Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Marc Yor

Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 502-517

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__502_0>

REMARQUES SUR LA REPRESENTATION DES MARTINGALES COMME INTEGRALES STOCHASTIQUES

par

Marc YOR

INTRODUCTION

Soit $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ une filtration continue à droite sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et X un (resp : $\mathcal{N}$ une famille de processus) réel(s) càdlàg, $\mathcal{F}_t$ - adapté(s). L'un des principaux objets de [4] est de caractériser les probabilités P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ faisant de X une martingale (locale) et telle que toute $(\mathcal{F}_t, P)$ martingale (locale) s'écrive comme intégrale stochastique d'un processus prévisible par rapport à X.

Le théorème obtenu (pour une famille quelconque $\mathcal{N}$) est rappelé au paragraphe 1, ainsi que l'une de ses conséquences pour les problèmes de martingales posés par STROOCK-VARADHAN. En particulier, on en déduit immédiatement des théorèmes de représentation des martingales pour les processus homogènes à accroissements indépendants (P.A.I).

Au paragraphe 2, on obtient, à partir du travail [6] de DELLACHERIE-STRICKER (figurant dans ce volume), une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une martingale de carré intégrable ayant la propriété de représentation indiquée précédemment.

Au paragraphe 3, on montre qu'une étude directe permet de parvenir au théorème de représentation des martingales pour les P.A.I.

NOTATIONS :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifiant (pour simplicité) les conditions habituelles . $\mathcal{P}$ est la tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$, associée à $(\mathcal{F}_t)$. Si $\mathcal{C}$ est une classe de processus, on note $\mathcal{C}_{loc}$ la classe locale associée à $\mathcal{C}$: $A \in \mathcal{C}_{loc}$ si, et seulement si, il existe une suite T_n de t.a.

croissant P ps vers $+\infty$, et telle que $A^{T_n} = A_{.\wedge T_n} \in \mathcal{C}$, pour tout n.

De plus, $\mathcal{C}^o = \{C \in \mathcal{C} \mid C_o = 0\}$. $\mathcal{M}$ (resp : $\mathcal{M}^2$) désigne la classe des martingales uniformément intégrables (resp : de carré intégrable). Si $\mathcal{N}$ est une famille de martingales localement dans $H^p (1 \leq p < \infty)$, on note $\mathcal{L}^p(\mathcal{N})$ le plus petit sous espace fermé de $(H^p)^o$ et stable par arrêt, contenant les processus $(N-N_o)^T$ qui appartiennent à H^p.

Enfin, dans tout le travail, la notation $\int_S^T$, pour S et T t.a., signifie $\int_{]S,T]}$.

1 - QUELQUES THEOREMES GENERAUX

On se fixe une fois pour toutes une famille $\mathcal{N}$ de P.martingales locales (ou : une famille de versions de ces martingales locales).

Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} = \{P' \in \mathcal{M}^1_+(\Omega,\mathcal{F}) \mid \forall N \in \mathcal{N},\ N \in \mathcal{M}_{loc}(P')\}$

D'après [4] (théorème 1.5), on a le :

Théorème 1: *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a). P *est un point extrémal de* $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$

b). $\mathcal{F}_o$ *est* P.*triviale et* $\mathcal{M}^o_{loc}(P) = \mathcal{L}^1_{loc}(\mathcal{N})$.

Remarquons que le choix initial des P.versions des éléments de $\mathcal{N}$ est indifférent car a) est identique à :

a'). P est un point extrémal de $\mathcal{M}^P_{\mathcal{N}} = \{P' \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}} \mid P' << P\}$.

Le cas où $\mathcal{N}$ est réduit à un seul élément X est particulièrement important, à cause de l'énoncé suivant (voir [4], proposition 1.2):

Théorème 2 : *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a). P *est un point extrémal de* $\mathcal{M}_{\{X\}}$

b'). $\mathcal{F}_o$ *est* P.*triviale et toute martingale bornée* L, *nulle en* 0 *peut s'écrire* L = u.X, *avec* u *processus prévisible*.

b"). Même énoncé que b'), en remplaçant "bornée" par "locale".

Si l'une de ces assertions est vérifiée, on dit que X a la propriété de représentation prévisible (pour$(\mathcal{F}_t, P)$).

Applications :

1). Si $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration complétée d'un mouvement brownien X, réel, avec $X_o = x$, la propriété de représentation b'), ou b"), est vérifiée.

Ce résultat classique découle immédiatement du théorème 2 : en effet, si $P = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2$, avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{\{X\}}$, $\alpha \in]0,1[$, le processus croissant sous P_1 (ou P_2) << P, de la martingale continue X est t (à cause de l'approximation de $\langle X,X\rangle^{P_i}$ par les variations quadratiques $\Sigma(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^2$, et donc $P_1 = P_2 = P$ est la mesure de Wiener W_x.

