Séminaire de probabilités (Strasbourg)

C. Dellacherie
C. Stricker

Changements de temps et intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 365-375
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__365_0>

Université de Strasbourg
Institut de Mathématique
Séminaire de Probabilités 1975/76

CHANGEMENTS DE TEMPS ET INTEGRALES STOCHASTIQUES

par C. Dellacherie et C. Stricker

Dans un premier temps, nous prolongeons, sous des hypothèses un peu différentes, le travail de MEYER et YEN sur la génération des tribus optionnelle et prévisible par des processus croissants (cf le volume IX du séminaire) : nous regardons ce que l'on peut dire sous les seules hypothèses habituelles, avec une condition faible de séparabilité de la grosse tribu $\underline{\underline{F}}$, et nous dégageons quelques propriétés intéressantes des changement de temps associés aux processus croissants générateurs. Puis, nous montrons, qu'à l'aide de ces changements de temps, on peut ramener toute intégrale stochastique d'un processus prévisible par rapport à une semimartimgale à une intégrale stochastique d'un processus <u>certain</u>. Considérant alors le cas des intégrales stochastiques par rapport aux martingales de carré intégrable, on montre qu'une bonne partie de cette théorie se ramène par ce biais à la théorie spectrale classique dans un espace de Hilbert. Cela nous permet alors d'appliquer aux intégrales stochastiques par rapport aux martingales de carre intégrable, des théorèmes bien connus de la théorie des algèbres d'opérateurs d'un espace de Hilbert : on montre, par exemple, que l'ensemble des opérateurs "integrales stochastiques" s'identifie avec le bicommutant de l'ensemble des opérateurs "espérances conditionnelles" de la forme $E[\,.\,|\underline{\underline{F}}_T]$, où T parcourt l'ensemble des temps d'arrêt. Enfin, on termine en posant quelques problèmes.

GÉNÉRATION DES TRIBUS OPTIONNELLE ET PRÉVISIBLE

Nous nous plaçons sous les conditions habituelles (avec les notations habituelles, sauf que, n'ayant pas de ω sur notre clavier, nous écrirons des "w"), mais nous supposons que $\underline{\underline{F}}$ vérifie la condition de séparabilité suivante : il existe une sous-tribu séparable $\underline{\underline{G}}$ de $\underline{\underline{F}}$ telle que tout élément de $\underline{\underline{F}}$ soit p.s. égal à un élément de $\underline{\underline{G}}$, ce qui revient à dire que l'espace de Banach $L^1(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est séparable. Alors, tout sous-espace topologique de notre L^1 est aussi séparable, ce qui implique que <u>toute sous-tribu de $\underline{\underline{F}}$ vérifie cette condition de séparabilité</u>. Mais, on a mieux. En effet, par classe monotone, il est facile de voir que la tribu $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}}$ des ensembles mesurables vérifie la propriété (S) suivante : il existe une sous-tribu separable $\underline{\underline{U}}$ de $\underline{\underline{T}}$ (en fait, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{G}}$ convient) telle que tout processus $\underline{\underline{T}}$-mesurable soit indistinguable d'un processus $\underline{\underline{U}}$-mesurable. A l'aide des théorèmes de projection, on en déduit, par classe monotone, que <u>les tribus optionnelle et prévisible vérifient aussi cette propriété</u> (S). Cette remarque est en fait bien connue pour la tribu prévisible, mais nous ne l'avons jamais vu faite pour la tribu optionnelle. On en déduit sans peine, par classe monotone, que, de toute famille de générateurs de la tribu optionnelle, ou prévisible, on peut extraire une sous-famille dénombrable telle que tout processus optionnel, ou prévisible, soit indistinguable d'un processus mesurable par rapport à la tribu engendrée par cette sous-famille dénombrable.

