SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS-DADE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Équations différentielles stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 376-382
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__376_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975-76

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

(C. Doléans-Dade et P.A. Meyer)

Les auteurs remercient les organisateurs du congrès de probabilités d'Urbana (Mars 1976) au cours duquel cette note a été rédigée.

Il est bien connu qu'ITO a développé sa théorie des intégrales stochastiques browniennes afin de pouvoir résoudre des équations différentielles stochastiques du type

(1) $$dX_t = a(t,X_t)dB_t + b(t,X_t)dt$$

où (B_t) est le mouvement brownien. Depuis qu'on sait traiter les intégrales stochastiques par rapport à des martingales locales de types de plus en plus généraux, il a paru naturel de chercher à résoudre des équations différentielles du type

(2) $$dX_t = a(t,X_t)dM_t + b(t,X_t)dA_t$$

où M est une martingale locale, A un processus à variation finie (et les équations vectorielles analogues). Voir par exemple les jolis résultats de KAZAMAKI, cités dans la bibliographie. La question a aussi été étudiée par PROTTER [4]. Un théorème d'existence et d'unicité de nature tout à fait générale a été établi par C. DOLEANS-DADE, et accepté pour publication dans le Z. f.W-theorie ([1]). Nous avons appris de PROTTER qu'il était parvenu, indépendamment, à un énoncé à peu près analogue en Février 1976.

La raison d'être de la présente rédaction est la suivante : si l'on considère une équation différentielle stochastique mise sous la forme (2), et si l'on remplace la loi P par une loi Q équivalente, M cesse d'être une martingale locale , et l'équation change de forme. Le seul moyen d'éviter cela, et de mettre en évidence l'invariance de l'équation (et de ses solutions) par un tel changement de loi de probabilité, consiste à adopter systématiquement le point de vue des semimartingales. Si l'on procède ainsi, et si l'on raisonne de manière intrinsèque, on s'aperçoit que les démonstrations elles mêmes se simplifient. Ainsi, le contenu de cette note est le même que celui de l'article [1] de C. DOLEANS-DADE, mais la forme nous en semble plus satisfaisante.

L'énoncé suivant ne fait intervenir qu'une semimartingale, mais il est tout aussi facile à démontrer (à la simplicité des notations près) lorsqu'on remplace l'unique intégrale au second membre par une somme finie d'intégrales analogues, relatives à des semimartingales $M^1,\dots,M^k$ - ce qui couvre le cas d'équations différentielles de la forme (2). On peut aussi, si on le désire, traiter le cas où X,H, et les semimartingales $M^1,\dots,M^k$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (" systèmes" d'équations différentielles).

THEOREME. Soient $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles ; (M_t) une semimartingale nulle en 0 ; (H_t) un processus adapté à trajectoires càdlàg.. Alors l'équation intégrale stochastique

$$(3)\qquad X_t(\omega) = H_t(\omega) + \int_0^t f(\omega,s,X_{s-}(\omega))dM_s(\omega)$$

admet une solution et une seule (X_t) qui est un processus càdlàg. adapté, lorsque la fonction $f(\omega,s,x)$ sur $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ satisfait aux conditions suivantes

(L_1) Pour ω,s fixés, $f(\omega,s,.)$ est lipschitzienne de rapport K .
(L_2) Pour s,x fixés, $f(.,s,x)$ est $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable .
(L_3) Pour x,ω fixés, $f(\omega,.,x)$ est continue à gauche avec limites à droite.

Avant de démontrer cet énoncé, soulignons quelques points. D'abord, l'unicité est celle qui est de règle en théorie des processus (deux solutions sont indistinguables). Dans le même esprit, tous les ensembles négligeables appartenant à $\underline{\underline{F}}_0$, on doit considérer que deux fonctions $f(\omega,s,x)$ et $\overline{f}(\omega,s,x)$ telles que

$f(\omega,.,.) = \overline{f}(\omega,.,.)$ sauf pour des ω qui appartiennent à un ensemble P-négligeable

définissent la même équation différentielle, et l'on peut affaiblir légèrement (L_1) et (L_3) en permettant un ensemble négligeable de valeurs de ω pour lesquelles ces conditions ne sont pas satisfaites.