L'orthogonalité (en tant que martingales) des différentes coordonnées d'un mouvement brownien vectoriel permet d'étendre de manière évidente cette méthode au cas vectoriel.

Remarquons que c'est l'absolue continuité des P_i par rapport à P qui a mené au résultat. L'idée de DELLACHERIE [1] pour obtenir la propriété de représentation pour le mouvement brownien ou la martingale compensée du processus de Poisson, idée développée par YEN et YOEURP en [2], est de montrer que si $P \in \mathcal{M}_{\{X\}}$, alors $\mathcal{M}^P_{\{X\}} = \{Q \in \mathcal{M}_{\{X\}}, Q<<P\}$ est constitué d'un seul point (qui est donc P). Enfin, le lien entre tous ces résultats est l'équivalence suivante : si $P \in \mathcal{M}_{\{X\}}$, alors $P \in \text{ext}(\mathcal{M}_{\{X\}}) \Longleftrightarrow \{P\} = \mathcal{M}^P_{\{X\}}$ ([4], théorème 2.5).

2). Le théorème 1 permet d'obtenir en [4] un théorème de représentation des martingales pour certaines solutions des problèmes de martingales (posés par STROOCK-VARADHAN) associés aux opérateurs intégro-différentiels $\mathcal{L} = L+K : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_b(\mathbb{R}^d)$ définis par

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i \leq d} b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$Kf(x) = \int S(x,dy) \left[f(x+y) - f(x) - \left(\sum_{i \leq d} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \frac{1}{1+|y|^2} \right]$$

où :

- les coefficients (a_{ij}) sont bornés, continus, et pour tout x, la matrice $a(x) = (a_{ij}(x))$ est semi-définie positive (éventuellement dégénérée) ;

- les coefficients (b_i) sont bornés, continus ;

- S est une mesure de transition positive de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ dans $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telle que

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d), \int \frac{|y|^2}{1+|y|^2} f(y)\, S(.,dy) \in C_b(\mathbb{R}^d)$$

et

$$\sup_{(x)} \int (|y|^2\, 1_{|y| \leq 1} + |y|\, 1_{|y|>1})\, S(x,dy) < \infty$$

Dans ce qui suit, Ω est l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, X est le processus canonique défini sur Ω et $\mathcal{F}_t^o = \sigma\{X_s, s \leq t\}$. On note $\mathcal{S}_x(\mathcal{L})$ l'ensemble des lois P sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^o)$ telles que $P(X_o=x) = 1$ et
$\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $C_t^f = f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t \mathcal{L}f(X_s)ds$ est une martingale pour P.

$\mathcal{S}_x(\mathcal{L})$ est un ensemble convexe, dont on va donner une caractérisation de l'ensemble de ses points extrémaux $\mathcal{E}_x(\mathcal{L})$. Auparavant, on rappelle que, si $P \in \mathcal{S}_x(\mathcal{L})$, X est une semi-martingale vectorielle et, de plus, la P.projection prévisible duale de la mesure aléatoire $\mu(\omega; dt\times dx) = \sum_{s>o} \varepsilon_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt \times dx)\, I_{(\Delta X_s \neq 0)}$ (sur $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$) est $\nu(\omega; dt\times dx) = dt S(X_{t^-}(\omega)\, ; dx)$. On utilise dans le théorème suivant, les notations usuelles de JACOD (voir, par exemple [3]).

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> $P \in \mathcal{S}_x(\mathcal{L})$. <u>Alors</u>, $P \in \mathcal{E}_x(\mathcal{L})$ <u>si, et seulement si, on a</u>:

(i) $\mathcal{L}^2_{loc}((X^j)^c, 1 \leq j \leq d) = \mathcal{M}^{c,o}_{loc}(P)$.

(ii) Toute somme compensée de sauts $M \in \mathcal{M}^{o}_{loc}(P)$ s'écrit $M = W * (\mu - \nu)$, avec $W \in \mathcal{G}_{loc}(\mu, P)$

(iii) $\mathcal{F}_o$ est P.triviale.

De plus, dans le cas où la matrice a est partout non dégénérée, on peut remplacer (i) par

(i') Toute $M \in \mathcal{M}^{c,o}_{loc}(P)$ s'écrit $M = \sum_{i \leq d} u_i . (X^i)^c$, avec $u_i \in \mathcal{P}$ ∎

Signalons ici que, dans tous les cas, le théorème de GALTCHOUK (présenté en [11]) permet d'écrire (i) de façon analogue à (ii) :

Toute martingale locale continue, nulle en 0, peut s'écrire

(i) $$M_t = \int_o^t (u_s \mid d\, X^c_s),$$

où $u = (u_j)_{j \leq d} \in \mathcal{P}^d$ est tel que le processus

$\int_o^t \sum_{i,j} u^i_s u^j_s \; d < (X^i)^c, (X^j)^c >_s$ soit p.s fini pour tout t.

