SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Sur la régularisation des surmartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 362-364

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__362_0>

Université de Strasbourg
Institut de Mathématique
Séminaire de Probabilités 1975/76

SUR LA REGULARISATION DES SURMARTINGALES

par C. Dellacherie

Il est bien connu que, sous les conditions habituelles, une surmartingale quelconque (X_t) admet une modification en une surmartingale continue à droite ssi la fonction $t \to E[X_t]$ est continue à droite. Nous allons montrer que, sans cette dernière hypothèse, toute surmartingale admet une modification en une surmartingale forte. Nous établirons en fait ce résultat sans supposer les conditions habituelles satisfaites.

On se donne au départ une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ - qui peut n'être ni continue à droite ni augmentée - sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. On rappelle qu'une surmartingale (1) $Z = (Z_t)$ est dite <u>forte</u> si Z est un processus optionnel et vérifie le théorème d'arrêt : si S et T sont deux t.d'a. bornés tels que $S \leq T$, alors Z_S et Z_T sont intégrables et on a $E[Z_S] \geqq E[Z_T]$ (d'ou l'on déduit que $Z_S \geqq E[Z_T | \underline{\underline{F}}_S]$ p.s.). Nous nous donnons maintenant une surmartingale $X = (X_t)$, quelconque à ceci près que nous la supposerons fermable : il existe une v.a. intégrable X_∞ telle que

$$\forall t \quad X_t \geqq E[X_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \text{ p.s.}$$

Cela nous permettra de manipuler les t.d'a. sans condition de bornitude, et on sait comment retrouver le cas général en identifiant tout intervalle fini $[0,a]$ à $[0,\infty]$ par un homéomorphisme croissant.

Une première étape est la régularisation de Foellmer (pour une démonstration, voir par exemple l'exposé de Stricker sur la mesure de Foellmer dans le volume IX)

(1) Nous avons appris tout récemment que la théorie des surmartingales fortes a été étudiée indépendamment à Heidelberg par M. Th. EISELE.

THEOREME (Foellmer).- Il existe un processus continu à droite $X^+ = (X_t^+)$ tel que

a) X^+ soit une surmartingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{t+})$

b) , pour presque tout w , on ait pour tout t

$$X_t^+(w) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \text{ rat.} \\ s > t}} X_s(w)$$

c) l'on ait, pour tout t ,

$$X_t \geqq E[X_t^+ | \underline{\underline{F}}_t] \text{ p.s.}$$

Il resulte aisément du lemme de Fatou que l'on peut fermer X^+ par $X_\infty^+ = X_\infty$ et que la fonction décroissante, continue à droite $t \to E[X_t^+]$ est la version continue à droite de la fonction décroissante $t \to E[X_t]$.

La deuxième étape consiste à appliquer le théorème de projection, sous les conditions "inhabituelles" (voir l'exposé de Meyer et moi dans le volume IX), pour obtenir une régularisée qui soit adaptée à $(\underline{\underline{F}}_t)$:

THEOREME.- Il existe une surmartingale forte $Y = (Y_t)$, par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, telle que

$$Y_T = E[X_T^+ | \underline{\underline{F}}_T] \text{ p.s.}$$

pour tout t.d'a. fini T de $(\underline{\underline{F}}_t)$. On ferme Y par $Y_\infty = X_\infty$.

D/ Y est la projection optionnelle (pour $(\underline{\underline{F}}_t)$) de X^+. La fortitude de Y résulte immédiatement de celle de X^+ pour $(\underline{\underline{F}}_{t+})$.

Comme $E[Y_t] = E[X_t^+]$ et $X_t \geqq E[X_t^+ | \underline{\underline{F}}_t] = Y_t$ p.s. pour tout t , il resulte aisément de ce qui précède que l'ensemble D des t tels que $X_t \overset{\text{p.s.}}{\neq} Y_t$ est au plus dénombrable. Voici alors le résultat final

THEOREME.- Soit X^* le processus défini par $X_t^* = X_t$ pour $t \in D$ et $X_t^* = Y_t$ pour $t \notin D$. Alors X^* est une modification de X , et c'est une surmartingale forte par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

