CHING-SUNG CHOU

Le processus des sauts d'une martingale locale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 356-361
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__356_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

LE PROCESSUS DES SAUTS D'UNE MARTINGALE LOCALE

par CHOU Ching-Sung

M. P.A. Meyer a posé la question de savoir si l'on peut construire une martingale locale ayant des sauts donnés. A l'aide des résultats contenus dans le cours [2] et dans la thèse de C. Yoeurp [3], il est très facile de donner une réponse à cette question. Le principal résultat de cette note est le théorème suivant. L'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geqq 0})$ satisfait aux hypothèses habituelles de [2].

THEOREME 1 . <u>Soit $(\sigma_t)_{t\geqq 0}$ un processus bien-mesurable. Pour qu'il existe une martingale locale $(M_t)_{t\geqq 0}$ telle que les processus (σ_t) et (ΔM_t) soient indistinguables, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites</u>

1) <u>Pour presque tout ω , l'ensemble $\{s : \sigma_s(\omega)\neq 0\}$ est dénombrable, et le processus croissant</u>

(1) $$A_t = \sqrt{\sum_{0<s\leqq t} \sigma_s^2}$$

<u>est localement intégrable</u> .

2) <u>Pour tout temps d'arrêt prévisible</u> $T>0$ <u>tel que</u> $E[A_T]<\infty$, <u>on a</u> $E[\sigma_T I_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_{T-}] = 0$.

<u>De plus, il existe alors une seule martingale locale (M_t) sans partie continue, et telle que $(\Delta M_t)=(\sigma_t)$.</u>

DEMONSTRATION . La relation $(\Delta M_t)=(\sigma_t)$ signifie en particulier que $\Delta M_0 = M_0 = \sigma_0$. On peut se ramener tout de suite au cas où $\sigma_0=0$. Toutes les martingales locales que nous considérerons dans la suite seront nulles en 0.

Les conditions 1) et 2) sont nécessaires. En effet, s'il existe une martingale locale (M_t) nulle en 0 telle que $(\Delta M_t)=(\sigma_t)$, on a

$$[M,M]_t = <M^c,M^c>_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2 = <M^c,M^c>_t + A_t^2 \quad ([2], \text{p.}296)$$

Si T est un temps d'arrêt réduisant fortement la martingale locale M ([2], p.293, n°5), alors $[M,M]_T^{1/2}$ est intégrable ([2], p.340, n°15), donc le processus croissant (A_t) est localement intégrable.

Quitte à remplacer M par $M-M^c$, on peut supposer que $[M,M]_t=A_t^2$. Alors si T est un temps d'arrêt prévisible tel que $E[A_T]<\infty$, on a $E[[M,M]_T^{1/2}] < \infty$, ce qui signifie que la martingale locale arrêtée M^T appartient à $\underline{\underline{H}}^1$. Elle est alors uniformément intégrable, et on a

$$E[M_T^T|\underline{\underline{F}}_{T-}] = M_{T-}^T$$

ce qui signifie que $E[\sigma_T I_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_{T-}]=E[\Delta M_T^T|\underline{\underline{F}}_{T-}] = 0$.

L'unicité est évidente : la différence entre deux solutions est une martingale locale sans partie continue et sans aucun saut, donc nulle.

Nous montrons maintenant que les conditions 1) et 2) sont suffisantes. Nous commençons par remarquer que, puisque le processus croissant (A_t) est localement intégrable, il admet un compensateur prévisible $(\tilde{A}_t)$. Soit alors

$$W_n = \inf \{ t : \tilde{A}_t \geq n \}$$

W_n est un temps d'arrêt prévisible ([2], p.253, note 9), strictement positif puisque $\tilde{A}_0=0$, donc il existe une suite croissante (W_{np}) de temps d'arrêt prévisibles annonçant W_n ([1], p.73, T12), et on a $\tilde{A}_{W_{np}} \leq n$ pour tout p. Posons alors $V_n = \sup_{k\leq n, p\leq n} W_{kp}$; les temps d'arrêt V_n sont <u>prévisibles</u>, tendent en croissant vers $+\infty$, et on a $\tilde{A}_{V_n} \leq n$ pour tout n, donc aussi

$$(3) \qquad E[A_{V_n}] = E[\tilde{A}_{V_n}] \leq n \quad .$$

En effet, si U est un temps d'arrêt réduisant la martingale locale $N=A-\tilde{A}$ nulle en 0, on a $E[A_{V_n\wedge U}-\tilde{A}_{V_n\wedge U}] = E[N_{V_n}^U] = E[N_0^U] = 0$, d'où (3) en faisant tendre U vers $+\infty$.