Remarque : Il semble paradoxal de présenter le théorème 3, où interviennent des intégrales stochastiques optionnelles (les martingales locales $W * (\mu - \nu)$) comme conséquence du théorème 1, qui est un théorème de représentation prévisible. Cependant, ce paradoxe n'est qu'apparent, et provient de ce que, si $P \in \mathcal{S}_x(\mathcal{L})$, la mesure $\mu - \nu$ (sur $\widetilde{\mathcal{P}}$) est une P-mesure aléatoire-martingale, c'est à dire : si $W \in \widetilde{\mathcal{P}}$ est convenablement intégrable, $\int W 1_{]0,.]}\, d\mu - \int W 1_{]0,.]} d\nu \in \mathcal{M}^{o}_{loc}(P)$.

Un cas particulier d'application du théorème 3 est celui où $\mathcal{S}_x(\mathcal{L})$ est constitué d'un seul point $P_{x,\mathcal{L}}$ (ce n'est pas toujours le cas, voir [4]) : donc, le théorème 3 s'applique aux P.A.I homogènes (voir aussi le paragraphe 3) et également lorsque la matrice a(x) est définie positive en tout x et que S vérifie une condition supplémentaire de continuité (voir, STROOCK [12]).

2 - INTEGRALES STOCHASTIQUES ET ALGEBRES DE VON NEUMANN

On adopte le langage, et les notations de DELLACHERIE - STRICKER [6], sans modifier, pour l'instant, notre donnée de base $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$: en particulier,

- Les opérateurs K qui interviennent par la suite sont des opérateurs continus sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$

- à tout processus prévisible borné f, on associe l'opérateur d'intégrale stochastique (i.s) K_f défini par :

$$U \in L^2(\mathcal{F}_\infty) \to K_f(U) = f(0)\, U_0 + \int_{]0,\infty]} f(s)\, dU_s$$

$$= \int_{[0,\infty]} f(s)\, d\, U_s \quad \text{(avec les notations de [9])},$$

où $(U_s, s \in \mathbb{R}_+)$ est l'élément de $\mathcal{M}^2$ tel que $U_\infty = U$.

S'il existe $X \in \mathcal{M}^2$ vérifiant les assertions équivalentes du théorème 2, on dit que X est une martingale totalisatrice (l'existence d'une telle martingale implique en particulier que $\mathcal{F}_0$ est P triviale).

Voici une démonstration directe du théorème 4 de [6] :

<u>Théorème 4</u> : <u>Supposons qu'il existe une martingale totalisatrice</u> $X \in \mathcal{M}^2$. <u>Alors, les seuls opérateurs bornés sur</u> $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ <u>qui commutent avec les opérateurs</u> $(E(\cdot|\mathcal{F}_T)$, T t.a <u>de</u> $(\mathcal{F}_t))$ <u>sont les opérateurs d'i.s.</u>

<u>Démonstration</u> :

- Il est évident (sans aucune hypothèse) qu'un opérateur d'i.s commute avec les opérateurs $(E(\cdot|\mathcal{F}_T)$, T t.a)

- Inversement, soit K un opérateur qui commute avec les $(E(\cdot|\mathcal{F}_T)$, T t.a).

Toute variable $U \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ se représente comme :

$$U = c + \int_0^\infty u_s\, dX_s$$

avec $c \in \mathbb{R}$, et $u \in L^2(\mathcal{P}, d\langle X,X\rangle dP)$.

Comme K commute avec $E(.|\mathcal{F}_o) = E(.)$, on en déduit l'existence d'une constante $k=K1$, et d'un opérateur continu $u \to \hat{u}$ de $\Lambda = L^2(\mathcal{P}, d\langle X,X\rangle dP)$ dans lui-même (la continuité de $u \to \hat{u}$ provient de la continuité de K) tels que : $KU = c\,k + \int_o^\infty \hat{u}_s\, dX_s$. K commutant aux $E(.\,|\,\mathcal{F}_T)$, on a :

(1) $\quad \forall u \in \Lambda,\ \forall T$ t.a $,\ \widehat{u\,1_{]0,T]}} = \hat{u}\,1_{]0,T]}, d\langle X,X\rangle dP$ ps

La tribu $\mathcal{F}_o$ étant P.triviale, $\mathcal{P}$ est engendrée par les intervalles $1_{]0,T]}$. A l'aide du théorème de classe monotone, et de la continuité de $u \to \hat{u}$, on déduit de (1) :

(2) $$\forall u \in \Lambda,\ \forall v \in \mathcal{P},\quad \widehat{uv} = \hat{u}\,v,\ d\langle X,X\rangle dP \text{ ps},$$

puis, les processus prévisibles bornés appartenant à Λ, et étant denses dans cet espace:

(3) $$\forall u \in \mathcal{P},\ u \text{ borné},\ \forall v \in \Lambda,\quad \widehat{uv} = \hat{u}\,v,\ d\langle X,X\rangle dP \text{ ps}.$$

En appliquant (3) à $u=1$, on a donc :

$$\forall v \in \Lambda,\quad \hat{v} = \hat{1}\,v,\ d\langle X,X\rangle dP \quad \text{ps}.$$

De plus, si $\mathcal{H}_o$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathcal{F}_\infty)$, on déduit de la continuité de $K|_{\mathcal{H}_o}$ l'existence d'une constante c telle que :

$$\forall u \in \Lambda,\ E\left(\int_o^\infty (\hat{1})_s^2\, u_s^2\, d\langle X,X\rangle_s\right) \leqslant c\, E\left(\int_o^\infty u_s^2\, d\langle X,X\rangle_s\right)$$

donc $(\hat{1})^2 \in (L^1(\mathcal{P}, d\langle X,X\rangle dP))' = L^\infty(\mathcal{P}, d\langle X,X\rangle dP)$.

Finalement, on a :

$$\forall U \in L^2(\mathcal{F}_\infty),\ KU = k\,E(U) + \int_o^\infty \hat{1}_s\, dU_s, \text{ et donc}$$

$K = K_f$ (avec $f(0) = k$ et $f = \hat{1}$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$) est un opérateur d'i.s.∎

Si l'on avait supposé uniquement que l'opérateur K commute aux $(E(.|\mathcal{F}_t),\ t \in \mathbb{R}_+)$, la même démonstration (où T est remplacé par t) montrerait que K est égal à K_f seulement (a priori) sur le sous-espace fermé de $L^2(\mathcal{F}_\infty,P)$ engendré par $(X_t,\ t\in\mathbb{R}_+)$. De plus, avec nos notations, l'égalité (2) serait seulement valable pour v fonction déterministe bornée, et $u\in\Lambda$.

A la suite de cette remarque, il est naturel de se demander sous quelles conditions minimales un opérateur commute aux $(E(.|\mathcal{F}_T),\ T$ t.a).

Nous répondons à cette question par le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> : <u>Pour qu'un opérateur commute aux</u> $(E(.|\mathcal{F}_T),\ T$ <u>t.a), il (faut et il) suffit qu'il commute aux</u> $E(.|\mathcal{F}_{t_A})$, où $t\in\mathbb{R}_+$, $A\in\mathcal{F}_t$ <u>(rappelons que</u> $t_A = t$ <u>sur</u> A, $+\infty$ <u>sur</u> A^c). <u>Alors, il commute aux opérateurs d'i.s.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit K opérateur commutant aux $E(.|\mathcal{F}_{t_A})$. Alors on a l'égalité :

$$K\left(\int_{[0,\infty]} f\, dU\right) = \int_{[0,\infty]} f\, d(KU)$$

pour $U\in L^2(\mathcal{F}_\infty,P)$, $f=1_{0_A}$, $A\in\mathcal{F}_0$, ou $f = 1_{]s_B,t_B]}$, $s<t$, $B\in\mathcal{F}_s$. Or, d'après [13] (page 79), ces processus f engendrent la tribu prévisible, et donc par continuité de K, on déduit :

$$K\,K_f\,U = K_f\,KU \quad \text{pour tout processus prévisible borné } f.$$

Donc, K commute aux opérateurs d'i.s., et donc aux $(E(.|\mathcal{F}_T),\ T$ t.a) (on prend $f = 1_{]0,T]}$) ∎

Sous les hypothèses faibles suivantes (que nous supposerons jusqu'à la fin du paragraphe 2) :

c). $L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ est séparable (cf. [6])

d). $\mathcal{F}_0$ est P triviale,

nous allons montrer la réciproque du théorème 4.

Observons que, d'après c), il existe une martingale séparatrice $Z\in\mathcal{M}^2$, c'est à dire telle que : $\forall U\in\mathcal{M}^2$, $d\langle U,U\rangle \ll d\langle Z,Z\rangle$

D'autre part, toute martingale totalisatrice (s'il en existe) est séparatrice et inversement, s'il existe une martingale totalisatrice, toute martingale séparatrice est elle-même totalisatrice. Ces remarques nous conduisent naturellement à la démonstration du :

Théorème 5 :

Si, outre les hypothèses c) et d), on suppose que les seuls opérateurs qui commutent aux $(E(.|\mathcal{F}_T)$, T t.a) sont des opérateurs d'i.s, alors il existe une martingale totalisatrice.

Démonstration : Soit $Z \in \mathcal{M}^2$, nulle en 0, qui soit une martingale séparatrice. On note K l'opérateur de projection des variables de carré intégrable, $\mathcal{F}_\infty$ mesurables, sur l'orthogonal (fort) de Z (dans $\mathcal{M}^2$, et non pas dans $\mathcal{M}^{2,0}$). Cet opérateur commute aux $E(.|\mathcal{F}_T)$, et donc par hypothèse il existe $f \in \mathcal{P}$, borné, tel que :

$$\forall U \in L^2(\mathcal{F}_\infty),\ KU = E(U) + \int_0^\infty f(u)\, dU_u.$$

Remarquons que, par définition de K, on a : $KZ = 0$, donc : $\int_0^\infty f(u)dZ_u = 0$, ce qui équivaut à $\int_0^\infty f^2(u)d<Z,Z>_u = 0$; or, Z étant séparatrice, on a pour tout $U \in \mathcal{M}^2$, $d<U,U> \ll d<Z,Z>$, et donc $\int_0^\infty f^2(u)d<U,U> = 0$, d'où : $\int_0^\infty f(u)\, dU_u = 0$. On en déduit $KU = E(U)$, c'est à dire que Z est totalisatrice. ∎

Notons que la démonstration précédente fournit, dans le cas où il n'y a pas de martingale totalisatrice, un exemple naturel d'opérateur qui commute aux $E(.|\mathcal{F}_T)$, et qui n'est pas opérateur d'i.s : le projecteur sur l'orthogonal (fort) d'une martingale séparatrice.

Encore quelques remarques :

- d'après le théorème 1, la recherche d'une martingale totalisatrice a une solution si, et seulement si, $P \in \bigcup_{X \in \mathcal{M}^2} \mathrm{ext}(\mathcal{M}_{\{X\}})$

- en [6] , l'étude précédente est menée à l'aide de la théorie des algèbres de Von Neumann. Or, il existe une caractérisation des algèbres de Von Neumann commutatives qui admettent un vecteur totalisateur, caractérisation qui est très opératoire dans cette théorie (celle des algèbres de Von Neumann). Rappelons le :

Théorème 6 : ([7] , théorème 1, page 208)

Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien séparable, et $\mathcal{Z}$ une algèbre de Von Neumann commutative, constituée d'opérateurs bornés de $\mathcal{H}$.

Alors, il existe un espace mesurable $(S,\mathcal{A})$, une mesure positive bornée m sur $(S,\mathcal{A})$, un champ mesurable $\zeta \to \mathcal{H}(\zeta)$ d'espaces hilbertiens

non nuls sur S, et un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\hat{\mathcal{H}} = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta)\, dm(\zeta)$ qui transforme $\mathcal{Z}$ en l'algèbre $\tilde{\mathcal{Z}}$ des opérateurs diagonalisables (c'est à dire des opérateurs $T = \int^{\oplus} t(\zeta)\, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}(\zeta)}\, dm(\zeta)$, où $t \in L^{\infty}(S, \mathcal{A}, m)$).
Ainsi que son :

Corollaire :

Avec les notations précédentes, $\mathcal{Z}$ possède un vecteur totalisateur si, et seulement si : $\dim(\mathcal{H}(\zeta)) = 1$ m ps.

Démonstration : On peut travailler d'emblée avec $\hat{\mathcal{Z}}$ sur $\hat{\mathcal{H}}$. Dire que $\hat{\mathcal{Z}}$ possède un vecteur totalisateur $x = \int^{\oplus} x(\zeta)\, dm(\zeta)$ est équivalent à :

$$\left[y \in \mathcal{H} \text{ vérifie } (Tx,y) = 0,\ \forall T \in \hat{\mathcal{Z}} \iff y = 0\right].$$

Or, on a :

$$\int t(\zeta)\, (x(\zeta), y(\zeta))_{\zeta}\, dm(\zeta) = 0 \quad \forall t \in L^{\infty}(S,m) \iff (x(\zeta), y(\zeta))_{\zeta} = 0, m \text{ ps}$$

d'où l'on déduit : x est totalisateur pour $\hat{\mathcal{Z}}$ si, et seulement si, m ps, $x(\zeta)$ est une base de $\mathcal{H}(\zeta)$, d'où le résultat ∎

Il peut être intéressant en soi d'expliciter, dans notre cadre, les objets figurant dans le théorème 6 : nos données de base sont

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty}, P) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} = \{K_f \ ;\ f \in \mathcal{P},\ f \text{ borné}\}$$

On confond toujours maintenant une martingale de $\mathcal{M}^2$ avec sa variable terminale.

