

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 518-528

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__518_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES APPROXIMATIONS D'INTEGRALES STOCHASTIQUES.

par

Marc YOR

INTRODUCTION :

On développe ci-dessous quelques procédés d'approximation de certaines intégrales stochastiques, qui englobent en particulier l'approximation de Stratonovitch, et l'approximation à l'aide d'intégrales de Riemann ([4],[5]). On obtient en conséquence une généralisation de la formule de Ito. Ces résultats étendent ceux de la première partie de [5].

1. CADRE GENERAL ET PRELIMINAIRES.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de sous-tribus de \mathcal{F} , vérifiant les conditions habituelles. \underline{S}_c est l'ensemble des semi-martingales locales continues. D'après [2] (chapitre VI) tout processus $X \in \underline{S}_c$ se décompose de façon unique en $X_0 + M + A$ où M (resp A) est une martingale locale continue (resp : un processus à variation bornée, continu), ces deux processus étant de plus nuls en 0 (on dit que $X = X_0 + M + A$ est la décomposition canonique de X). On note $|A|$ le processus $\int_0^\cdot |dA_s|$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On appelle suite standard de subdivisions de $[0, t]$ toute suite $\tau_n = (0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t)$ de subdivisions de plus en plus fines dont

le pas $\phi(\tau_n) = \sup |t_{i+1}^n - t_i^n|$ décroît vers 0 lorsque $(n \rightarrow \infty)$.

Le lemme suivant sera très utile par la suite :

LEMME. - Soient $t \in \mathbb{R}_+$, et $0 < \lambda \leq 1$.

$(\tau_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de subdivisions standard de $[0, t]$ que

l'on pointe par $t_i^\lambda = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)$

$$X = X_0 + M + A, \quad Y = Y_0 + N + B$$

les décompositions canoniques de deux semi-martingales continues telles que

$M, |A|, N, |B|$ soient des processus bornés. On note $\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle = U$ et

$(f(u, \omega), u \geq 0)$ un processus \mathcal{F}_u adapté, continu, et borné.

Alors,

1) la suite $\sup_{\lambda \in [0, 1]} E \left[\left(\sum_{\tau_n} f(t_i) (X_{t_i^\lambda} - X_{t_i}) (Y_{t_i^\lambda} - Y_{t_i}) - \sum_{\tau_n} f(t_i) (U_{t_i^\lambda} - U_{t_i}) \right)^2 \right]$

converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

2) si $\lambda = 1$, ou si U - en tant que mesure aléatoire sur \mathbb{R}_+ - est presque sûrement absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, on a :

$$\sum_{\tau_n} f(t_i) (X_{t_i^\lambda} - X_{t_i}) (Y_{t_i^\lambda} - Y_{t_i}) \xrightarrow[L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)]{(n \rightarrow \infty)} \lambda \int_0^t f(s) dU_s$$

uniformément en $\lambda \in [0, 1]$.

Démonstration : On montre facilement qu'il suffit de démontrer le lemme lorsque

$$X = Y = M.$$

$$\text{Rappelons que si } s < t, \quad E^{\mathcal{F}_s}((M_t - M_s)^2) = E^{\mathcal{F}_s}(U_t - U_s).$$

D'autre part ,

$$\begin{aligned}
& E \left[\left\{ \sum_{\tau_n} f(t_i) \left((M_{t_i}^\lambda - M_{t_i})^2 - E^{\mathfrak{F}_{t_i}} (M_{t_i}^\lambda - M_{t_i})^2 \right) \right\}^2 \right] \\
&= E \left[\sum_{\tau_n} f(t_i)^2 \left((M_{t_i}^\lambda - M_{t_i})^2 - E^{\mathfrak{F}_{t_i}} (M_{t_i}^\lambda - M_{t_i})^2 \right)^2 \right] \\
&\leq 2 \|f\|_\infty^2 E \left[\sum_{\tau_n} (M_{t_i}^\lambda - M_{t_i})^4 \right] \\
&\leq 2 \|f\|_\infty^2 E \left[\sum_{\tau_n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4 \right] \quad (\text{car } M_{t_i}^\lambda - M_{t_i} = E(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}^\lambda))
\end{aligned}$$

et cette dernière expression converge vers 0, à l'aide du théorème de convergence dominé, car $\sum_{\tau_n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4 \leq \sup_{\tau_n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \times \left[\sum_{\tau_n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right]$.