Ensuite, l'équation considérée est plus générale que les équations usuelles, de deux manières : les "conditions initiales" sont remplacées par un processus H ; la fonction f dépend des trois variables ω,s,x, et non seulement de s,x . Il faut souligner que ce gain en généralité permet de simplifier les démonstrations (et non de les compliquer, comme les esprits inquiets pourraient le craindre).

Enfin et surtout, quel est le sens de l'équation (3) ? Le lemme suivant est inséparable de l'énoncé, puisqu'il donne un sens à l'intégrale stochastique qui y figure.

LEMME 1 . Si X est adapté càdlàg., le processus $(s,\omega) \mapsto f(\omega,s,X_{s-}(\omega))$ est adapté, continu à gauche avec limites à droite (donc prévisible localement borné).

DEMONSTRATION. Pour t fixé, la fonction $(\omega,x) \mapsto f(\omega,t,x)$ est $\underline{\underline{F}}_t \times \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable ($\underline{\underline{F}}_t$-mesurable lorsque x est fixé (L_1), continue en x pour ω fixé (L_2)). Par composition, $f(\omega,t,X_{t-}(\omega))$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable.

L'existence de limites à droite est un peu plus délicate que la continuité à gauche, aussi est-ce elle que nous établirons. D'après (L_3), nous pouvons introduire les quantités finies $f(\omega,t+,x)$, limites à droite de $f(\omega,s,x)$ lorsque $s \downarrow\downarrow t$. Nous écrivons alors pour $s>t$

$$|f(\omega,s,X_{s-}(\omega))-f(\omega,t+,X_t(\omega))| \leqq |f(\omega,s,X_{s-}(\omega))-f(\omega,s,X_t(\omega))| + |f(\omega,s,X_t(\omega) - f(\omega,t+,X_t(\omega))|$$

le premier terme est majoré par $K|X_{s-}(\omega)-X_t(\omega)|$, il tend vers 0 lorsque $s \downarrow\downarrow t$. Le second tend vers 0 aussi par définition de $f(\omega,t+,x)$.

Une dernière remarque avant la démonstration du théorème. L'exemple le plus simple d'équation différentielle du type (3) - et le seul qui ait vraiment été appliqué jusqu'à maintenant - est celui de l'exponentielle, où $f(\omega,s,x)=x$. Le théorème recouvre donc l'ancien théorème d'existence et d'unicité de l'exponentielle (mais il n'en donne pas la forme explicite) .

DEMONSTRATION DU THEOREME : PREMIERE ETAPE

Nous nous ramenons à une classe plus simple de semimartingales M .

LEMME 2. Supposons que pour tout K il existe un $a>0$ tel que l'existence et l'unicité aient lieu sous l'hypothèse supplémentaire suivante

Les sauts de la semimartingale M sont $\leqq a$.

Alors l'existence et l'unicité ont lieu sans restriction.

Le point important est ici le fait que $\underline{a}$ a le droit de dépendre de la constante de Lipschitz K de f .

DEMONSTRATION. Soient $T_1,\ldots,T_n,\ldots$ les instants successifs auxquels ont lieu les sauts de M d'amplitude $>a$. Considérons la surmartingale

$$M_t^1 = M_t I_{\{t<T_1\}} + M_{T_1-} I_{\{t \geqq T_1\}}$$

dont les sauts sont $\leqq a$. Considérons aussi le processus càdlàg. adapté $H_t^1 = H_t I_{\{t<T_1\}} + H_{T_1-} I_{\{t \geqq T_1\}}$. Alors le processus (X_t) satisfait à (3) sur l'intervalle $[0,T_1[$ si et seulement si le processus $X_t^1 = X_t I_{\{t<T_1\}}+$