D/ Il est clair que X^* est une modification de X , et est donc une surmartingale. Par ailleurs, si (t_n) est une énumération des points de D , on a

$$X^* = \sum_n X_{t_n} 1_{[[t_n]]} + Y.1_{(\bigcup_n [[t_n]])^c}$$

et donc X^* est un processus optionnel par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Maintenant, si S est un t.d'a. , fini ou non - X^* étant fermée par X_∞ -, la v.a. X_S^* est intégrable : en effet on a d'une part $X^*_S = Y_S$ sur $\{S \notin D\}$ et Y_S est intégrable, et, d'autre part, $(X_t)_{t\in D}$ est une surmartingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in D}$, fermée par X_∞, et la restriction de S à $\{S\in D\}$ est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in D}$, d'où X^*_S est aussi intégrable sur $\{S\in D\}$. Par ailleurs on a $X^*_S \geqq Y_S$ p.s. . Il nous reste à montrer que, si S et T sont deux t.d'a. tels que $S \leqq T$, alors $E[X^*_S] \geqq E[X^*_T]$. D'abord, on a

$$E[X^*_T] = E[Y_T.1_{\{T\notin D\}}] + \sum_n E[X_{t_n}.1_{\{T=t_n\}}]$$

Comme X^*_T est intégrable, il suffit donc de montrer que, pour tout entier N, on a

$$E[Y_T.1_{\{T\notin D\}}] + \sum_{n\leqq N} E[X_{t_n}.1_{\{T=t_n\}}] \leqq E[X^*_S]$$

Quitte à remplacer X_{t_n} par Y_{t_n} pour $n>N$, on est donc ramené au cas où D est un ensemble fini, soit $D = t_1,\dots,t_N$ avec $t_1 < \dots < t_N$. Posons, pour $i=1,\dots,N$,

$$S_i = ((S\vee t_i)\vee(T\wedge t_i))\wedge T$$

On aura démontré l'inégalité voulue si on démontre la chaine d'inégalités suivante

$$E[X^*_S] \geqq E[X^*_{S_1}] \geqq \dots \geqq E[X^*_{S_n}] \geqq E[X^*_T]$$

La dernière inégalité ne pose pas de problème : en effet, sur $\{S_n < T\}$, on a $T\notin D$ et donc $X^*_T = Y_T$, et l'inégalité résulte alors de la fortitude de Y. Par conséquent, quitte à appeler S l'un des S_i, ou S, et appeler T le S_{i+1} correspondant, ou S_1, on est ramené au cas suivant : il existe $u\in D$ tel que l'on ait les égalités

$$\{S<T\}\cap\{S<u\} = \{S<T\}\cap\{T\leqq u\} \qquad \{S<T\}\cap\{T\in D\} = \{S<u=T\}$$

(faire un dessin), et, quitte à remplacer S par $S_{\{S<T\}}$ et T par $T_{\{S<T\}}$, on peut supposer que l'on a $S<T$ sur $\{S<+\infty\}$. Sur $\{S\geqq u\}$, on a $X^*_T = Y_T$ et donc, d'après la fortitude de Y, on a $E[X^*_T.1_{\{S\geqq u\}}] \leqq E[X^*_S.1_{\{S\geqq u\}}]$. Choisissons d'autre part une suite croissante (u_n) de points hors de D telle que $\lim u_n = u$. On a

$$E[X^*_T.1_{\{S<u\}}] = \lim_n E[X^*_T.1_{\{T<u_n\}} + X^*_T.1_{\{S<u_n\leqq T\}}]$$
$$= \lim_n E[Y_T.1_{\{T<u_n\}} + X_u.1_{\{S<u_n\leqq T\}}]$$

Compte tenu du fait que les indicatrices dans le second membre sont $\underline{\underline{F}}_{u_n}$-mesurables et que $X_{u_n} = Y_{u_n}$ p.s., le second membre est majoré par $\liminf_n E[Y_{T\wedge u_n}.1_{\{S<u_n\}}]$, lequel est majoré par $E[Y_S.1_{\{S<u\}}]$ d'après la fortitude de Y ... et c'est fini.

REMARQUE. Si l'on a $\underline{\underline{F}}_{t-} = \underline{\underline{F}}_t$ pour tout $t\in D$, il existe une démonstration plus courte en tenant compte du fait que la restriction de T à $\{T\in D\}$ est alors prévisible.