ÉRIK LENGLART

Une caractérisation des processus prévisibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 415-417
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__415_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

UNE CARACTERISATION DES PROCESSUS PREVISIBLES

(E. LENGLART)

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles. On appelle $\underline{\underline{W}}$ (resp. $\underline{\underline{W}}_0$) l'espace des martingales càdlàg. à variation intégrable (resp. à v.i. nulles en 0).

Si X est un processus mesurable brut (i.e. non nécessairement adapté) on note X^o sa projection optionnelle et X^p sa projection prévisible quand elles existent. On appelle $\underline{\underline{V}}$ l'espace des processus à variation intégrable adaptés à trajectoires càdlàg. Si A appartient à $\underline{\underline{V}}$ on note $\tilde{A}$ sa projection duale prévisible et $\overset{c}{A}$ sa compensée $A-\tilde{A}$.

On sait que si un processus X est prévisible borné et si M appartient à $\underline{\underline{W}}$, le processus $(X\cdot M)_t = \int_0^t X_s dM_s$ (intégrale de Stieltjes) est encore une martingale. Nous allons étudier le problème de la réciproque.

DEFINITION. Un processus brut $(X_t)_{t\leq+\infty}$ est dit <u>innovant</u> si, pour tout temps d'arrêt T, X_T est intégrable et $E[X_T]=E[X_0]$.

Cela revient à dire que $E[X_\infty - X_T|\underline{\underline{F}}_T] = 0$ p.s. pour tout t. d'a. T.

Remarquons que (X innovant et adapté) <=> (X est une martingale uniformément intégrable).

THEOREME 1. <u>Soit</u> X <u>un processus brut</u> (<u>mesurable</u>) <u>borné</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) $\forall\, M\in\underline{\underline{W}}_0$, $X\cdot M$ <u>est innovant</u> .

2) $X^o=X^p$ (<u>i.e.</u> $\forall$ T <u>t. d'a.</u>, $E[X_T I_{\{T<+\infty\}}|\underline{\underline{F}}_T]=X_T^p I_{\{T<+\infty\}}$ <u>p.s.</u>).

DEMONSTRATION. a) => b) : Soit $A\in\underline{\underline{V}}$; on a $\overset{c}{A}\in\underline{\underline{W}}_0$ donc $E[\int_0^\infty X_s d\overset{c}{A}_s]=0$. X^p étant prévisible borné $X^p.A^c\in\underline{\underline{W}}_0$ et donc $E[\int_0^\infty X_s^p d\overset{c}{A}_s]=0$. Par différence $E[\int_0^\infty (X_s-X_s^p)d\overset{c}{A}_s]=0$. D'autre part, $\tilde{A}$ étant prévisible on a $E[\int_0^\infty (X_s-X_s^p)d\tilde{A}_s] =0$, donc en ajoutant $E[\int_0^\infty (X_s-X_s^p)dA_s]=0$. Enfin, prenant une projection optionnelle et notant que $(X^p)^o=X^p$, on a

$$E[\int_0^\infty (X_s^o-X_s^p)dA_s] = 0 \quad \text{pour tout } A\in\underline{\underline{V}} .$$

Mais parmi les éléments de $\underline{\underline{V}}$ figurent les processus $A_t=fI_{\{t\geq T\}}$, où T est un t.a. et f est une v.a. bornée $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable. On a donc $E[X_T^o-X_T^p|\underline{\underline{F}}_T]=0$, puis $X_T^o=X_T^p$ p.s., et comme ces deux processus sont optionnels, ils sont indistinguables.

b)=>a). Soient $M \in \underline{\underline{W}}_0$, T un temps d'arrêt ; soit M^T le processus $(M_{T\wedge t})$ qui appartient à $\underline{\underline{W}}_0$. On a

$$E[(X\cdot M)_T] = E[\int_0^T X_s dM_s] = E[\int_0^\infty X_s dM_s^T] = E[\int_0^\infty X_s^o dM_s^T] = E[\int_0^\infty X_s^p dM_s^T] = 0 .$$

Par suite X•M est innovant.

COROLLAIRE. Soit X un processus optionnel borné. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall\, M \in \underline{\underline{W}}_0$, X.M est une martingale.

b) X est prévisible.

Ces résultats sont globaux. Soient maintenant X un processus optionnel borné et $M \in \underline{\underline{W}}$; il est intéressant de chercher une condition nécessaire et suffisante pour que X•M soit une martingale. On a alors le théorème suivant (qui implique d'ailleurs le corollaire précédent) :

THEOREME 2. Soient $M \in \underline{\underline{W}}$ et X un processus optionnel borné[1]. Les deux conditions suivantes sont équivalentes

a) X•M est une martingale.

b) $N_t = \Sigma_{s \leq t} (X_s - X_s^p) \Delta M_s$ est une martingale.

DEMONSTRATION. Remarquons que l'on peut supposer $M_0=0$. Soit alors $A_t = \Sigma_{s \leq t} \Delta M_s$; on sait que $M = \overset{c}{A}$. Alors

$$X\cdot M = X^p\cdot M + (X-X^p)\cdot M = X^p\cdot M - (X-X^p)\cdot\tilde{A} + N$$

Pour tout temps d'arrêt T, on a $E[(X^p\cdot M)_T]=0$ car X^p est prévisible, et $E[((X-X^p)\cdot\tilde{A})_T] = E[\int_0^\infty (X_s - X_s^p) d\tilde{A}_s^T] = 0$ car $\tilde{A}^T$ est prévisible. Donc

$$E[(X\cdot M)_T] = E[N_T] \quad \text{pour tout } T$$

et l'on voit que a)<=>b).

Remarquons que si X est supposé seulement mesurable, on a le même théorème à condition de remplacer partout le mot martingale par le mot innovant.

Pour terminer, traitons le problème dual du théorème 1 :

THEOREME 3 . Soit $M \in \underline{\underline{W}}_0$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall$ X optionnel borné X•M est une martingale.

b) M=0

---

1. Cette condition peut être affaiblie : il suffit que X^p existe et que l'on ait $E[\int_0^\infty |X_s||dM_s|]<+\infty$, $E[\int_0^\infty |X_s^p||dM_s|]<+\infty$.

DEMONSTRATION. Soit μ la mesure sur $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}$ associée à M. a) signifie que $\mu=0$ sur la tribu des optionnels. Soit X un processus mesurable borné ; M étant optionnelle on a $\mu(X)=\mu(X^o)=0$, par suite $\mu=0$ et $M=0$.

REFERENCES

C.DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der M. 67. Springer-Verlag 1972.

P.A.MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Lecture Notes in M. 511. Séminaire de Probabilités X. Springer-Verlag 1976.

E. Lenglart
Université de Rouen
Département de Mathématique
76130 Mont Saint Aignan