$+ X_{T_1-} I_{\{t \geqq T_1\}}$ satisfait à l'équation

$$X_t^1 = H_t^1 + \int_0^t f(.,s,X_{s-}^1)dM_s^1 \qquad \text{sur } [0,\infty[$$

qui admet par hypothèse une solution et une seule. D'autre part, si (X_t) est solution de (3) sur $[0,T_1[$, nous savons aussitôt (et de manière unique) la prolonger en une solution sur $[0,T_1]$, car (3) nous donne

$$\Delta X_{T_1} = \Delta H_{T_1} + f(.,T_1, X_{T_1-})\Delta M_{T_1}$$

d'où l'existence et l'unicité de la solution de (3) sur $[0,T_1]$. On déplace alors l'origine en T_1 et on recommence sur $[T_1,T_2]$, etc.

LEMME 3. <u>Supposons que pour tout</u> K <u>il existe un</u> b>0 <u>tel que l'existence et l'unicité aient lieu pour toute</u> f <u>de rapport</u> K, <u>tout</u> H, <u>et toute</u> M <u>de la forme</u> N+A, <u>où</u>

- N <u>est une martingale de carré intégrable nulle en</u> 0, <u>et</u> $[N,N]_\infty \leqq b$,
- A <u>est à variation finie prévisible nul en</u> 0, <u>et</u> $\int_0^\infty |dA_s| \leqq b$

<u>Alors l'existence et l'unicité ont lieu sans restriction</u>.

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer que $b \leqq 1$. Nous allons établir l'existence et l'unicité pour toute semimartingale M dont les sauts sont majorés par $a=b/4$, nulle en 0, et nous appliquerons alors le lemme 2.

La démonstration repose sur la même idée que celle du lemme 2 : l'existence et l'unicité sont des propriétés "locales" (et il suffit même de considérer des intervalles de la forme [[). Une semimartingale M à sauts majorés par b/4 , nulle en 0, est spéciale, et admet donc une décomposition de la forme M=N+A, où N est une martingale locale, A un processus à variation finie prévisible, nuls en 0 tous deux. Les sauts de M étant majorés par b/4, on vérifie sans peine[1] que les sauts de N et A sont majorés par b/2.

Définissons des temps d'arrêt T_n par récurrence : $T_0=0$, puis

$$T_n = \inf \{ t>T_{n-1} \ , \ [N,N]_t-[N,N]_{T_{n-1}} \geqq b/2 \ \text{ ou } \int_{T_{n-1}}^t |dA_s| \geqq b/2 \}$$

Comme les sauts de [N,N] valent au plus $(b/2)^2 \leqq b/2$, ceux de A au plus b/2, on a aussi

1. Pour démontrer cela, on se ramène par arrêt au cas où N est uniformément intégrable, M bornée. En un temps T totalement inaccessible, on a $\Delta A_T=0$, $|\Delta M_T|=|\Delta N_T| \leqq b/4$. En un temps T prévisible on a $|\Delta N_T| = |\Delta M_T - E[\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]| \leqq b/2$, $|\Delta A_T| = |E[\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]| \leqq b/2$.

$$[N,N]_{T_n}-[N,N]_{T_{n-1}} \leqq b \quad , \quad \int_{T_{n-1}}^{T_n}|dA_s| \leqq b$$

Alors (X_t) est une solution de (3) sur $[0,T_1]$ si et seulement si l'on a sur $[0,\infty[$

$$X_t^1 = H_t^1 + \int_0^t f(.,s,X_{s-}^1)dM_s^1$$

où X^1,H^1,M^1 désignent les processus X,H,M arrêtés à T_1 . Comme M^1 admet une décomposition du type considéré dans l'énoncé, il y a existence et unicité de la solution de cette équation, puis l'on transporte l'origine en T_1 et l'on recommence sur $[T_1,T_2]$, etc.

Le nombre b sera choisi plus loin ($b < 1\wedge 1/3K^2$). Nous supposons désormais que M satisfait aux conditions de l'énoncé du lemme 2, et nous nous ramenons au cas où H = 0 .