Engendrons la tribu optionnelle, considérée sur $[0,+\infty[\times \Omega$, par les intervalles stochastiques de la forme $[\![S,+\infty[\![$ et la tribu prévisible, que nous considérerons sur $]0,+\infty[\times \Omega$ pour éviter ce diable de 0, par les intervalles stochastiques de la forme $]\!] S,+\infty[\![$. Il existe alors une suite de t.d'a. (S_n) telle que la tribu optionnelle, ou prévisible, soit "indistinguable" de la tribu engendrée par les intervalles stochastiques correspondant. On peut bien entendu supposer que les t.d'a. constants à valeurs rationnelles sont nommés dans la suite, ce qui permet, en particulier, de supposer que les S_n sont bornés (par troncage), puis stables pour les sup et inf finis. Définissons alors deux processus engendrant respectivement nos tribus séparables, grâce au truc classique (le "2" a valeur esthétique, pour tomber dans l'ensemble de Cantor) :

$$O_t = \sum_n 2.3^{-n} 1_{[\![S_n,+\infty[\![}(t) \qquad P_t = \sum_n 2.3^{-n} 1_{]\!] S_n,+\infty[\![}(t)$$

(O_t) est un processus croissant, continu à droite (O_0 peut ne pas être nul), optionnel et (P_t) est sa version continue à gauche ; tous deux sont strictement croissants, pour tout w, et prennent leurs valeurs dans l'ensemble de Cantor. Et, pour tout processus optionnel (resp prévisible) $X = (X_t)$, il existe une fonction borélienne f définie sur l'ensemble de Cantor telle que (X_t) soit indistinguable de $(f\circ O_t)$ (resp $(f\circ P_t)$). Bien entendu, f n'est pas uniquement déterminée, les valeurs prises par (P_t) ou (O_t) ne couvrant pas tout le Cantor en général.

Nous définissons maintenant le changement de temps associé

$$C_t = \inf\{s : O_s > t\} = \inf\{s : O_s \geqq t\} = \sup\{s : P_s < t\} = \sup\{s : P_s \leqq t\}$$
$$= \sup\{s : O_s < t\} = \sup\{s : O_s \leqq t\} = \inf\{s : P_s > t\} = \inf\{s : P_s < t\}$$

Les égalités proviennent du fait de la croissance stricte : il n'y a qu'un changement de temps, pour les deux, et ce changement de temps (C_t) est continu, mais non strictement croissant. Et les C_t sont des t.d'a.bornés pour $t<1$, infinis pour $t\geqq 1$ car nos S_n sont bornés ; d'autre part, lorsque t décrit l'ensemble des extremités des intervalles contigus du Cantor, ensemble qui est dénombrable dense dans le Cantor, les intervalles $[\![C_t,+\infty[\![$ (resp $]\!] C_t,+\infty[\![$) engendrent notre tribu "presque" optionnelle (resp prévisible), et l'on peut montrer, comme dans l'exposé "Deux remarques sur la séparabilité optionnelle" du premier auteur, que la réunion des graphes des C_t (t décrivant l'ensemble de nombres triadiques précité) est égal à la réunion des graphes des S_n *) : on peut donc "presque" engendrer les tribus optionnelle et prévisible par une famille dénombrable d'intervalles stochastiques totalement ordonnée pour l'inclusion. Autre petit miracle : tout t.d'a. T est p.s. égal au temps d'entrée de (P_t) (ou (O_t)) dans un borélien. En effet, il existe une fonction borélienne f telle que $(f\circ P_t)$ soit indistinguable de l'indicatrice de $]\!] T,+\infty[\![$, et T est alors p.s. égal au temps d'entrée de (P_t) dans le borélien $\{f = 1\}$. Par ailleurs, on montre de manière analogue que $\underline{\underline{F}}_T$ est "presque" engendrée par O_T (cf MEYER et YEN) et $\underline{\underline{F}}_{T-}$ par P_{T-} pour tout t.d'a. fini $T>0$.

*) on peut montrer que ces C_t forment une sous-famille dénombrable des S_n

INTEGRALE ET CHANGEMENT DE TEMPS

Dans cette section, on désigne par $X = (X_t)$ un processus prévisible fixé, que l'on suppose positif pour éviter les problèmes d'intégration, et on désigne par f une fonction borélienne positive représentant X, i.e. telle que X soit indistinguable de $f \circ P$.

THEOREME 1.- Soit $A = (A_t)$ un processus croissant, continu à droite, mais pas forcément adapté. On a alors

$$\int_0^\infty X_s \, dA_s = \int_0^\infty f(P_s) \, dA_s = \int_0^\infty f(t) \, dA_{C_t} \qquad \text{(on intègre sur }]0,\infty[\text{)}$$

la première égalité étant vraie pour presque tout w, la seconde pour tout w.

D/ La première égalité est triviale. Pour démontrer la seconde, il suffit, par classe monotone, de considérer le cas où f est l'indicatrice d'un intervalle de la forme $]u,v]$: les deux intégrales de droite valent alors $A_{C_v} - A_{C_u}$ $(\infty - \infty = 0)$.

COROLLAIRE.- Soit λ la mesure sur $[0,\infty[$ (en fait, portée par le Cantor) dont la fonction de répartition est $t \to E[A_{C_t}]$. On a alors

$$E[\int_0^\infty X_s \, dA_s] = \int_0^\infty f(t) \, \lambda(dt)$$

REMARQUE.- On a des formules analogues, pour X optionnel - O remplaçant P -, si A est un processus croissant, continu à gauche, en intégrant sur $[0,\infty[$.

Nous fixons maintenant nos notations et conventions quant au changement de temps : pour $t \in [0,1[$, on pose $\underline{\underline{F}}^*_t = \underline{\underline{F}}_{C_t}$, et $Z^*_t = Z_{C_t}$ si (Z_t) est un processus. Lorsqu'on travaille avec des "*", on suppose tacitement $t<1$ - on aurait pu s'arranger pour que $P_\infty = \infty$ au lieu de 1, mais on aurait perdu le Cantor classique ! *) -, ou, plus commodément, on fera tout simplement la convention que $1 = t$ pour tout $t \in [1,\infty]$: il ne se passe rien pour les processus changés de temps sur $[1,\infty]$.

Nous passons maintenant au cas d'une intégrale stochastique par rapport à une martingale locale $M = (M_t)$. On supposera que l'intégrale stochastique $\int_0^\infty X_s \, dM_s$ a un sens : par exemple, que X appartient à $L^2(M)$ si M est une martingale de carré

----

*) plus sérieusement, on aurait obtenu plus loin un opérateur auto-adjoint non borné.

intégrable, ou que X est localement borné et X_t nul pour t suffisamment grand (ce qui revient à intégrer sur un intervalle fini) dans le cas général.

THEOREME 2.- Soit $M = (M_t)$ une martingale locale telle que $M_0 = 0$. Alors

a) $M^* = (M_t^*)$ est une martingale locale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t^*)$; $[M^*,M^*]$ est égal à $[M,M]^*$ et, si $\langle M,M\rangle$ est défini, $\langle M^*,M^*\rangle$ est égal à $\langle M,M\rangle^*$. Si M appartient à $\underline{\underline{M}}$ (i.e. est de carré intégrable), alors M^* appartient à $\underline{\underline{M}}^*$.

b) on a p.s., au sens des intégrales stochastiques,

$$\int_0^\infty X_s\, dM_s = \int_0^\infty f(t)\, dM_t^*$$

et des égalités du même genre pour les crochets divers.

