2}{\text{sup.ess}}\ (hg_1+hg_2) \leqq h^+f_1 + h^+f_2 \ .$$

Soient ensuite $\{g_i^1\}$, $\{g_j^2\}$ des familles dénombrables telles que $0\leqq g_i^1\leqq f_1$, $0\leqq g_j^2\leqq f_2$ et

$$h^+f_1 = \sup_i hg_i^1 \quad , \quad h^+f_2 = \sup_j hg_j^2$$

Alors

$$\begin{aligned} h^+f_1+h^+f_2 &= \sup_{i,j} (hg_i^1+hg_j^2) = \sup_{i,j} h(g_i^1+g_j^2) \text{ p.s.} \\ &\leqq h^+(f_1+f_2) \end{aligned}$$

et 1°) est démontré.

2°) $h^+(\Sigma_n f_n) = \Sigma_n h^+f_n$ ($f_n\geqq 0$, $\Sigma_n f_n \in b(\mathcal{F})$)

D'abord $h^+(\Sigma_1^{\infty} f_n) \geqq h^+(\Sigma_1^N f_n) = \Sigma_1^N h^+f_n$ pour tout N d'après 1°), donc $h^+(\Sigma_n f_n) \geqq \Sigma_n h^+f_n$.

Etant donnée g telle que $0\leqq g\leqq \Sigma_n f_n$, on peut trouver des g_n telles que $0\leqq g_n\leqq f_n$, $g = \Sigma_n g_n$. Je vais le démontrer dans un instant, mais en utilisant ce fait nous avons

$$h^+(\Sigma_n f_n) = \underset{0\leqq g\leqq \Sigma_n f_n}{\text{sup.ess}}\ hg = \underset{0\leqq g\leqq \Sigma_n f_n}{\text{sup.ess}}\ \Sigma_n hg_n \leqq \Sigma_n h^+f_n$$

i.e. le résultat cherché. Enfin, pour construire les g_n, soit

$$g_n = \Big(g - \sum_1^{n-1} f_i\Big) I_{\left[\sum_1^{n-1} f_i\leqq g<\sum_1^{n} f_i\right]} + f_n I_{\left[g\geqq \sum_1^{n} f_i\right]}$$

Finalement, on voit grâce à (7) que $h^+f \geqq hf$ pour toute f positive, donc $h^-f = h^+f-hf$ satisfait à iv) et le théorème 6 est démontré.

REFERENCES

1. C. Dellacherie et P.A. Meyer. Probabilités et Potentiels (2e dition)

2. R. Getoor. On the construction of kernels. Sém. de Prob. IX, Lecture Notes in Math. n° 465, Springer-Verlag.

3. J.F.C. Kingman. Completely random measures. Pacific J. Math. 21, 1967, p. 59-79.

4. Ph. Morando. Mesures aléatoires. Sém. de Prob. III, Lecture Notes in Math. n°88, Springer-Verlag.

5. J. Neveu. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson.