SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Deux remarques sur la séparabilité optionnelle

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 47-50
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__47_0>

Université de Strasbourg
Institut de Mathématique
Séminaire de Probabilités 1975/76

DEUX REMARQUES SUR LA SEPARABILITE OPTIONNELLE

par C. Dellacherie

Doob a récemment relancé l'intérêt de la notion de séparabilité d'un processus en l'élargissant de sorte que tout processus mesurable soit séparable. Nous n'avons pas l'intention de revenir ici en détail là-dessus : nous renvoyons pour cela le lecteur à l'article de Doob (paru aux Annales de l'Institut Fourier) ou à l'exposé de Benveniste, dans le volume X de notre séminaire. Nous voulons simplement faire ici deux choses : préciser le rôle des théorèmes de section dans l'affaire, et montrer que la nouvelle notion peut se ramener à l'ancienne à l'aide d'un changement de temps. Nous nous limiterons à considérer le cas des processus optionnels, en nous plaçant toutefois sous les conditions "inhabituelles" - i.e. la famille ($\underline{\underline{F}}_t$) peut n'être ni continue à droite, ni complétée d'une manière ou d'une autre : on sait que la plupart des théorèmes de la théorie générale des processus, en particulier les théorèmes de section, sont encore valables dans ce cadre (voir la nouvelle édition des chapitres I à IV de "Probabilités et Potentiel").

SUR L'USAGE DU THÉORÈME DE SECTION

Rappelons qu'un processus réel $X = (X_t)$ est dit <u>optionnellement séparable</u> s'il existe un <u>séparateur optionnel</u> H pour X, i.e. un ensemble optionnel H tel que

1) il existe une suite de t.d'a. (S_n) dont H est la réunion des graphes

2) pour presque tout w , l'ensemble des $(t,X_t(w))$, où t parcourt la coupe H(w) de H selon w, est dense dans le graphe de la trajectoire $t \to X_t(w)$.

Notons que l'on peut toujours supposer que les graphes des t.d'a. constants, à valeurs rationnelles, sont contenus dans H, ce qui permet en particulier de supposer que les t.d'a. S_n "décrivant" H sont finis.

Et l'on démontre, à l'aide du théorème de section optionnelle, que tout processus optionnel est optionnellement séparable.

Il est facile de voir (considérer le cas où X est une indicatrice, et raisonner comme ci-dessous) que démontrer le résultat précédent équivaut à démontrer le théorème de section optionnelle : il n'est donc pas question de trouver une démonstration "élémentaire" de l'existence d'un séparateur optionnel pour tout processus optionnel. Là où je veux placer ma remarque, c'est quand on étudie un processus optionnel, dont on connait un séparateur optionnel "par voie élémentaire", en voulant faire l'économie du théorème de section : si H est le séparateur optionnel de notre processus X , il est trivial (cf les lignes suivantes) que tout ensemble optionnel A contenu dans H vérifie le théorème de section, et il n'y a donc aucune raison de ne pas utiliser ce dernier. En effet, d'abord notre A est la réunion des graphes d'une suite de t.d'a. (T_n) - prendre pour T_n la "restriction" de S_n à $\{S_n < \infty , Y_{S_n} = 1\}$, où Y est l'indicatrice de A - , et, si $T = \inf T_n$, la projection de A sur Ω est égale à $\{T<\infty\}$: pour $\epsilon>0$ donné, il existe un entier n tel que $\inf(T_1,\dots,T_n)$ fournisse une section de A à ϵ près.

OÙ L'ON FAIT DU NEUF AVEC DU VIEUX...

Soit H un candidat comme séparateur optionnel, i.e. un ensemble réunion des graphes d'une suite de t.d'a. (S_n) telle que, pour se simplifier la vie, les S_n soient finis et que, pour tout w, les $S_n(w)$ forment un ensemble dense dans $[0,+\infty]$.

Voici le petit miracle

THEOREME.- <u>Il existe un changement de temps continu</u> (T_t) <u>de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>tel que</u>

1) <u>les</u> T_t <u>sont finis pour</u> $t<1$ <u>et infinis pour</u> $t\geq 1$

2) <u>l'ensemble</u> H <u>soit égal à la réunion des graphes des</u> T_d , <u>où</u> d <u>parcourt l'ensemble</u> D <u>des nombres dyadiques contenus dans</u> $(0,1)$.

