Claude Dellacherie

Les dérivations en théorie descriptive des ensembles et le théorème de la borne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 34-46
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__34_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

LES DERIVATIONS EN THEORIE DESCRIPTIVE DES ENSEMBLES
et
LE THEOREME DE LA BORNE

par C.Dellacherie

L'exemple fondamental de dérivation (au sens ou nous entendons ce mot ici) est celle des temps d'arrêt sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, soit encore, dans un autre langage, celle des arbres sur $\mathbb{N}$. Cependant, comme introduction, nous considérerons un exemple sans doute plus familier à la plupart des lecteurs : la dérivation de Cantor.

LA DERIVATION DE CANTOR

Soit E l'ensemble des compacts d'un espace métrisable compact (le compact vide $\emptyset$ inclus) muni de la topologie de Hausdorff, et de la structure d'ordre habituelle : nous écrirons "$x \leqq y$" pour "x est inclus dans y". L'espace E est métrisable compact, $(E,\leqq)$ est une lattice complète, et $\leqq$ est une relation compacte (i.e. le graphe de $\leqq$ dans $E \times E$ est compact ; nous identifierons toujours une relation avec son graphe).

Considérons la <u>dérivation de Cantor</u> δ sur E, i.e. l'application de E dans E qui à $x \in E$ associe son <u>dérivé</u> $\delta(x)$ défini par

$$\delta(x) = \text{l'ensemble des points non isolés de } x$$

C'est une application borélienne (en fait, de 2ème classe de Baire) qui vérifie les propriétés suivantes

$$\forall x \quad \delta(x) \leqq x \qquad\qquad \forall x,y \quad x \leqq y \rightarrow \delta(x) \leqq \delta(y)$$

et $x \in E$ est dit <u>parfait</u> si $\delta(x) = x$. Désignant par I l'ensemble des ordinaux dénombrables, on définit alors la <u>suite transfinie des dérivés successifs</u> $(x^i)_{i \in I}$ de $x \in E$, par récurrence transfinie, comme suit

$$x^0 = x$$
$$x^j = \inf_{i<j} \delta(x^i)$$

puis l'<u>indice</u> $j(x)$ de x par

$$j(x) = \inf \{ i \in I : x^i = \emptyset \} \quad \text{si} \quad \{\ldots\} \text{ n'est pas vide}$$
$$j(x) = \omega_1 \quad \text{si} \quad \{\ldots\} \text{ est vide}$$

où ω_1 est le premier ordinal non dénombrable (si on adopte la définition des ordinaux de Von Neumann, ω_1 n'est autre que I, ensemble des ordinaux dénombrables).

Posons enfin

$$C = \{ x \in E : j(x) = \omega_1 \} \qquad D = \{ x \in E : j(x) < \omega_1 \}$$

On a alors les résultats suivants

1) $x \in C$ ssi x contient un parfait $\neq \emptyset$
2) D est coanalytique,*) et n'est pas borélien si $\sup_{x \in D} j(x) = \omega_1$
3) si A est une partie analytique de E contenue dans D, on a $\sup_{x \in A} j(x) < \omega_1$
4) les relations de préordre sur E

$$x \in D \text{ et } j(x) \leqq j(y) \qquad x \in D \text{ et } j(x) < j(y)$$

sont coanalytiques (autrement dit, $j(.)$ est une norme coanalytique sur D, au sens des logiciens).

Le point 1) est un résultat classique de Cantor ; le point 2) est dû à Hurewicz. Les points 3) et 4) sont établis dans la thèse de 3e cycle de Hillard.

Or, considérons la relation R sur E définie par

$$x R y \quad \text{ssi} \quad y \neq \emptyset \text{ et } y \leqq \delta(x)$$

puis, pour tout $x \in E$, la relation R_x sur E définie par

$$y R_x z \quad \text{ssi} \quad x R y \text{ et } y R z$$

Comme δ est une application borélienne, la relation R et les relations R_x sont boréliennes, et on a (la définition des termes entre guillemets est rappelée plus loin)

----

*) " coanalytique " = " complémentaire d'analytique "

$x \in D$ ssi R_x est une relation " bien fondée " , et alors

$j(x) = 1 + i(x)$, où $i(x)$ est la " longueur " de R_x

Par conséquent, les ensembles C , D et la fonction indice $j(.)$ peuvent se définir en terme de la seule relation R . D'où l'idée de partir d'une relation analytique R sur un espace polonais E et d'étudier si on a les analogues des points 2) , 3) , 4) vus plus haut en définissant C , D et $j(.)$ à partir de R .