Il est ensuite facile de montrer que

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} E \left[\sum_{\tau_n} f(t_i) \left((U_{t_i}^\lambda - U_{t_i}) - E^{\mathfrak{F}_{t_i}} (U_{t_i}^\lambda - U_{t_i}) \right)^2 \right]$$

converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, et la première partie du lemme est démontrée.

Si $\lambda = 1, 2$) est immédiat, le processus f étant continu.

Sinon, on déduit 2) de l'hypothèse d'absolue continuité, et des remarques suivantes : . si a est une fonction continue sur $[0, t]$,

$$\left| \sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s) ds - \sum_{\tau_n} a(t_i) \lambda (t_{i+1} - t_i) \right| \leq \sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} |a(s) - a(t_i)| ds \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

et donc $\sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s) ds \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \lambda \int_0^t a(s) ds$ uniformément en λ .

. les fonctions continues étant denses dans $L^1([0, t], ds)$, le même résultat est vrai pour $a \in L^1([0, t], ds)$ \square

Soit μ mesure de probabilité sur $([0, 1], \mathfrak{B}[0, 1])$, $f \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, et τ subdivision de $[0, t]$.

Si X et Y sont deux semi-martingales continues, on considère les sommes suivantes :

$${}^+S_{\tau}^{\mu} = \sum_{\tau} \int_0^1 f(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) d\mu(s) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

$$({}^+S_{\mu}^{\tau}) = \sum_{\tau} \int_0^1 f(X_{t_i} + s(t_{i+1} - t_i)) d\mu(s) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

(on pourrait, pour désigner ces expressions, appeler la première (resp : seconde) somme μ . "approximation" spatiale (resp : temporelle) de $\int_0^t f(X_s) dY_s$ le long de τ). On étudie, au paragraphe 2, la convergence de ${}^+S_{\tau_n}^{\mu}$, où $({}^+S_{\mu}^{\tau_n})$ lorsque (τ_n) est une suite de subdivisions standard de $[0, t]$, et $n \rightarrow \infty$.

2. RESULTATS DE CONVERGENCE.

$$\text{Notons } \mu = \int_0^1 \lambda d\mu(\lambda).$$

THEOREME 1. - Soient $X, Y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, et (τ_n) suite de subdivisions standard de $[0, t]$. Alors,

$$1) \quad {}^+S_{\tau_n}^{\mu} \xrightarrow[(P)]{(n \rightarrow \infty)} \mu \cdot \int_0^t f(X_s) dY_s = \int_0^t f(X_s) dY_s + \mu \int_0^t f'(X_s) d\langle X, Y \rangle_s$$

2) si la mesure $d_s \langle X, Y \rangle_s(\omega)$ est presque sûrement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$({}^+S_{\mu}^{\tau_n}) \xrightarrow[(P)]{(n \rightarrow \infty)} \mu \cdot \int_0^t f(X_s) dY_s.$$

Démonstration : Soient $X = X_0 + M + A$, $Y = Y_0 + N + B$ les décompositions canoniques de X et Y (A et B sont les processus prévisibles à variation bornée).

Dans les deux cas, on peut supposer que Y est une martingale

locale, car $\sum_{\tau_n} \int_0^1 f(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) d\mu(s) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ converge presque sûrement vers $\int_0^t f(X_s) dB_s$ (et de même pour les μ . approximations temporelles).