D/ Mettons une masse 2^{-n} au point $S_n(w)$ pour tout n et tout w (il n'est pas exclu que les graphes des S_n se coupent : on somme alors les masses mises au même point) et considérons le processus croissant optionnel $A = (A_t)$ correspondant :

$$A_t = \sum_{S_n \leqq t} 2^{-n}$$

Les trajectoires de A sont continues à droite, strictement croissantes, à valeurs dans $[0,1[$, et A_∞ vaut 1 (tandis que A_0 ne vaut pas forcément 0) . Considérons le changement temps (T_t) associé à (A_s) , pour $t \in (0,+\infty)$

$$T_t = \inf\{s : A_s > t\} = \inf\{s : A_s \geqq t\}$$

la deuxième égalité provenant du fait que A est strictement croissant et que A_∞ vaut 1. Les T_t sont des t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ - sans complétion - à cause de la première égalité, et finalement de $(\underline{\underline{F}}_t)$ à cause de la seconde ; ils sont finis pour $t<1$ et infinis pour $t \geqq 1$; enfin, le processus (T_t) a ses trajectoires continus, toujours à cause de la croissance stricte. Il nous reste à montrer que H est la réunion des graphes des T_d , d parcourant D. D'abord, il est clair que, pour tout n et tout w , $A(.,w)$ a un saut en $S_n(w)$, ce qui permet d'affirmer que $S_n(w)$ apparait parmi les $T_d(w)$, $d \in D$, car D est dense dans $[0,1]$: H est donc contenu dans la réunion des graphes des T_d , et cela nous suffirait pour la suite car, si H est séparateur pour un X , la réunion des graphes des T_d l'est a fortiori. Poursuivons cependant en montrant que, pour tout d et tout w , $T_d(w)$ apparait parmi les $S_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Ecrivons d sous forme de fraction irréductible, désignons par p l'exposant de 2 au dénominateur, et par q le plus petit entier tel que $\sum_{n \geqq q} 2^{-n} < 2^{-p}$ (on a $q>1$ puisque T_d est fini) : alors, $T_d(w)$ est égal à l'un des nombres $S_1(w), S_2(w), \ldots, S_{q-1}(w)$.

REMARQUES. 1) On a un résultat analogue si les S_n ne sont pas supposes finis, mais alors les T_d ne sont pas forcément finis.

2) En fait, on peut donner explicitement la valeur des T_d en fonction des S_n , et la construction que nous allons donner marche que les S_n soient finis ou non, et que les $S_n(w)$ soient denses ou non dans $[0,\infty[$: on obtient alors une espèce de réarrangement totalement ordonné des S_n . Voici comment l'on peut procéder.

Ecrivons d sous forme d'un développement dyadique (1/2 s'écrit 1 ; 1/4 s'écrit 01 ; 3/4 s'écrit 11 etc) , soit $d = a_1a_2...a_n$ où les a_i sont des 0 ou des 1 . Alors, la construction de T_d fait intervenir les t.d'a. $S_1,S_2,...,S_n$ et les 0 et 1 du développement de d forment un codage des inf et sup à prendre dans cette construction : pour $i = 1,2,...,n-1$, a_i symbolise $\inf(S_i,.)$ si $a_i=0$ et $\sup(S_i,.)$ si $a_i=1$; la présence de a_n , qui vaut 1 , signifie simplement que S_n est présent. Ainsi, si d = 010011 , alors

$$T_d = \inf(S_1,\sup(S_2,\inf(S_3,\inf(S_4,\sup(S_5,S_6)))))$$

Voici, pour finir, un théorème qui ramène la nouvelle notion de séparabilité à l'ancienne. Sa démonstration est laissée au lecteur.

THEOREME.- Soit $X = (X_t)$ un processus réel. Alors X est optionnellement séparable si et seulement s'il existe un changement de temps continu (T_t) de $(\underline{\underline{F}}_t)$ tel que les T_t croissent de 0 à $+\infty$ avec t et que le processus changé de temps (X_{T_t}) soit séparable au sens ancien.

Ceci n'enlève rien, bien entendu, à la valeur de la notion de séparabilité optionnelle, que l'on verra d'ailleurs apparaitre dans le tome 2 de la nouvelle édition de "Probabilités et Potentiel". Mais ceci prouve une fois de plus (cf l'exposé de Stricker et moi-même) que la théorie générale des processus, c'est l'étude des notions invariantes par changement de temps.