Nous allons voir, à l'aide du théorème de Kunen-Martin sur les relations analytiques bien fondées, que les points 2) et 3) se généralisent bien. Le point 4) , faux en général, semble plus délicat à étudier. Nous définirons ensuite une notion générale de dérivation, illustrée par des exemples variés, et, grâce à " la relation " attachée à chaque dérivation, nous étendrons les points 1) , 2) , 3) à toute dérivation.

THEOREME DE KUNEN-MARTIN ET APPLICATION [1)]

D'abord quelques rappels. Soient E un ensemble et R une relation sur E , i.e. une partie de $E \times E$. On dit que R est une relation <u>bien fondée</u> si elle vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1) pour toute partie non vide F de E , il existe $y \in F$ tel que

$$\forall x \in F \quad \text{non } x R y$$

2) il N'existe PAS de suite infinie (x_n) dans E telle que

$$\ldots R x_{n+1} R x_n R \ldots R x_2 R x_1$$

Si R est une relation bien fondée sur E , on définit, par récurrence transfinie sur tous les ordinaux j , l'ensemble $R(j)$ des $x \in E$ de <u>rang</u> $\geqq j$ par

$$R(0) = E$$

$$R(j) = \{ y \in E : \forall i < j \quad \exists\, x \in R(i) \quad x R y \}$$

puis, pour tout $x \in E$, on définit le <u>rang</u> $r(x)$ de x par

$$r(x) = \inf \{ j : x \notin R(j+1) \} = \sup \{ j : x \in R(j) \}$$

La fonction $r(.)$ est alors une application de E sur un segment d'ordinaux, et l'ordinal $\inf \{ j : R(j) = \emptyset \} = \sup_{x \in E} (r(x) + 1)$ est appelé la <u>longueur</u> de R . Evidemment,

---

1) Nous nous expliquons sur le nom donné à ce théorème dans l'appendice.

la longueur de la relation bien fondée R est toujours strictement majorée par le cardinal successeur du cardinal de E.

Voici maintenant le théorème de Kunen-Martin. Afin de ne pas rompre l'unité du discours, nous avons renvoyé en appendice sa démonstration qui, sans être très difficile, nécessite cependant un peu plus de connaissances et de virtuosité que le reste.

THEOREME 1 (en bourbachique).- Soient E un espace topologique séparé et R une relation bien fondée sur E. Si R est souslinienne, la longueur de R est $< \omega_1$.

Nous nous donnons maintenant

- un espace polonais E (comme seule la structure mesurable interviendra, on pourrait aussi bien prendre E lusinien, ou E métrisable compact)
- une relation analytique R sur E.

Pour tout $x \in E$, on définit la relation R_x sur E par

$$y\, R_x\, z \quad \text{ssi} \quad x\,R\,y \text{ et } y\,R\,z$$

puis les sous-ensembles C et D de E par

$$C = \{x : R_x \text{ n'est pas bien fondée}\} \qquad D = \{x : R_x \text{ est bien fondée}\}$$

et on pose, pour tout $x \in D$,

$$i(x) = \text{la longueur de la relation bien fondée } R_x$$

Pour tout $x \in E$, la relation R_x est analytique, et on a

THEOREME 2.- a) C est analytique ; D est coanalytique.

b) Pour tout $x \in D$, on a $i(x) < \omega_1$.

c) Si A est une partie analytique de E contenue dans D, on a $\sup_{x \in A} i(x) < \omega_1$.

En particulier, si $\sup_{x \in D} i(x) = \omega_1$, alors D n'est pas borélien.