D/ Commençons par a). Soit (T_n) une suite de t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$ réduisant (M_t) et posons, pour tout n, $T_n^* = P_{T_n}$: les T_n^* forment une suite croissante de t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t^*)$ convergeant vers 1 (= ∞ !). Comme $M^*_{T_n^*} = M_{T_n}$, on en déduit sans peine que (T_n^*) réduit M^*, qui est donc une martingale locale pour $(\underline{\underline{F}}_t^*)$. Par ailleurs, le crochet $[M,M]$ est uniquement caractérisé par le fait que c'est un processus croissant optionnel, continu à droite, dont la partie purement discontinue est la somme des carrés des sauts de M en ses instants de sauts, et tel que $M^2 - [M,M]$ soit une martingale locale. On en déduit sans peine que $[M,M]^* = [M^*,M^*]$. Nous laissons au lecteur le soin d'achever la démonstration de a), et passons à b). Il nous suffit, pour démontrer l'égalité écrite (les autres sont laissées au lecteur), de montrer que, pour toute martingale bornée $N = (N_t)$, on a

$$E[\int_0^\infty X_s\, d[M,N]_s] = E[\int_0^\infty f(t)\, d[M^*,N^*]_t]$$

Or, d'après le théorème 1, on a même l'égalité sans les espérances puisque, d'après a), on a $[M^*,N^*] = [M,N]^*$.

REMARQUE.- Noter que l'on a $E[\int_0^\infty X_s^2\, d[M,M]_s] = \int_0^\infty f^2(t)\, \lambda(dt)$ où λ est la mesure de répartition $t \to E[M_t^{*2}]$. Il y a la sans doute la possibilité de définir l'intégrale stochastique sans avoir recours au théorème de décomposition des surmartingales. Poussant plus loin cette idée, on pourrait se demander si on ne peut pas démontrer ce dernier théorème par une astuce de ce type. Il est vrai que, si $Z = (Z_t)$ est un potentiel de la classe (D), le processus croissant qui l'engendre est uniquement déterminé par la fonction décroissante $t \to E[Z_t^*]$. Mais l'expérience nous a prouvé que l'existence s'atteint difficilement par cette voie, du fait de la non-unicité de la fonction borélienne représentant un processus prévisible.

COROLLAIRE.- Soit $Y = (Y_t)$ une semimartingale. Alors Y^* est une semimartingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t^*)$, et l'on a (pour X "raisonnable")

$$\int_0^\infty X_s \, dY_s = \int_0^\infty f(t) \, dY_t^*$$

INTEGRALE STOCHASTIQUE ET RESOLUTION SPECTRALE

On considère désormais les processus prévisibles définis aussi pour $t = 0$, mais, pour éviter tout problème en 0 , on suppose que $\underline{\underline{F}}_0$ est essentiellement triviale (on peut toujours se ramener à cette situation par décalage du temps).

Considérons l'espace de Hilbert séparable $\underline{\underline{H}} = L^2(\Omega, \underline{\underline{F}}_\infty, P) = L^2(\Omega, \underline{\underline{F}}_1^*, P)$ - réel - muni du produit scalaire $(x,y) = E[x.y]$ et définissons sur $\underline{\underline{H}}$ une résolution de l'identité $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (i.e une suite croissante, continue à droite, de projecteurs orthogonaux telle que $\lim_{t\to-\infty} E_t = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} E_t = I$, où 0 est le projecteur nul et I est l'identité) en posant

1) pour $t<0$, $E_t = 0$

2) pour $0 \leq t < 1$, E_t est l'opérateur d'espérance conditionnelle $E[.|\underline{\underline{F}}_t^*]$. En particulier, $E_0 x = E[x]$ puisque $\underline{\underline{F}}_0$ est essentiellement triviale

3) pour $t \geq 1$, $E_t = I$.

