

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ÉRIK LENGART

Une caractérisation des processus prévisibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 415-417

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__415_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DES PROCESSUS PREVISIBLES

(E. LENGLART)

Soit $(\Omega, \underline{\mathbb{F}}, \underline{\mathbb{F}}_t, P)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles. On appelle \underline{W} (resp. \underline{W}_0) l'espace des martingales càdlàg. à variation intégrable (resp. à v.i. nulles en 0).

Si X est un processus mesurable brut (i.e. non nécessairement adapté) on note X^0 sa projection optionnelle et X^P sa projection prévisible quand elles existent. On appelle \underline{V} l'espace des processus à variation intégrable adaptés à trajectoires càdlàg. Si A appartient à \underline{V} on note \tilde{A} sa projection duale prévisible et \tilde{A}^C sa compensée $A - \tilde{A}$.

On sait que si un processus X est prévisible borné et si M appartient à \underline{W} , le processus $(X \cdot M)_t = \int_0^t X_s dM_s$ (intégrale de Stieltjes) est encore une martingale. Nous allons étudier le problème de la réciproque.

DEFINITION. Un processus brut $(X_t)_{t \leq +\infty}$ est dit innovant si, pour tout temps d'arrêt T , X_T est intégrable et $E[X_T] = E[X_0]$.

Cela revient à dire que $E[X_\infty - X_T | \underline{\mathbb{F}}_T] = 0$ p.s. pour tout t . d'a. T .

Remarquons que (X innovant et adapté) \Leftrightarrow (X est une martingale uniformément intégrable).

THEOREME 1. Soit X un processus brut (mesurable) borné. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\forall M \in \underline{W}_0$, $X \cdot M$ est innovant .
- 2) $X^0 = X^P$ (i.e. $\forall T$ t. d'a., $E[X_T | \{T < +\infty\} | \underline{\mathbb{F}}_T] = X_T^P | \{T < +\infty\}$ p.s.).

DEMONSTRATION. a) \Rightarrow b) : Soit $A \in \underline{V}$; on a $\tilde{A} \in \underline{W}_0$ donc $E[\int_0^\infty X_s d\tilde{A}_s^C] = 0$. X^P étant prévisible borné $X^P \cdot \tilde{A}^C \in \underline{W}_0$ et donc $E[\int_0^\infty X_s^P d\tilde{A}_s^C] = 0$. Par différence $E[\int_0^\infty (X_s - X_s^P) d\tilde{A}_s^C] = 0$. D'autre part, \tilde{A} étant prévisible on a $E[\int_0^\infty (X_s - X_s^P) d\tilde{A}_s] = 0$, donc en ajoutant $E[\int_0^\infty (X_s - X_s^P) d\tilde{A}_s^C] = 0$. Enfin, prenant une projection optionnelle et notant que $(X^P)^0 = X^P$, on a

$$E[\int_0^\infty (X_s^0 - X_s^P) d\tilde{A}_s] = 0 \text{ pour tout } A \in \underline{V}.$$

Mais parmi les éléments de \underline{V} figurent les processus $A_t = fI_{\{t \geq T\}}$, où T est un t.a. et f est une v.a. bornée $\underline{\mathbb{F}}_T$ -mesurable. On a donc $E[X_T^0 - X_T^P | \underline{\mathbb{F}}_T] = 0$, puis $X_T^0 = X_T^P$ p.s., et comme ces deux processus sont optionnels, ils sont indistinguables.

b) \Rightarrow a). Soient $M \in \underline{W}_0$, T un temps d'arrêt ; soit M^T le processus $(M_{T \wedge t})$ qui appartient à \underline{W}_0 . On a

$$E[(X \cdot M)_T] = E\left[\int_0^T X_s dM_s\right] = E\left[\int_0^\infty X_s dM_s^T\right] = E\left[\int_0^\infty X_s^0 dM_s^T\right] = E\left[\int_0^\infty X_s^P dM_s^T\right] = 0.$$

Par suite $X \cdot M$ est innovant.

COROLLAIRE. Soit X un processus optionnel borné. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\forall M \in \underline{W}_0$, $X \cdot M$ est une martingale.
- b) X est prévisible.

Ces résultats sont globaux. Soient maintenant X un processus optionnel borné et $M \in \underline{W}$; il est intéressant de chercher une condition nécessaire et suffisante pour que $X \cdot M$ soit une martingale. On a alors le théorème suivant (qui implique d'ailleurs le corollaire précédent) :

THEOREME 2. Soient $M \in \underline{W}$ et X un processus optionnel borné¹. Les deux conditions suivantes sont équivalentes

- a) $X \cdot M$ est une martingale.
- b) $N_t = \sum_{s \leq t} (X_s - X_s^P) \Delta M_s$ est une martingale.

DEMONSTRATION. Remarquons que l'on peut supposer $M_0 = 0$. Soit alors $A_t = \sum_{s \leq t} \Delta M_s$; on sait que $M = \tilde{A}$. Alors

$$X \cdot M = X^P \cdot M + (X - X^P) \cdot M = X^P \cdot M - (X - X^P) \cdot \tilde{A} + N$$

Pour tout temps d'arrêt T , on a $E[(X^P \cdot M)_T] = 0$ car X^P est prévisible, et $E[(X - X^P) \cdot \tilde{A}]_T = E\left[\int_0^\infty (X_s - X_s^P) d\tilde{A}_s^T\right] = 0$ car \tilde{A}^T est prévisible. Donc

$$E[(X \cdot M)_T] = E[N_T] \text{ pour tout } T$$

et l'on voit que a) \Leftrightarrow b).

Remarquons que si X est supposé seulement mesurable, on a le même théorème à condition de remplacer partout le mot martingale par le mot innovant.

Pour terminer, traitons le problème dual du théorème 1 :

THEOREME 3 . Soit $M \in \underline{W}_0$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\forall X$ optionnel borné $X \cdot M$ est une martingale.
- b) $M = 0$

1. Cette condition peut être affaiblie : il suffit que X^P existe et que l'on ait $E\left[\int_0^\infty |X_s| |dM_s|\right] < +\infty$, $E\left[\int_0^\infty |X_s^P| |dM_s|\right] < +\infty$.

DEMONSTRATION. Soit μ la mesure sur $\underline{B}_{\underline{M}} \times \underline{F}$ associée à M . a) signifie que $\mu=0$ sur la tribu des optionnels. ⁺ Soit X un processus mesurable borné ; M étant optionnelle on a $\mu(X)=\mu(X^0)=0$, par suite $\mu=0$ et $M=0$.

REFERENCES

- C.DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der M. 67. Springer-Verlag 1972.
- P.A.MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Lecture Notes in M. 511. Séminaire de Probabilités X. Springer-Verlag 1976.

E. Lenglart
 Université de Rouen
 Département de Mathématique
 76130 Mont Saint Aignan