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty}, P)$ est séparateur (i.e : la martingale associée est séparatrice), on pose : $S = \Omega \times \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}$, et $dm(s,\omega) = d\langle X,X\rangle_s(\omega)\, dP(\omega)$. Pour $U,V \in \mathcal{H}$, on note $h_{U,V}(s,\omega)$ une version de $\frac{d\langle U,V\rangle}{d\langle X,X\rangle}(s,\omega)$ (la mesure spectrale $\nu_{U,V}$ associée à (U,V) est $d\langle U,V\rangle_s(\omega)\, dP(\omega)$). Soit $\mathcal{H}'$ un sous-$\mathbb{Q}$ espace vectoriel dénombrable de $\mathcal{H}$, dense dans $\mathcal{H}$. Il existe une partie m-négligeable $N \subset S$ telle que, pour tout $(s,\omega) \notin N$, la fonction $h^{s,\omega} : (U,V) \to h_{U,V}(s,\omega)$ soit une forme bilinéaire, symétrique, positive sur $\mathcal{H}'$, et que l'espace hilbertien $\mathcal{H}(s,\omega)$

déduit de $(\mathcal{H}', h^{s,\omega})$ par passage au quotient et complétion soit non nul. On définit ensuite arbitrairement $\mathcal{H}(s,\omega) \neq 0$, pour $(s,\omega) \in N$, et on munit les $\mathcal{H}(s,\omega)$ d'une structure de champ mesurable.

Ceci étant, le corollaire précédent s'énonce, pour nous, sous la forme "triviale" suivante :

Proposition : $\mathfrak{M}^2$ admet une martingale totalisatrice si, et seulement si, X étant une martingale séparatrice, il existe une application linéaire $j : U \to u$ de $\mathcal{H}^o$ (l'orthogonal de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$) dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mathcal{P}, d<X,X>dP)$ telle que :

$$j(X) = 1 \qquad \text{et} \qquad d<U,U> = u^2\, d<X,X>.$$

Démonstration :

- la condition nécessaire est immédiate si, l'on rappelle que, s'il existe une martingale totalisatrice, alors toute martingale séparatrice est totalisatrice.

- inversement, j étant linéaire, on a, par polarisation :

$d<U,U> = uv\, d<X,X>$, et donc $d<U,X> = u\, d<X,X>$, ce qui entraîne finalement $U = P_{\mathcal{L}^2(X)}(U)$. ∎

Le fait que cette proposition (évidente) soit la traduction du corollaire du théorème 6 (non évident) corrobore l'opinion de DELLACHERIE, selon laquelle on n'obtiendra (malheureusement) pas grand-chose de profond de la confrontation i.s-algèbres de Von Neumann.

3 - REPRESENTATION DES MARTINGALES D'UN P A I

Soit $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un P.A.I, homogène, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, à trajectoires càdlàg, et issu de $x_o = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas). Sa loi P est caractérisée par la célèbre formule de Lévy-Khintchine :

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \; , \; E\left[e^{i(x,X_t)}\right] = e^{-t\psi(x)}$$

avec $\psi(x) = i(a,x) + \frac{1}{2}(Sx,x) + \int m(dy)\, \{1 - e^{\,i(x,y)} + \frac{i(x,y)}{1+|y|^2}\}$

où $a = (a_i) \in \mathbb{R}^d$, $S = (s_{ij})$ est une matrice semi-définie positive, et m une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ $\{0\}$ telle que :

$$(5) \qquad \int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \, m(dx) < \infty$$

Le processus (X_t) est un processus fortement markovien, de générateur $\mathcal{L}_\psi$, dont le domaine contient $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec :

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}_\psi f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) + \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$+ \int m(dy) \left[f(x+y) - f(x) - \left(\sum_i y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \frac{1}{1+|y|^2} \right]$$

$\mathcal{S}_o(\mathcal{L}_\psi)$ comprenant la seule loi P, le théorème 3 s'applique.

Nous donnons maintenant une démonstration directe de ce théorème pour les P.A.I.

On veut donc montrer :

(i) $\quad (\mathcal{M}^c_{loc})^o(P) = \mathcal{L}^2_{loc}((X^i)^c \; ; \; 1 \leq i \leq d)$

(ii) $\quad$ Toute somme compensée de sauts $M \in \mathcal{M}^o_{loc}(P)$ s'écrit

$$M = W * (\mu - \nu) \quad (\text{avec } W \in \widetilde{\mathcal{P}})$$

Tout d'abord, énonçons le :

<u>Lemme 2</u> : L'espace vectoriel $\mathcal{W} = \{W * (\mu-\nu) \in H^1 \mid W \in \widetilde{\mathcal{P}}\}$ est un sous-espace fermé de H^1.