Alors (E_t) définit la résolution spectrale de l'opérateur auto-adjoint

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, dE_t = \int_0^1 t \, dE_t$$

qui est en fait un opérateur, positif au sens hilbertien, de norme ≤ 1 puisque son spectre est contenu dans $[0,1]$. On rappelle que, pour $x \in \underline{\underline{H}}$, on a $Hx = \int t \, dE_t x$ - intégrale d'une fonction scalaire par rapport à une mesure vectorielle - ou encore que, pour $x,y \in \underline{\underline{H}}$, on a $(Hx,y) = \int t \, d(E_t x,y) = \int t \, d(x,E_t y) = \int t \, d(E_t x,E_t y)$ - intégrale d'une fonction scalaire par rapport à une mesure scalaire signée.

Soit $\underline{\underline{A}}$ l'algèbre d'opérateurs (linéaires, bornés) engendrée par H . Désignons par $\underline{\underline{A}}^*$ le commutant de $\underline{\underline{A}}$, i.e. l'ensemble des opérateurs commutant avec les éléments de $\underline{\underline{A}}$ (ce sont aussi ceux qui commutent avec H , ou bien avec tous les E_t) et enfin par $\underline{\underline{A}}^{**}$ le bicommutant de $\underline{\underline{A}}$, i.e. le commutant de $\underline{\underline{A}}^*$. On a alors le théorème classique de Von Neumann

THEOREME.- a) <u>Le bicommutant $\underline{\underline{A}}^{**}$ est égal à l'adhérence forte, ou faible (mais pas pour la norme) de $\underline{\underline{A}}$ dans l'algèbre des opérateurs sur $\underline{\underline{H}}$</u> .

b) <u>Un opérateur</u> K <u>appartient à $\underline{\underline{A}}^{**}$ ssi il existe une fonction borélienne bornée</u> f <u>telle que l'on ait</u> $K = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dE_t = f(0)E_0 + \int_0^1 f(t)\, dE_t$

Etant donné le théorème 2 , le lecteur devine sans doute où nous allons en venir maintenant...

Pour rester dans le domaine des opérateurs bornés (notre science en la matière étant limitée), nous nous contenterons de considérer des processus prévisibles bornés. Si $X = (X_t)$ est un tel processus, on lui associe un operateur K_X sur $\underline{\underline{H}}$ comme suit : pour $x \in \underline{\underline{H}}$, on considère la martingale $M \in \underline{\underline{M}}$ définie par $M_t = E[x|\underline{\underline{F}}_t]$ et on pose

$$K_X x = X_0 M_0 + \int_0^\infty X_s\, dM_s$$

On dira que K_X est l'<u>operateur d'intégrale stochastique</u> (en abrégé i.s.) défini par X . Bien entendu, on peut obtenir le même opérateur K pour des processus prévisibles différents X et Y , lesquels sont alors "indistinguables par les martingales" , i.e. tels que $X_0 = Y_0$ et $E[\int_0^\infty (X_s - Y_s)^2\, d\langle M,M\rangle_s] = 0$ pour tout $M \in \underline{\underline{M}}$. Ceci dit, si f est une fonction borélienne bornée représentant X , on a d'après le théorème 2

$$K_X x = f(0)E[M_0] + \int_0^1 f(t)\, dM^*_t$$

ce qui, du point de vue hilbertien, signifie que $K_X = f(H)$. D'où le théorème

THEOREME 3.- a) <u>Soit</u> X <u>un processus prévisible borné. Alors, si</u> f <u>représente</u> X , <u>l'operateur d'i.s.</u> K_X <u>défini par</u> X <u>est égal à</u> f(H).