LEMME 4. Si le résultat d'existence et d'unicité est vrai lorsque H=0, il est vrai dans le cas général.

DEMONSTRATION . Le processus X est solution de (3) si et seulement si $\bar{X}$=X-H est solution de

$$(\bar{3}) \qquad \bar{X}_t = \int_0^t \bar{f}(.,s,\bar{X}_{s-})dM_s \quad \text{(sans processus càdlàg. } \bar{H} \text{)}$$

avec $\bar{f}(\omega,s,x)=f(\omega,s,x+H_s(\omega))$. Noter que la semimartingale est la même pour (3) et $(\bar{3})$, et que f et $\bar{f}$ ont la même constante de Lipschitz K, de sorte que les conditions du lemme 3 sont encore satisfaites.

REMARQUE. Si nous n'avions pas eu de H dans les lemmes précédents, nos "recollements" auraient été plus difficiles à exprimer ; si nous n'avions pas permis à f de dépendre de ω, nous n'aurions pu faire disparaître H à cette étape-ci.

Enfin, une dernière simplification

LEMME 5. Si le résultat d'existence et d'unicité est vrai lorsque (en plus des conditions précédentes) f satisfait à une condition du type

$$|f(\omega,s,0)| \leqq c ,$$

alors il est vrai dans le cas général .

DEMONSTRATION. Introduisons les temps d'arrêt $T_n(\omega)=\inf\{t : |f(\omega,t,0)|\geqq n\}$ et posons (en rappelant que $f(\omega,.,x)$ est continue à gauche)

$$f^n(\omega,s,x) = f(\omega,s,x)I_{\{0<s\leqq T_n(\omega)\}}$$
$$X_t^n(\omega) = X_{t\wedge T_n}(\omega) \quad , \quad M_t^n(\omega) = M_{t\wedge T_n}(\omega)$$

Alors X satisfait à (3) si et seulement si l'on a pour tout n

$$X_t^n = \int_0^t f^n(.,s,X_{s-}^n)dM_s^n$$

Comme $f^n(\omega,s,0)$ est bornée par n, ces équations ont une solution et une seule.

Récapitulons donc :

- f satisfait aux conditions L_1, L_2, L_3 , et $|f(\omega,s,0)| \leqq c$
- $M=N+A$, $[N,N]_\infty \leqq b$, $\int_0^\infty |dA_s| \leqq b$, avec $b < 1 \wedge \frac{1}{3K}2$, ce qui entraîne

(4) $$h = K(2\sqrt{b} + b) < 1$$

DEUXIEME PARTIE : APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Soit $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble de tous les processus càdlàg. adaptés X tels que $X^* = \sup_t |X_t|$ appartienne à L^2, et que $X_0=0$, avec la norme $[\![X]\!] = \|X^*\|_2$. Nous allons résoudre l'équation (3) dans $\underline{\underline{H}}$. Etant donné $X \in \underline{\underline{H}}$, nous posons

(5) $$(WX)_t = \int_0^t f(.,s,X_{s-})dM_s$$

et nous montrons que l'opérateur non linéaire W satisfait à

(6) $$X \in \underline{\underline{H}} \Rightarrow WX \in \underline{\underline{H}}$$
$$X \in \underline{\underline{H}}, Y \in \underline{\underline{H}} \Rightarrow [\![WX-WY]\!] \leqq h[\![X-Y]\!]$$

Comme $h<1$ d'après (4), il est bien connu qu'alors l'équation $WX=X$ admet une solution et une seule dans $\underline{\underline{H}}$.

Il nous suffit en fait de prouver la seconde propriété. En effet, la première s'en déduit en prenant $Y=0$, et en remarquant que

$$WO_t = \int_0^t f(.,s,0)dN_s + \int_0^t f(.,s,0)dA_s$$

Le premier terme est une martingale locale L_t, et l'on a

$$[L,L]_\infty = \int_0^\infty f^2(\omega,s,0)d[N,N]_s \leqq c^2 b \quad (|f(\omega,s,0)| \leqq c,\ [N,N]_\infty \leqq b\ )$$

donc $\|L^*\|_2^2 \leqq 4c^2 b$ (inégalité de DOOB). Le second terme est un processus B à variation finie, et l'on a

$$B^* \leqq \int_0^\infty |dB_s| = \int_0^\infty |f(.,s,0)||dA_s| \leqq cb$$

donc aussi $\|B^*\|_2 \leqq cb$. On conclut en remarquant que $(WO)^* \leqq L^*+B^*$.