<u>Démonstration</u> : X étant quasi-continu à gauche, on a, pour toute martingale $W * (\mu-\nu) \in H^1$, l'égalité :

$$||W * (\mu-\nu)||_{H^1} = E\left(\int W^2 \, d\mu\right)^{1/2}.$$

Or, l'espace $\widetilde{\mathcal{W}} = \{W \in \widetilde{\mathcal{P}} \mid \; ||W|| = E(\int W^2 d\mu)^{1/2} < \infty\}$ est un espace de Banach isomorphe à $(\mathcal{W}, ||.||_{H^1})$ ∎

On procède maintenant par étapes :

<u>Première étape</u> :

Les propriétés (i) et (ii) sont respectivement équivalentes à :

(j) $\quad (\mathcal{M}^{2,c})^o(P) = \mathcal{L}^2(\ (X^i)^c\ ;\ 1 \leq i \leq d)$

(car $\mathcal{L}^2(X^i\ ;\ 1 \leq i \leq d)$ est fermé dans $\mathcal{M}^{2,c}(P)$).

et

(jj) $\quad (\mathcal{M}^{2,d})^o(P) = \{W * (\mu-\nu) \in \mathcal{M}^2 \mid W \in \tilde{\mathcal{P}}\}$

Montrons (jj) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $M \in \mathcal{M}^o_{loc}(P)$ qui soit, de plus, somme compensée de sauts. On peut la supposer dans $H^1(P)$ (car elle y appartient localement, cf [9]). Elle est donc, dans cet espace, la limite d'une suite $M^n = (M^n)^c + W^n * (\mu-\nu)$ de martingales de carré intégrable. La suite $(M^n)^c$ converge dans H^1 vers $M^c = 0$, et donc $W^n * (\mu-\nu) \xrightarrow[H^1]{(n \to \infty)} M$. D'après le lemme 2, il existe donc $W \in \tilde{\mathcal{P}}$ tel que $M = W * (\mu-\nu)$, et (ii) est vérifiée.

Deuxième étape :

Notons Δ l'ensemble des fonctions étagées $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}^d$, $t_i \in \mathbb{R}_+$). Les variables ($U^\alpha_\infty = \exp\{ i \int_0^\infty (\alpha_s, dX_s) + \int_0^\infty \psi(\alpha_s)ds\}$, $\alpha \in \Delta$) sont totales dans $L^2(\mathcal{F}_\infty,P)$: en effet, si $Y \in L^2(\mathcal{F}_\infty,P)$ est orthogonal à ces variables, elle est aussi orthogonale aux variables ($e^{i\int_0^\infty (\alpha_s,dX_s)}$, $\alpha \in \Delta$) qui sont clairement totales dans $L^2(\mathcal{F}_\infty,P)$, et donc $Y=0$.

Soulignons au passage que ce raisonnement est spécifique aux PAI.

Troisième étape :

Le résultat précédent entraîne la totalité des martingales (U^α, $\alpha \in \Delta$) dans $\mathcal{M}^2(P)$, où l'on pose :

$$U^\alpha_t = \exp\{i \int_0^t (\alpha_s, dX_s) + \int_0^t \psi(\alpha_s)ds\}$$

(noter que $U^\alpha_t = U^{\alpha 1_{]0,t]}}_\infty$, et que U^α est une martingale, d'après la formule (4)). Les martingales $\{(U^\alpha)^c, \alpha \in \Delta\}$ (resp. $(U^\alpha)^d$, $\alpha \in \Delta$) sont donc totales dans $(\mathcal{M}^{2,c})^o(P)$ (resp : $(\mathcal{M}^{2,d})^o(P)$). Donc, pour montrer (j) et (jj), il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in \Delta$, on a :

(k) $\quad (U^\alpha)^c \in \mathcal{L}^2((X^i)^c,\ 1 \leq i \leq d)$

(kk) $\quad (U^\alpha)^d = W^\alpha * (\mu-\nu) \qquad (W^\alpha \in \widetilde{\mathcal{P}})$

Dernière étape :

Fixons maintenant $\alpha \in \Delta$, et posons :

$$U_t = U_t^\alpha = e^{V_t}, \text{ avec } V_t = i\int_0^t (\alpha_s, dX_s) + \int_0^t \psi(\alpha_s)ds$$