b) <u>Un opérateur</u> K <u>est un opérateur d'i.s. ssi il "bicommute" avec les opérateurs d'espérances conditionnelles</u> $E[\cdot|\underline{\underline{F}}^*_t] = E[\cdot|\underline{\underline{F}}_{C_t}]$, <u>soit encore ssi il "bicommute" avec les opérateurs d'espérances conditionnelles</u> $E[\cdot|\underline{\underline{F}}_T]$, T <u>parcourant l'ensemble des t.d'a. de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Le lecteur quelque peu familier avec la théorie spectrale aura noté aussi la grande analogie entre la construction d'une intégrale spectrale et celle de l'intégrale stochastique. L'analogie (le mot est faible, vu le théorème 2) se rencontre encore à propos d'autres concepts étudiés dans les deux théories. Par exemple, en théorie hilbertienne, un vecteur x est dit <u>séparateur</u> pour $\underline{\underline{A}}$ (ou $\underline{\underline{A}}^{**}$) si on a $Kx = 0 \Rightarrow K = 0$ pour tout K dans l'algèbre (un tel vecteur existe toujours car $\underline{\underline{H}}$ est séparable) ; cela signifie encore que toutes les mesures $d(E_t y,z)$ sont absolument continues par rapport à $d(E_t x,x)$. En théorie de l'i.s. lui correspond l'existence d'une martingale (M_t) - avec $M_\infty = x$ - telle que tous les crochets $\langle N,N'\rangle$ soient absolument continus par rapport à $\langle M,M\rangle$. Par ailleurs, un vecteur x est dit <u>totalisateur</u> ou cyclique pour $\underline{\underline{A}}$ (ou $\underline{\underline{A}}^{**}$) si l'ensemble des Kx , K parcourant l'algèbre, est dense dans $\underline{\underline{H}}$ (cela existe rarement) ; cela signifie encore (ce n'est pas évident) que $\underline{\underline{A}}^{**}$ est une algèbre abélienne maximale, i.e. $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}^{**}$. En théorie de l'i.s. lui correspond (c'est facile à voir) l'existence d'une martingale (M_t) - avec $M_\infty = x$ - telle que toute martingale de $\underline{\underline{M}}$ soit une intégrale stochastique d'un processus prévisible (pas forcément borné) par rapport à M . D'où, étant donné le théorème 3 et un théorème classique sur les processus de Wiener et Poisson,

THEOREME 4.- <u>Supposons que</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>soit la filtration naturelle augmentée d'un Brownien unidimensionnel partant de</u> 0 , <u>ou d'un Poisson</u>. <u>Un opérateur</u> K <u>est un opérateur d'i.s. ssi il commute avec les opérateurs</u> $E[\,.\,|\underline{\underline{F}}_T]$, T <u>parcourant l'ensemble des t.d'a. de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Nous arrêterons pratiquement ici nos développements hilbertiens, mais on peut se demander si on ne peut pas obtenir d'autres résultats sur les i.s. à l'aide des techniques hilbertiennes. Par exemple, -H est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe markovien $(P_t) = (e^{tH})$ fortement continu sur L^2 : on tombe alors sur la théorie hilbertienne du potentiel de Beurling-Deny. (Incidemment, nous n'avons pas su caractériser, d'une manière simple, les semi-groupes markoviens sur L^2 dont la décomposition spectrale du générateur infinitésimal fournit une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$. Mokobodzki connait des choses sur les résolvantes de ces semi-groupes).

UN PROBLEME D'IDENTIFICATION

On sait bien que, pour tout t.d'a. T , l'opérateur $E[./\underline{\underline{F}}_T]$ est un opérateur d'i.s., ainsi que $E[./\underline{\underline{F}}_{T-}]$ si T est prévisible. D'ou le problème

PROBLEME.- Soit $\underline{\underline{G}}$ une sous-tribu de $\underline{\underline{F}}_\infty$, contenant les ensembles négligeables, telle que $E[./\underline{\underline{G}}]$ soit un opérateur d'i.s. . Est ce que $\underline{\underline{G}}$ est nécessairement de la forme $\underline{\underline{F}}_T$, ou $\underline{\underline{F}}_{T-}$ avec T prévisible ?