Passons donc à la seconde relation. Nous avons

$$WX_t - WY_t = \int_0^t (f(.,s,X_{s-})-f(.,s,Y_{s-}))dN_s + \int_0^t (f(.,s,X_{s-})-f(.,s,Y_{s-}))dA_s$$

Posons $Z=X-Y$. Le premier terme est à nouveau une martingale locale L, et on a

$$[L,L]_\infty = \int_0^\infty (\quad)^2 d[N,N]_s \leqq \int_0^\infty K^2 Z_s^2 d[N,N]_s \leqq K^2 b Z^*$$

donc (inégalité de DOOB)

$$\|L^*\|_2 \leqq 2(E[[L,L]_\infty])^{1/2} \leqq 2K\sqrt{b}\ \|Z\|$$

Le second terme est un processus B à variation finie, et l'on a comme ci-dessus

$$B^* \leqq \int_0^\infty K|Z_s||dA_s| \leqq KbZ^* \text{ , donc B } \|B^*\|_2 \leqq Kb\|Z\|$$

d'où finalement

$$\|WX-WY\| \leqq K\|Z\|(2\sqrt{b} + b) \leqq h\|Z\|$$

ce qui achève de prouver (6).

Nous avons l'existence et l'unicité dans $\underline{\underline{H}}$. Mais peut il exister une solution X n'appartenant pas à $\underline{\underline{H}}$? Nous avons $X_0=0$

$$(7) \qquad X_t = \int_0^t f(.,s,X_{s-})dM_s$$

Soit $T = \inf \{ t : |X_t| \geqq m \}$. On a $|X_s| \leqq m$ sur $[0,T[$, et d'autre part $|X_T| \leqq |X_{T-}| + |f(.,T,X_{T-})||\Delta M_T|$. Or $|X_{T-}| \leqq m$, $|f(.,T,X_{T-})| \leqq |f(.,T,0)| + K|X_{T-}| \leqq c+mK$, enfin $|\Delta M_T| \leqq |\Delta A_T| + |\Delta N_T| \leqq b+\sqrt{b}$, d'où l'on déduit que le processus arrêté X^T est borné, donc appartient à $\underline{\underline{H}}$. Comme il est solution de l'équation

$$(8) \qquad Y_t = \int_0^t f(.,s,Y_{s-})dM_s^T$$

et comme M^T satisfait aux mêmes hypothèses que M, X^T est l'<u>unique</u> solution de l'équation (8) qui appartient à $\underline{\underline{H}}$. Mais alors X est uniquement déterminé jusqu'à l'instant T, et en particulier coïncide jusqu'à l'instant T avec la solution de (7) qui appartient à $\underline{\underline{H}}$, et dont l'existence a été établie plus haut. On conclut en faisant tendre m et T vers $+\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DOLEANS-DADE. Existence and unicity of solutions of stochastic differential equations. Z für W-theorie, 1976, tome 36, p. 93-102.

[2] N. KAZAMAKI. On a stochastic integral equation with respect to a weak martingale. Tohoku M.J., 26, 1974, p. 53-63

[3] N. KAZAMAKI. Note on a stochastic integral equation. Sém. de Prob.VI, 1972 , p.105-108 . Lecture Notes n°258.

[4] Ph.E. PROTTER. On the existence, uniqueness, convergence, and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations. à paraître dans les Ann. Prob.. PROTTER vient de nous communiquer un autre travail, Right continuous solutions of stochastic integral equations (à paraître dans le J. of Multivariate Analysis), qui contient un résultat très proche de celui qui est exposé ici.