D/ a) résulte de l'équivalence

$$x \in C \quad \text{ssi} \quad \exists (x_n)\ \forall n\ (x_n \in E \text{ et } x\,R\,x_n \text{ et } x_{n+1}\,R\,x_n)$$

b) résulte du théorème de Kunen-Martin, et c) aussi, en appliquant le théorème à la relation analytique, bien fondée R_A sur $E \times E$ définie par

$$(x,y)\, R_A\, (x',z) \quad \text{ssi} \quad x = x' \text{ et } x \in A \text{ et } x\,R\,y \text{ et } y\,R\,z$$

THEORIE GENERALE DES DERIVATIONS

On se donne maintenant un espace polonais E muni d'une relation d'ordre analytique $\leq$, pour laquelle E a un plus petit élément noté $\emptyset$, et telle que toute suite décroissante admette une borne inférieure. Une application δ de E dans E sera appelée une dérivation si on a

$$\forall x \in E \quad \delta(x) \leq x \qquad\qquad \forall x,y \in E \quad x \leq y \rightarrow \delta(x) \leq \delta(y)$$

et une dérivation δ sera dite analytique si la relation d'ordre R définie par

$$x R y \quad \text{ssi} \quad y \neq \emptyset \text{ et } y \leq \delta(x)$$

est analytique : c'est en particulier le cas si δ est une application borélienne.

On se donne désormais une dérivation analytique δ sur E . On peut alors définir, pour tout $x \in E$, la suite transfinie $(x^i)_{i \in I}$ des dérivés successifs de x , indexée par l'ensemble des ordinaux dénombrables I , en posant

$$x^0 = x$$

$$x^j = \inf_{i<j} \delta(x^i)$$

puis définir l'indice de Lusin-Sierpinski $j(x)$ de x par

$$j(x) = \inf \{ j : x^j = \emptyset \} \quad \text{si } \{\ldots\} \text{ n'est pas vide}$$

$$j(x) = \omega_1 \qquad\qquad \text{si } \{\ldots\} \text{ est vide}$$

THEOREME 3.- *Pour tout $x \in E$, soit R_x la relation sur E définie par*

$$y R_x z \quad \text{ssi} \quad z \neq \emptyset \text{ et } z \leq \delta(y) \text{ et } y \leq \delta(x)$$

On a $j(x) < \omega_1$ ssi R_x est bien fondée, et alors on a $j(x) = 1 + i(x)$, où $i(x)$ est la longueur de la relation bien fondée R_x .

D/ Supposons d'abord $j(x) < \omega_1$. Alors R_x est bien fondée. En effet, sinon, il existerait une suite infinie (y_n) telle que $y_{n+1} R_x y_n$ pour tout n ; alors, par récurrence transfinie, on aurait aussi $y_{n+1} R_{x^i} y_n$ pour tout n et tout $i \in I$, et donc $x^i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Réciproquement, si R_x est bien fondée, sa longueur est $< \omega_1$ d'après le théorème de Kunen-Martin, la relation R_x étant analytique ; de plus, on vérifie aisément, par récurrence transfinie, que, pour $i \geq 1$, on a

$$R_x(i) = \{z : z \neq \emptyset \text{ et } z \leqq x^{1+i}\}$$

où $R_x(i)$ designe l'ensemble des $z \in E$ de rang $\geqq i$ pour R_x. On en déduit que l'on a $j(x) = 1 + i(x)$. On aurait obtenu exaetement $j(x) = i(x)$ en définissant R_x un peu différemment, i.e. en posant $y R_x z$ ssi $z \neq \emptyset$ et $z \leqq \delta(y)$ et $y \leqq x$, mais on aurait perdu le bénéfice de pouvoir définir R_x simplement en terme de R.

Posons finalement, comme précédemment,

$$C = \{x : j(x) = \omega_1\} = \{x : R_x \text{ n'est pas bien fondée}\}$$

$$D = \{x : j(x) < \omega_1\} = \{x : R_x \text{ est bien fondée}\}$$

On a alors

THEOREME 4.- a) C <u>est analytique</u> ; D <u>est coanalytique</u>.

b) <u>Si</u> A <u>est une partie analytique de</u> E <u>contenue dans</u> D, <u>on a</u> $\sup_{x \in A} j(x) < \omega_1$.
<u>En particulier</u>, <u>si</u> $\sup_{x \in D} j(x) = \omega_1$, <u>alors</u> D <u>n'est pas borélien</u>.

c) <u>Supposons que</u>, <u>pour</u> $\leqq$, <u>toute suite croissante admette une borne supérieure</u>, <u>ou que toute suite transfinie décroissante admette une borne inférieure</u>. <u>Alors on a</u>

$$x \in C \quad \text{ssi} \quad \exists y \quad y \neq \emptyset \text{ et } y \leqq x \text{ et } y = \delta(y)$$