Désignons maintenant par (σ_t^n) le processus $(\sigma_t I_{\{t \leqq V_n\}})$, et posons $A_t^n = (\sum_{s \leqq t} (\sigma_s^n)^2)^{1/2} = A_{t \wedge T_n}$. Nous avons que

i. (σ_t^n) est bien-mesurable, et $E[A_\infty^n] < +\infty$.

ii. Pour tout temps prévisible T on a $E[|\sigma_T^n|] \leqq E[A_\infty^n] < +\infty$, et $E[\sigma_T^n | \underline{\underline{F}}_{T-}] = 0$.

Cette dernière propriété vient de la propriété 2) de l'énoncé, du fait que $T \wedge V_n$ est <u>prévisible</u> et $E[A_{T \wedge V_n}] < +\infty$.

Supposons alors que nous sachions construire, pour chaque n, une martingale uniformément intégrable M^n sans partie continue telle que $(\Delta M_t^n) = (\sigma_t^n)$. En vertu de l'unicité, les martingales M^n se recolleront bien aux temps d'arrêt V_n , et la martingale locale M obtenue par recollement sera sans partie continue d'après [2], p.296, th.9 , et satisfera à $(\Delta M_t) = (\sigma_t)$.

Tout revient donc à résoudre le problème posé dans le cas où le processus (σ_t) possède les propriétés i. et ii. ci dessus, c'est à dire les hypothèses de l'énoncé et en plus l'intégrabilité de A_∞. Cela se fait à la manière de la compensation des sauts dans L^2 : soit (T_n) une suite de temps d'arrêt, soit totalement inaccessibles, soit prévisibles, tous >0, à graphes disjoints, et tels que $\{(t,\omega) : \sigma_t(\omega) \neq 0\}$ soit contenu dans la réunion des graphes $[[T_n]]$ (voir [2], p.265). Posons pour tout n

$$B_t^n = \sigma_{T_n} I_{\{t \geqq T_n\}} \text{ , processus à variation intégrable,}$$

et soient $\tilde{B}^n$ le compensateur prévisible de B^n , K^n la martingale $B^n - \tilde{B}^n$. D'après la propriété 2) de l'énoncé - vraie pour tout temps d'arrêt prévisible - on a $\tilde{B}^n = 0$ lorsque T_n est prévisible, de sorte que dans tous les cas, K^n est une martingale à variation intégrable, sans partie continue par conséquent, admettant un seul saut égal à σ_{T_n} à l'instant T_n . Les graphes $[[T_n]]$ étant disjoints, si l'on pose

$$L^n = \Sigma_{p \leqq n} K^p$$

on a pour $m \leqq n$ $\quad [L^n - L^m, L^n - L^m]_\infty = \Sigma_{m < p \leqq n} \sigma_{T_p}^2$. L'hypothèse d'intégrabilité de A_∞ entraîne alors que les L^n forment une suite de Cauchy dans l'espace $\underline{\underline{H}}^1$, et la limite de cette suite est la martingale M cherchée . Cette partie du raisonnement est tout à fait analogue à celle qui figure dans [2], p.265, avec pour seule différence le remplacement de L^2 par $\underline{\underline{H}}^1$. Aussi ne donnons nous pas de détails.

REMARQUE. La martingale locale M étant purement discontinue, on a

$$[M,M]_\infty = \Sigma_s \Delta M_s^2 = \Sigma_{s\leq t} \sigma_s^2 = A_\infty^2$$

D'où l'on déduit des résultats familiers : si A_∞ est intégrable, M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ (cela a déjà été vu plus haut) ; si A_∞ appartient à L^p ($1<p<\infty$), M est bornée dans L^p ; si A_∞ appartient à L^∞, M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

Le raisonnement que nous avons utilisé dans la première partie de la démonstration conduit au résultat suivant, qui bien que très simple n'a semble t'il jamais été explicité.