- De plus, il suffit de montrer que les convergences ont lieu dans L^2 , lorsque $M, |A|, Y$ sont bornées, et f est une fonction de classe C^1 , bornée, ainsi que sa dérivée. En effet, soit $T_p = \inf\{t \mid |M_t| \wedge |A_t| \wedge |Y_t| \geq p\}$, et $f_p \in C^1(\mathbb{R})$, $f_p \equiv f$ sur $[-p, p]$, $f_p \equiv 0$ hors de $[-p-1, p+1]$.

Alors, en remplaçant la notation $(^+S_{\mu\tau})$ par $(^+S_{\mu\tau})(f)$, on a, pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} & P[|(^+S_{\mu\tau_n})(f) - \mu \cdot \int_0^t f(X_s) dY_s| > \alpha] \\ & \leq P[T_p \leq t] + \frac{1}{\alpha^2} (E\{(^+S_{\mu\tau_n})(f_p) - \mu \cdot \int_0^t f_p(X_s) dY_s\}^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et les temps d'arrêt (T_p) croissent Pps vers $+\infty$.

- Soient donc $M, |A|, Y$ bornés et $f \in C_b^1(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} ^+S_{\mu\tau_n} &= \sum_{\tau_n} f(X_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \\ &+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) \{f(X_{t_i} + \lambda(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - f(X_{t_i})\} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}). \end{aligned}$$

Le premier terme converge dans L^2 vers $\int_0^t f(X_s) dY_s$.

Ecrivons le second comme

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau_n} \int_0^1 \lambda d\mu(\lambda) \int_0^1 ds f'[X_{t_i} + \lambda s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})] (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \\ &= \mu \sum_{\tau_n} f'(X_{t_i}) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) + J_{\tau_n}. \end{aligned}$$

D'après le lemme, le premier terme converge dans L^2 vers

$$\mu_1 \int_0^t f'(X_s) d\langle X, Y \rangle_s.$$

D'autre part, on a, en posant

$$F'_{\tau_n}(\omega) = \sup_{t_i \in \tau_n} \sup_{u \in [0,1]} |f'(X_{t_i} + u(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - f'(X_{t_i})|$$

et $U = X + Y$, $V = X - Y$:

$$\begin{aligned} |J_{\tau_n}| &\leq F'_{\tau_n} \sum_{\tau_n} |(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})| \\ &\leq \frac{1}{4} F'_{\tau_n} \sum_{\tau_n} [(U_{t_{i+1}} - U_{t_i})^2 + (V_{t_{i+1}} - V_{t_i})^2]. \end{aligned}$$

D'après la convergence vers 0, lorsque $n \rightarrow \infty$, de F'_{τ_n} , et le lemme, on a donc :

$$J_{\tau_n} \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} 0$$

- Sous les mêmes conditions, décomposons également $({}^+S_{\mu})_{\tau_n}$:

$$\begin{aligned} ({}^+S_{\mu})_{\tau_n} &= \sum_{\tau_n} f(X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \\ &+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) f'(X_{t_i})(X_{t_i\lambda} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \\ &+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) \int_0^1 ds [f'(X_{t_i} + s(X_{t_i\lambda} - X_{t_i})) - f'(X_{t_i})] (X_{t_i\lambda} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}). \end{aligned}$$

Le premier terme converge dans L^2 vers $\int_0^t f(X_s) dY_s$.

Le second se décompose en : $I'_{\tau_n} + J'_{\tau_n}$, où :

$$\begin{aligned} I'_{\tau_n} &= \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) f'(X_{t_i})(X_{t_i\lambda} - X_{t_i})(Y_{t_i\lambda} - Y_{t_i}) \\ J'_{\tau_n} &= \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) f'(X_{t_i})(X_{t_i\lambda} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i\lambda}). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse d'absolue continuité, et la seconde partie du lemme,

on a :

$$E[(I'_{\tau_n} - \mu \int_0^t f'(X_s) d\langle X, Y \rangle_s)^2] \\ \leq \int_0^1 d\mu(\lambda) E(\sum_{\tau_n} f'(X_{t_i}) (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) - \lambda \int_0^t f'(X_s) d\langle X, Y \rangle_s)^2$$

expression convergeant vers 0 , lorsque $n \rightarrow \infty$. D'autre part,

$$E[(J'_{\tau_n})^2] \leq \int_0^1 d\mu(\lambda) \sum_{\tau_n} E[f'(X_{t_i})^2 (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 (\langle Y, Y \rangle_{t_{i+1}} - \langle Y, Y \rangle_{t_i})]$$

expression qui converge vers 0 , d'après la continuité de X .