<u>D/</u> a) et b) résultent immediatement des théorèmes 2 et 3. Démontrons c). On a $x \in C$ ssi il existe une suite infinie (y_n) telle que $y_{n+1} R_x y_n$ pour tout n. Si toute suite croissante pour $\leqq$ admet une borne supérieure, il suffit de prendre pour y la borne supérieure des y_n ; si toute suite transfinie décroissante pour $\leqq$ admet une borne inférieure, on peut définir la suite transfinie (x^i) des dérivés successifs de x pour tous les ordinaux : la suite transfinie (x^i) est alors constante à partir d'un certain ordinal k, et on peut alors prendre $y = x^k$, qui est $\neq \emptyset$ puisqu'il majore les y_n.

<u>Remarque</u> (en bourbachique) : Les théorèmes 3 et 4 s'étendent sans difficultés (soit directement, soit par plongement) au cas où on suppose seulement que E est souslinien. Bien entendu, dans ce cas, la partie coanalytique D de E n'est pas en général cosouslinienne.

EXEMPLES

1) D'abord l'exemple fondamental, que nous décrirons en termes d'arbres pour changer. Soit S l'ensemble des suites finies d'entiers ; nous écrirons $u*v$ pour signifier que u est une section commencante de v, différente de v. On prend alors pour E l'ensemble des arbres, i.e. l'ensemble des parties x de S telles que l'on ait $v\in x$ et $u*v \rightarrow u\in x$, que l'on munit de la topologie suivante : la famille filtrante (x_t) converge vers x ssi, pour tout $u\in x$ (resp $u\notin x$), on a $u\in x_t$ (resp $u\notin x_t$) pour t suffisamment grand ; E est alors un espace métrisable compact. On prend pour ordre $\leqq$ l'inclusion, qui est compacte, et pour dérivation δ l'application de 1ère classe de Baire définie par $\delta(x) = \{u\in S : \exists v\ v\in x \text{ et } u*v\}$. L'ensemble D est alors l'ensemble coanalytique des arbres n'ayant pas de branches infinies, et on retrouve le théorème classique de bornitude de l'indice sur les analytiques contenus dans D. On sait, par ailleurs, que j(.) définit ici une norme coanalytique sur D.

2) Nous présentons maintenant une généralisation de la dérivation de Cantor. Soit X un espace polonais, que nous plongeons dans un espace métrisable compact Y. Identifions tout fermé de X à son adhérence dans Y, et munissons l'ensemble E des fermés de X de la topologie induite par la topologie de Hausdorff sur l'ensemble des fermés de Y : E est alors un espace polonais, dont la tribu borélienne, appelée tribu d'Effros, ne dépend pas du plongement considéré. L'ordre considéré $\leqq$ est toujours l'inclusion, qui est fermée, et la dérivation δ est la dérivation de Cantor dans X. Ici, l'application δ n'est pas borélienne en général : si, par exemple, X est l'ensemble des irrationnels de $[0,1]$, l'ensemble $\{x : \delta(x) = \emptyset\}$ est coanalytique, non borélien. La relation $x R y$ ssi $y \neq \emptyset$ et $y \leqq \delta(x)$ est cependant toujours analytique. L'ensemble C est l'ensemble des fermés contenant un parfait non vide, et l'ensemble D est l'ensemble des fermés dénombrables. On retrouve le théorème de bornitude de l'indice, établi par Hillard ; mais ici, en général, j(.) ne définit pas une norme coanalytique sur D.