PROPOSITION 2. <u>Si</u> (A_t) <u>est un processus croissant localement intégrable, tel que</u> $A_0=0$, <u>il existe une suite de temps d'arrêt prévisibles</u> T_n , <u>qui tend vers</u> $+\infty$ <u>en croissant, telle que pour tout</u> n <u>on ait</u> $E[A_{T_n}] < +\infty$.

En fait, la restriction $A_0=0$ est très facile à lever. Nous construisons la suite T_n ci-dessus relative à (A_t-A_0), puis nous posons $T'_n=0$ sur $\{A_0>n\}$, $T'_n=T_n$ sur $\{A_0\leq n\}$: il est clair que $A_{T'_n}I_{\{T'_n>0\}}$ est intégrable.

COROLLAIRE. <u>Si</u> M <u>est une martingale locale, il existe une suite croissante de temps d'arrêt prévisibles</u> T_n , <u>qui tend vers</u> $+\infty$ <u>en croissant, telle que pour tout</u> n <u>la martingale locale</u> $M^{T_n}I_{\{T_n>0\}}$ <u>appartienne à</u> $\underline{\underline{H}}^1$.

Il suffit d'appliquer la proposition 2 au processus croissant localement intégrable $[M,M]^{1/2}$.

Voici une autre propriété simple des martingales locales, qui n'a peut être, elle non plus, jamais été explicitée :

PROPOSITION 3. Soient M une martingale locale, T un temps d'arrêt prévisible. Alors l'espérance conditionnelle $E[M_T I_{\{0<T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ existe et vaut $M_{T-} I_{\{0<T<\infty\}}$.

DEMONSTRATION. Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt réduisant M, qui tend vers $+\infty$ p.s. (les T_n n'ont pas besoin ici d'être supposés prévisibles). La martingale $M^{T_n} I_{\{T_n>0\}}$ étant uniformément intégrable, $E[|M_{T\wedge T_n}| I_{\{0<T<\infty\}}]$ est finie et $E[M_{T\wedge T_n} I_{\{0<T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}] = M_{T\wedge T_n -} I_{\{0<T<\infty\}}$. D'autre part, l'ensemble $\{T \leqq T_n\}$, complémentaire de $\{T>T_n\}$, appartient à $\underline{\underline{F}}_{T-}$. Il en résulte que

$M_T I_{\{0<T<\infty\}}$ est intégrable sur chacun des ensembles $\{0<T<\infty, T\leqq T_n\}$, $\{T=0\}$, $\{T=\infty\}$, $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurables et don la réunion est Ω ; donc l'espérance conditionnelle $E[M_T I_{\{0<T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ existe ;

$E[M_T I_{\{0<T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ vaut 0 sur $\{T=0\}$ et $\{T=\infty\}$, M_{T-} sur chacun des ensembles $\{0<T<\infty, T\leqq T_n\}$. C'est bien le résultat annoncé.

COROLLAIRE. Si X est une semimartingale spéciale, admettant la décomposition canonique $X=X_0+M+A$, et si T est un temps d'arrêt prévisible, l'espérance conditionnelle $E[\Delta X_T I_{\{0<T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ existe et vaut $\Delta A_T I_{\{0<T<\infty\}}$

DEMONSTRATION. On écrit que $\Delta X_T = M_T - M_{T-} + \Delta A_T$, et on remarque que M_{T-} et ΔA_T sont $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurables sur $\{0<T<\infty\}$, et on applique la proposition 3.

Nous avons écrit ici des espérances conditionnelles généralisées au sens de la nouvelle édition de Probabilités et Potentiel de C. Dellacherie et P.A. Meyer, p.54, n°II.39. Si les espérances conditionnelles existent au sens ordinaire, les résultats s'appliquent bien entendu.

On voit donc que la seconde condition de l'énoncé du théorème 1 aurait pu être remplacée par :

pour tout temps d'arrêt prévisible T, $E[\sigma_T I_{\{0<T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ existe et est égale à 0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Springer-Verlag 1972.

[2] P.A. MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in M. 511, Springer-Verlag 1976.

[3] C. YOEURP. Décompositions des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de probabilités X.

C.S. Chou
Mathematics Department
National Central University
Chung-Li, Taiwan, Republic of China

Nous avons appris par M. P.A. Meyer que le théorème 1 avait été établi indépendamment par M. D. Lepingle.