D'après le théorème 3 , on sait que $\underline{\underline{G}}$ définit un opérateur d'i.s. ssi $E[./\underline{\underline{G}}]$ bicommute avec tous les $E[./\underline{\underline{F}}_T]$. Mais l'expérience nous incline à penser que les techniques hilbertiennes ne sont d'aucun secours pour résoudre ce problème (la fonction borélienne représentant $1_{]0,T]}$ n'est pas en général une indicatrice d'intervalle).

Voici une réponse positive au problème, dans le cas discret

THEOREME 5.- <u>Soit</u> $(\underline{\underline{F}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une filtration discrète, et soit</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>une sous-tribu de</u> $\underline{\underline{F}}_\infty$ <u>telle que</u> $E[./\underline{\underline{G}}]$ <u>soit un opérateur d'i.s.</u> . <u>Il existe alors un t.d'a.</u> S <u>tel que</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>soit essentiellement égale à</u> $\underline{\underline{F}}_S$.

<u>D</u>/ Nous désignerons par z un élément >0 de L^∞ engendrant essentiellement $\underline{\underline{F}}_\infty$ (z est donc un vecteur séparateur de $\underline{\underline{A}}$, en hilbertien) et par $Z=(Z_n)$ la martingale correspondante (i.e. $z=Z_\infty$) ; un processus prévisible X est alors "évanescent pour les martingales" si l'intégrale de X^2 par rapport à $\langle Z,Z\rangle$ est p.s. nulle. Soit par ailleurs $V=(V_n)$ un processus prévisible borné tel que, pour tout $M=(M_n)\in\underline{\underline{M}}$, on ait

$$E[M_\infty/\underline{\underline{G}}] = \sum_0^\infty V_k.m_k = K(M_\infty) \quad \text{avec } m_0=M_0 \ , \ m_{k+1}=M_{k+1}-M_k$$

Comme K est idempotent, V est indistinguable de V^2 pour les martingales : on peut donc supposer que V est l'indicatrice d'un ensemble prévisible, et comme on a $E[K(M_\infty)] = E[M_\infty]$, on peut supposer que $V_0=1$. Posons d'autre part $a_0=0$ et, pour tout k , $a_{k+1}=\langle Z,Z\rangle_{k+1}-\langle Z,Z\rangle_k$. Comme V et $\langle Z,Z\rangle$ sont prévisibles, on définit un t.d'a. S en posant

$$S = \inf\{k : V_{k+1}=0 \text{ et } a_{k+1}\neq 0\}$$

et nous allons montrer que V est indistinguable pour les martingales de l'indicatrice de $[0,S]$. Raisonnons par l'absurde. Posons

$$T = \inf\{k > S : V_{k+1} = 1 \text{ et } a_{k+1} \neq 0\}$$

et supposons $P(T<\infty)>0$. Il existe alors deux entiers m,n tels que $0 \leq m < n$ et $P\{S=m, T=n\} > 0$. On a alors, en posant $z_0 = Z_0$ et $z_{k+1} = Z_{k+1} - Z_k$ pour tout $k \geq 0$: sur $\{S=m\}$, $a_{m+1} = E[z^2_{m+1}/\underline{\underline{F}}_m]$ est >0 , et, sur $\{S=m, T=n\}$, $a_{n+1} = E[z^2_{n+1}/\underline{\underline{F}}_n]$ est >0 . Compte tenu du fait que $\{z_{k+1}>0\}$ ne contient aucun ensemble non négligeable de $\underline{\underline{F}}_k$, on en déduit que l'ensemble $A = \{S=m, z_{m+1}>0\}$ n'est pas négligeable et ne contient aucun ensemble non négligeable de $\underline{\underline{F}}_m$ et que $B = \{S=m, z_{m+1}>0, T=n, z_{n+1}>0\}$ n'est pas négligeable et ne contient aucun ensemble non négligeable de $\underline{\underline{F}}_n$. Par ailleurs, si $M = (M_k)$ est une martingale telle que M_∞ soit $\underline{\underline{F}}_{n+1}$-mesurable, l'intégrale de V par rapport à M , qui est égale à $E[M_\infty/\underline{\underline{G}}]$, vaut

$$(*) \qquad E[M_{n+1}/\underline{\underline{F}}_m] - E[M_{n+1}/\underline{\underline{F}}_n] + M_{n+1} \quad \underline{\text{sur}} \ \{S=m, T=n\}$$