3) Pour terminer, voici un exemple "probabiliste". Nous prenons ici les notations habituelles en probabilités, qui seront parfois en conflit avec les notations utilisées précédemment. Soit $E^* = E \cup \{\delta\}$ un espace lusinien métrisable, augmenté d'un point isolé δ comme à l'accoutumée, et désignons par Ω l'ensemble des trajectoires continues à droites, à durée de vie, dans E : $\omega \in \Omega$ ssi ω est une application continue à droite de $T = [0,\infty]$ dans E^* telle que $\omega(\infty) = \delta$ et que $\omega(t) = \delta$ si on a $\omega(s) = \delta$ pour un $s < t$; nous désignerons par $[\delta]$ l'application constante valant δ. Définissons, comme d'habitude, pour tout $t \in T$, les applications coordonnées (X_t) par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et les opérateurs de translation (θ_t) par $X_s(\theta_t(\omega)) = X_{t+s}(\omega)$ pour tout $s \in T$, et munissons Ω de la tribu $\underline{\underline{F}}$ engendrée par les X_t : les applications $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ et $(t,\omega) \to \theta_t(\omega)$ sont alors mesurables pour les tribus convenables évidentes. Considérons par ailleurs l'ensemble W des applications des rationnels >0 dans E^*, muni de la topologie de la convergence simple : c'est un espace lusinien métrisable, donc isomorphe pour sa structure borélienne à un espace polonais, et, si on identifie de manière évidente Ω a un sous-ensemble de W, on sait que Ω devient une partie coanalytique de W et que la tribu $\underline{\underline{F}}$ est alors la trace sur Ω de la tribu borélienne de W. Définissons une relation $\leqq$ sur $T \times W$ par

$$(s,\omega) \leqq (t,w) \quad \text{ssi} \quad w \notin \Omega \ \text{ou} \ [w \in \Omega \ \text{et} \ s \geqq t \ \text{et} \ \omega = \theta_{s-t}(w)]$$

où $\theta_{s-t}(w) = [\delta]$ si $s = \infty$. C'est une relation de préordre, dont les éléments maximaux, tous comparables, sont les points de $T \times (W - \Omega)$; $(\infty, [\delta])$ en est l'unique élément minimal, et toute suite décroissante admet une borne inférieure. D'autre part, c'est une relation analytique. En effet, comme θ est une application mesurable de $T \times \Omega$ dans Ω, donc de $T \times \Omega$ dans W, il existe une application borélienne $\lambda : (t,w) \to \lambda_t(w)$ de $T \times W$ dans W telle que θ soit égale à la restriction de λ à $T \times \Omega$; on a alors

$$(s,\omega) \leqq (t,w) \quad \text{ssi} \quad w \notin \Omega \ \text{ou} \ [s \geqq t \ \text{et} \ \omega = \lambda_{s-t}(w)]$$

Le fait que $\leqq$ soit seulement un préordre sur $T \times W$ ne sera pas bien gênant pour la suite, car la restriction de $\leqq$ à $T \times \Omega$ est un ordre, et les éléments de $T \times (W - \Omega)$ seront tous parfaits pour les dérivations que nous allons définir. Voyons maintenant justement comment définir ces dérivations. Soit S une fonction de W dans T, nulle sur $(W-\Omega)$, que nous supposerons <u>coanalytique</u>, i.e. telle que $\{(t,w) : S(w) \leq t\}$ soit analytique : par exemple, on peut prendre pour S le début d'une partie mesurable H de $T \times \Omega$ $\left(S(\omega) = \inf \{t : (t,\omega) \in H\} \text{ avec } \inf \emptyset = \infty\right)$, prolongé par 0 sur $(W-\Omega)$. Nous définissons maintenant une dérivation analytique $\underline{\theta}_S$ sur $T \times W$ en posant

$$\text{si } w \notin \Omega \quad \underline{\theta}_S(t,w) = (t,w)$$

$$\text{si } w \in \Omega \quad \underline{\theta}_S(t,w) = (t + S(w), \theta_{S(w)}(w))$$

Si on définit comme d'habitude la suite transfinie $(S^i)_{i \in I}$ des itérés successifs de S par $S^0 = 0$, $S^1 = S$, ..., $S^{i+1} = S^i + S \circ \theta_{S^i}$, ..., $S^j = \sup_{i<j} S^i$ si j est limite, ... alors, pour $w \in \Omega$, le ième dérivé de (t,w) est égal à $(t + S^i(w), \theta_{S^i(w)}(w))$. Si on identifie maintenant W à $\{0\} \times W$, alors $D_0 = D \cap W$ est égal à $\{\omega \in \Omega : \exists i \ S^i(\omega) = \infty\}$. Considérons par exemple une distance d sur E compatible avec sa topologie, et, pour tout entier n, définissons un temps d'arrêt S_n sur Ω par

$$S_n(\omega) = \inf \{t : d(X_0(\omega), X_t(\omega)) > 1/n\}$$

Pour tout n, l'ensemble D_0 est ici Ω tout entier, et le théorème de bornitude de l'indice nous dit que, pour toute partie souslinienne de Ω (i.e. toute partie analytique de W contenue dans Ω), il existe un ordinal dénombrable j tel que tous les temps d'arrêt S_n^j, n parcourant les entiers, soient infinis sur cette partie : on retrouve un résultat de Hillard, qui a aussi montré dans sa thèse de 3ème cycle qu'on pouvait définir ainsi une norme coanalytique sur Ω.