Enfin, la convergence vers 0 dans L^2 du troisième terme qui intervient dans le développement de (S'_{μ, τ_n}) se montre de même que pour J_{τ_n} précédemment \square

Remarquons ici que si $\mu = \epsilon_0$, $\mu \cdot \int_0^t f(X_s) dY_s$ est l'intégrale d'Ito, si $\mu = \epsilon_{\frac{1}{2}}$, $\mu \cdot \int_0^t f(X_s) dY_s$ est l'intégrale de Stratonovitch, obtenue par limite de $(S'_{\epsilon_{\frac{1}{2}}, \tau_n})$, si $d_s \langle X, Y \rangle_s(u)$ est absolument continue. Montrons,

par un contre exemple, que cette condition est nécessaire pour obtenir la limite $\epsilon_{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^t (f(X_s) dY_s$, définie précédemment : en [3] (pages 48-49)⁽¹⁾ ,

Riesz et Nagy construisent une fonction $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue, croissante, presque partout dérivable, et telle que la dérivée $F'(x)$ - lorsqu'elle existe - soit nulle.

Voici cette construction : Soit $0 < u < 1$ et $\tau_n = (t_k^n = \frac{k}{2^n} ; 0 \leq k \leq 2^n)$ la suite des subdivisions dyadiques de $[0, 1]$.

Définissons $F_0(x) = x$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, le graphe de F_n comme la ligne brisée dont les sommets sont $(\frac{k}{2^n}, F_n(\frac{k}{2^n}))$. La suite $F_n(\frac{k}{2^n})$ est déterminée par les

(1) Cette référence m'a été fournie par J. de Sam Lazaro.

relations de récurrence :

$$F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \quad (0 \leq k \leq 2^n)$$

$$F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1-u}{2} F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1+u}{2} F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

La suite F_n est croissante en n , et $F = \lim F_n$ vérifie les propriétés énoncées.

Revenons à l'intégrale de Stratonovitch : si B est un (\mathfrak{F}_t) mouvement brownien réel, posons $X_t = B_{\mathfrak{F}(t)}$; c'est une $\mathfrak{F}_{\mathfrak{F}(t)}$ martingale continue, de processus croissant $\mathfrak{F}(t)$. On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_n} X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) &= \sum_{\tau_n} X_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \sum_{\tau_n} (X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} - X_{t_i})^2 \\ &\quad + \sum_{\tau_n} (X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} - X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}}). \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le premier terme converge dans L^2 vers $\int_0^1 X_s dX_s$, le second a, d'après la première partie du lemme, même limite que

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_n} (F(\frac{t_{i+1}+t_i}{2}) - F(t_i)) &= \frac{1+u}{2} \sum_{\tau_n} (F(t_{i+1}) - F(t_i)) \\ &= \frac{1+u}{2} F(1) = \frac{1+u}{2} \end{aligned}$$

d'après les relations de récurrence vérifiées par (F_n) sur les dyadiques.

Enfin, le troisième terme converge vers 0 dans L^2 ; ainsi la limite dans

L^2 de $\sum_{\tau_n} X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ est $\int_0^1 X_s dX_s + \frac{1+u}{2} \langle X, X \rangle_1$, expression différentielle de $\frac{1}{2} \int_0^1 X_s dX_s$, puisque $u \neq 0$.