En appliquant la formule d'Ito à e^{V_t}, il vient :

$$U_t = 1 + \int_0^t U_{s-}dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t U_s \, d<V^c, V^c>_s$$

$$+ \sum_{s \leq t} \{U_s - U_{s-} - U_{s-}\Delta V_s\}$$

On a donc :

$$U_t^c = \int_0^t U_{s-}\, i\,(\alpha_s, dX_s^c), \text{ d'où (k).}$$

D'autre part, les martingales-sommes compensées de sauts, U_t^d et $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} U_{s-}(e^{i(\alpha_s,x)}-1)(\mu-\nu)(ds\times dx)$ ont même processus de saut : $U_{s-}(e^{i(\alpha_s,\Delta X_s)}-1)$ et sont donc égales, d'où (kk) (on a obtenu, en outre, la formule explicite :

$$U_t = 1 + \int_0^t U_{s-}\, i(\alpha_s, dX_s^c) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} U_{s-}(e^{i(\alpha_s,x)}-1)(\mu-\nu)(ds\times dx)) \blacksquare$$

En particulier, pour d=1, si X_t est intégrable pour tout t (avec $E(X_t) = at$), alors $Y_t = X_t - at$ est une martingale, et les propriétés (i) et (ii) peuvent être résumées en :

Toute martingale locale $(M_t,\ t \geq 0)$ admet une représentation comme :

(6) $$M_t = E(M_0) + \int_0^t u_s\, d\,Y_s^c + \int_0^t W(s, \Delta Y_s)dY_s^d$$

(où $u \in \mathcal{P}$, $W \in \widetilde{\mathcal{P}}$; noter que $\Delta Y = \Delta X$).

Cette représentation permet, à mon avis, de mieux comprendre l'appendice de [10] : il y est démontré que toute martingale (locale) pour la filtration d'un P A I réel X se représente comme i.s par rapport à une seule martingale si, et seulement si, X est un mouvement brownien (de covariance $\sigma^2 t$) ou un processus de Poisson, de sauts d'amplitude γ, c'est à dire : soit $U^d=0$, soit $U^c=0$, et alors $\Delta X = \gamma I_{(\Delta X \neq 0)}$.

Ce résultat admet la généralisation suivante, démontrée en [4] (théorème 3) ou [5] (corollaire 2.6) : sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, soit Y martingale localement de carré intégrable (pour simplifier - voir les références pour le cas général), et quasi-continue à gauche, telle que toute martingale (locale) $(M_t, t \geq 0)$ se représente à l'aide de la formule (6).

Alors, toute martingale locale $(M_t, t \geq 0)$ admet une représentation prévisible $M_t = E(M_o) + \int_o^t v_s \, dY_s$ $(v \in \mathcal{P})$ si, et seulement si :

e). les mesures prévisibles $d < Y^c, Y^c >$ et $d < Y^d, Y^d >$ sont étrangères.

f). il existe un processus prévisible f tel que $\Delta Y = f \, I_{(\Delta Y \neq 0)}$.

<u>Nota bene</u> -

La démonstration ci-dessus du théorème de représentation des martingales (locales) d'un P A I n'est pas originale : c'est la généralisation naturelle de celle présentée par NEVEU ([8]) et MEYER [9] pour le mouvement brownien. Nous ignorons l'origine précise de cette méthode, qui doit être assez ancienne.

Cependant, le précédent exposé nous semble aussi complet que possible (puisque l'on obtient la représentation des martingales <u>locales</u>) ce qui nous paraît justifier sa publication.

REFERENCES

[1] C. DELLACHERIE : "Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson". Séminaire Proba. VIII, Lecture Notes in Math. 381, Springer, Berlin (1974).

[2] K.A. YEN & Ch. YOEURP : "Représentation des martingales comme intégrales stochastiques de processus optionnels". Séminaire Proba. X, Lecture Notes in Math. 511, Springer Berlin (1976).

[3] J. JACOD : "A general theorem of representation for martingales". A.M.S. Meeting (à paraître).

[4] J. JACOD & M. YOR : "Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales". (A paraître au Z. für Wahr.).

[5] M. YOR : "Représentation intégrale des martingales, étude des distributions extrémales". Article de Thèse, 1976.

[6] C. DELLACHERIE, C. STRICKER : "Changements de temps et intégrales stochastiques". (Dans ce volume).

[7] J. DIXMIER : "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien" (algèbres de Von Neumann) Seconde édition, Gauthier-Villars, 1969.

[8] J. NEVEU : Notes sur l'intégrale stochastique. Cours de 3ème cycle (1972). Lab. de Probabilités, Paris VI.

[9] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Proba. X, Lecture Notes in Math. 511, Springer Berlin (1976).

[10] C.S. CHOU & P.A. MEYER : "Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels". Séminaire Proba. IX, Lecture Notes in Math. 465, Springer Berlin (1975).

[11] P.A. MEYER : Notes sur les intégrales stochastiques. I Intégrales hilbertiennes. (Dans ce volume)

[12] D.W. STROOCK : "Diffusion processes associated with Lévy generators". Z. für. Wahr. 32, 209-244, 1975.

[13] C. DELLACHERIE : "Capacités et Processus stochastiques" Springer-Verlag, Berlin, 1972.