Les exemples que nous avons donnés ici sont essentiellement illustratifs. Dans un autre exposé de ce volume du séminaire[1], Hillard montre comment la théorie de la dérivation permet de donner des démonstrations simples du théorème classique de Lusin sur la structure des analytiques à coupes dénombrables dans un espace polonais produit et du théorème récent de Saint-Raymond sur la structure des boréliens à coupes K_σ dans un espace polonais produit.

---

1) En fait, pour des raisons de santé, Hillard n'a pu rédiger à temps son exposé, qui paraîtra dans le prochain volume du séminaire.

A P P E N D I C E

Nous devons d'abord justifier le nom que nous avons donné au théorème sur la longueur des relations bien fondées sousliniennes. Pour les logiciens, il s'agit en fait d'un résultat "classique" , et le théorème démontré effectivement par Kunen et Martin en est, en quelque sorte, une extension (il permet par exemple d'affirmer que toute relation bien fondée et PCA est de longueur $<$ aleph_2). Or, s'il est vrai que Sierpinski et Lusin ont établi, dès 1918, une forme classique du théorème de la borne en fondant la théorie des constituants, je n'ai jamais vu - fut ce évoqué - le résultat général sur les relations bien fondées chez les auteurs "classiques" . Par ailleurs, si l'énoncé du théorème de Kunen et Martin fait intervenir une généralisation de la notion de schéma de Souslin, sa démonstration (dont le principe vaut pour le résultat "classique") repose sur un codage ingénieux, mais simple et naturel pour qui est familier avec ce genre de choses ; c'est sans doute pour cela que les logiciens ne considèrent le résultat "classique" bien différent de ce qui avait été effectivement établi par Sierpinski, Lusin et autres. Tout compte fait, je pense qu'il revient aux logiciens d'avoir découvert le simple et général sous les travaux classiques, et c'est pourquoi j'ai appelé "théorème de Kunen-Martin" le résultat "classique" .

Rappelons-en l'énoncé, en langage bourbachique

THEOREME.- <u>Soient</u> E <u>un espace topologique séparé et</u> R <u>une relation bien fondée sur</u> E . <u>Si</u> R <u>est souslinienne</u>, <u>sa longueur est</u> $<$ aleph_1.

La démonstration que nous en donnerons, après réduction au cas où $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, est adaptée de celle du cours manuscrit de Kechris à MIT (1973-74). Comme elle fera intervenir d'une manière essentielle la notion d'arbre (que l'on peut remplacer par celle de temps d'arrêt, mais nous ne le ferons pas aujourd'hui...), nous commençons par quelques "rappels" à ce sujet.

ARBRES

Soient X un ensemble, et S(X) l'ensemble des suites finies (suite vide $\emptyset$ comprise) d'éléments de X. Pour $u, v \in S(X)$, la notation $u \dashv v$ signifie que v "commence" par u et que $v \neq u$. Un <u>arbre</u> A <u>sur</u> X est alors un sous-ensemble de S(X) tel que l'on ait :