Signalons également que les approximations (S_n^u) sont utilisées en

[4] et [5] lorsque μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Faisons une seconde remarque : il est naturel d'écrire ${}^+S_{\tau}^{\mu} = \int_0^{\tau} H_s^{\mu, \tau} dY_s$

(et une notation analogue pour $({}^+S_{\mu}^{\tau})$), où :

$$H_s^{\mu, \tau} = \sum_{\tau} \int_0^1 f(X_{t_i} + u(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) d\mu(u) 1_{]t_i, t_{i+1}[}(s) .$$

Le processus $H^{\mu, \tau}$ n'est pas adapté à (\mathcal{F}_t) (les approximations ${}^+S^{\mu}$ sont en avance, ou avancées), ce qui crée les quelques difficultés rencontrées auparavant.

Par contre, si l'on définit les approximations retardées

$${}^-S_{\tau}^{\mu} = \sum_{\tau} \int_0^1 d\mu(s) f(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) ,$$

on obtient aisément la convergence en probabilité de ${}^-S_{\tau_n}^{\mu}$ (ou $({}^-S_{\mu}^{\tau_n})$) vers $\int_0^{\tau} f(X_s) dY_s$.

3. UNE EXTENSION DE LA FORMULE D'ITO.

La partie 1) du théorème 1 s'étend aisément au cas où les semi-martingales continues X et Y sont à valeurs dans \mathbb{R}^d , ce qui permet d'obtenir la généralisation suivante de la formule d'Ito (pour les semi-martingales continues) :

THEOREME 2. - Soit $\pi = \sum_{i=1}^d f_i(x_1, \dots, x_d) dx_i$ une forme différentielle fermée de classe C^1 sur U ouvert de \mathbb{R}^d , et X semi-martingale continue à valeurs dans U (c'est-à-dire $P[\exists t, X_t \notin U] = 0$).

On a alors l'égalité :

$$(*) \quad \int_{X_{(0,t)}(\omega)} \pi = \int_0^t \sum_{i=1}^d f_i(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s ,$$

où $X_{(0,t)}(\omega)$ désigne le chemin continu $(X_s(\omega), 0 \leq s \leq t)$.

Remarque : rappelons que si $\gamma: [0,1] \rightarrow U$ est un chemin seulement supposé continu, $\int_{\gamma} \pi$ est défini par $\hat{\pi}(\gamma(1)) - \hat{\pi}(\gamma(0))$, où $\hat{\pi}$ désigne une primitive continue de π le long d'une chaîne formée de boules recouvrant le graphe de γ . En particulier, si π est une forme exacte dans U , $\hat{\pi}$ désigne une primitive de π dans U .

Démonstration : La formule (*) découle du théorème 1, et de :

$$\int_{X_{(0,t)}(\omega)} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\tau_n} \int_0^1 \sum_{j=1}^d f_j(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) ds (X_{t_{i+1}}^j - X_{t_i}^j)$$

où (τ_n) est une suite de subdivisions standard de $[0,t]$ \square

En particulier, si $Z = X + iY$ est une martingale locale conforme continue, à valeurs dans U ouvert de \mathbb{C} ([1]) (c'est-à-dire : $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle$ et $\langle X, Y \rangle = 0$) et si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, on a :

$$\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} f(z) dz = \int_0^t f(Z_s) dZ_s (ps) .$$

Cette égalité a été obtenue directement à l'aide de la formule d'Ito usuelle pour $f(z) = \frac{1}{z}$ et $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $P(Z_0 = 0) = 0$ par R. Gettoor et M. Sharpe en [1].

REFERENCES

- [1] R. GETTOOR et M. SHARPE Conformal martingales. *Inventiones Mathematicae* (16) (271-308) - 1972.
- [2] P.A. MEYER Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X.
- [3] F. RIESZ et B. NAGY Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars.

- [4] E. WONG et M. ZAKAI Riemann-Stieltjes approximations of stochastic integrals. Z. Wahr. 12(87-97) (1969).
- [5] M. YOR Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens.
(à paraître au Bulletin de la S.M.F)

UNIVERSITE DE PARIS VI
Laboratoire de Probabilités
2, Place Jussieu - Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05