Nous allons montrer qu'il existe $C \in \underline{\underline{F}}_{n+1}$ tel que, si on prend $M_\infty = 1_C$, alors l'expression (*) prend, avec une probabilité >0 , des valeurs <0 sur $\{S=m, T=n\}$: on aura ainsi obtenu notre contradiction. Avant de construire C , rappelons un lemme plus ou moins classique : soient $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{T}}$ deux tribus telles que $\underline{\underline{S}} \subset \underline{\underline{T}}$ et soit $D \in \underline{\underline{T}}$; alors $\{P[D/\underline{\underline{S}}]=1\}$ est la borne essentielle supérieure des éléments de $\underline{\underline{S}}$ contenus dans D et $\{P[D/\underline{\underline{S}}]>0\}$ est la borne essentielle inférieure des éléments de $\underline{\underline{S}}$ contenant D . Ceci dit, posons

$$C = \{P(B/\underline{\underline{F}}_n) > 0\} - B$$

Comme $B \in \underline{\underline{F}}_{n+1}$ est contenu dans $A \cap \{S=m, T=n\} \in \underline{\underline{F}}_n$ et ne contient pas d'élément non négligeable de $\underline{\underline{F}}_n$, C est contenu dans $A \cap \{S=m, T=n\}$, n'appartient pas à $\underline{\underline{F}}_n$ (mais appartient à $\underline{\underline{F}}_{n+1}$) et l'on a $\{P(C/\underline{\underline{F}}_n)>0\} = B \cup C$. Regardons alors ce que vaut l'expression (*) sur B lorsque $M_\infty = M_{n+1} = 1_C$: M_{n+1} est nul , $E[M_{n+1}/\underline{\underline{F}}_n]$ est >0 ; il reste à montrer que $Y = E[M_{n+1}/\underline{\underline{F}}_m] - E[M_{n+1}/\underline{\underline{F}}_n]$ prend des valeurs <0 avec une probabilité >0 . Hors, comme A ne contient aucun élément non négligeable de $\underline{\underline{F}}_m$, la v.a. Y n'est pas (p.s.) nulle sur Ω ; si on avait $Y \geq 0$ sur B , on aurait aussi $Y \geq 0$ sur $B \cup C$, Y étant $\underline{\underline{F}}_n$-mesurable, et, finalement on aurait $Y \geq 0$ partout puisque $P(C/\underline{\underline{F}}_n)$ est nulle hors de $B \cup C$: Y étant d'espérance nulle, on obtiendrait une contradiction. C'est fini...

Pour finir sur un air hilbertien, voici un corollaire faisant intervenir un cas d'existence, en temps discret, d'un vecteur totalisateur

COROLLAIRE.- *Soit* (X_n) *une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans* $\{0,1\}$, *et soit* $(\mathcal{F}_n)$ *la filtration naturelle augmentée de* (X_n). *Une sous-tribu* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}_\infty$ *est telle que* $E[./\mathcal{G}]$ *commute avec tous les* $E[./\mathcal{F}_T]$, T *parcourant l'ensemble des t.d'a. de* $(\mathcal{F}_n)$ *ssi* $\mathcal{G}$ *elle-même est* (*essentiellement*) *de la forme* $\mathcal{F}_T$.

D/ Si on pose $S_n = X_0 + \ldots + X_n$, puis $M_n = S_n - E[S_n]$, toute martingale bornée par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ se représente comme intégrale stochastique par rapport à (M_n) . Donc $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{**}$, et on conclut grâce aux théorèmes 3 et 5 .