$$u \dashv v \text{ et } v \in A \Rightarrow u \in A$$

Un arbre A est dit <u>bien fondé</u> si la relation R_A sur S(X) définie par

$$vR_A u \Leftrightarrow v \in A \text{ et } u \dashv v$$

est bien fondée, soit encore ssi il n'existe pas de chemin infini dans A, i.e. de suite infinie w d'éléments de X dont toutes les sections commençantes appartiennent à A. Si A est un arbre bien fondé, nous appellerons <u>indice de</u> A l'ordinal i(A) égal à la longueur de la relation bien fondée associée. L'ensemble des $v \in A$ de rang 0 sont les "bouts pendants" de l'arbre, et l'indice de A peut se définir à l'aide d'une dérivation, le dérivé A' de A étant l'arbre $\{u \in A : \exists v \in A \;\; u \dashv v\}$. Par ailleurs, si R est une relation sur X, on lui associe un arbre A sur X comme suit : la suite finie $u = x_1, \ldots, x_n$ appartient à A ssi u est de longueur 0 ou 1, ou si $x_n R x_{n-1}$ et ... et $x_2 R x_1$. On vérifie alors sans peine que R est bien fondée ssi A est bien fondé, et que la longueur de R est alors égale à l'indice de A (longueur qui est certainement $< \aleph_1$ si X est dénombrable). Enfin, si A est un arbre sur X, B un arbre sur Y, et si f est une application de A dans B telle que $u \dashv v \Rightarrow f(u) \dashv f(v)$ (sans qu'il y ait nécessairement conservation de la longueur), on voit aisément que, si B est bien fondé, alors A l'est aussi et on a $i(A) \leq i(B)$.

Nous avons maintenant toutes les connaissances requises sur les arbres pour exposer la démonstration du théorème.

DEMONSTRATION DU THEOREME

Soit H le "champ" de R, i.e. l'ensemble $\{x\in E : \exists y \; xRy \text{ ou } yRx\}$; H est souslinien, et donc est l'image de $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ par une application continue h. Définissons une relation S sur Ω par

$$\omega S w \iff h(\omega) R h(w)$$

Alors S est souslinienne, bien fondée, et de même longueur que R. Quitte à remplacer R par S, on peut donc supposer que $E = \Omega$.

Maintenant R, partie analytique de $\Omega\times\Omega$, est la projection sur $\Omega\times\Omega$ d'une fermé F de $(\Omega\times\Omega)\times\Omega$. On a donc

$$\omega R w \iff \exists \psi \in \Omega \; (\omega, w, \psi) \in F$$

Pour tout (ω,w) tel $\omega R w$, nous choisissons un tel ψ en prenant

$\psi(\omega,w)$ = le plus petit ψ, pour l'ordre lexicographique sur Ω, tel que $(\omega,w,\psi)\in F$

mais, en fait, la "régularité" du choix n'a pas d'importance pour la suite.

Ceci fait, on associe à notre relation bien fondée R sur Ω un arbre, bien fondé, A sur Ω comme indiqué précédemment : la suite $u = \omega_1,\ldots,\omega_n$ appartient à A ssi la longueur de u vaut 0 ou 1, ou si on a $\omega_n R \omega_{n-1}$ et ... et $\omega_2 R \omega_1$. Et nous allons montrer que l'on a $i(A) < \text{aleph}_1$ en construisant, à l'aide de notre fonction $\psi(\omega,w)$, un arbre B sur $\mathbb{N}$, bien fondé, et une application f de A dans B tels que l'on ait la propriété (°)

$$u,v \in A \text{ et } u \dashv v \Rightarrow f(u) \dashv f(v)$$

En fait, nous n'allons pas décrire tout l'arbre B, mais plutôt construire l'application f vérifiant (°) : pour $u\in A$, nous allons dire ce qu'est f(u), et B sera l'arbre engendré par f(A).

L'idée est simple : si $u = \omega_1,\ldots,\omega_n$, f(u) va contenir des sections commençantes des suites infinies ω_i, $1 \leq i \leq n$ et $\psi(\omega_{i+1},\omega_i)$, $1 \leq i \leq n-1$, ces sections commençantes étant d'autant plus longues que u est longue. Mais cela peut être pénible à écrire : aussi choisirons nous notre f en privilégiant plutôt sa facilité d'écriture que son économie (i.e. , notre f(u) sera plutôt longue, contenant beaucoup de redondances). Nous introduirons encore deux notations avant de nous y mettre : si ω est une suite infinie et n un entier, $\omega|n$ désigne la suite finie, de longueur n , commençant ω ; si s et t sont deux suites finies d'entiers, $s \circ t$ sera la suite obtenue en écrivant t à la droite de s : "$\circ$" est l'opération (associative) de concaténation.

On pose d'abord, ce qui n'est pas fatigant,

$$f(\emptyset) = \emptyset \qquad\qquad f(\omega) = \omega|1$$

puis, si $u = \omega_1,\ldots,\omega_n$ appartient à A avec $n \geq 2$, et si $f(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$ est déjà défini, on pose

$$f(\omega_1,\ldots,\omega_n) = f(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}) \circ \omega_1|n \circ \omega_2|n \circ \ldots \circ \omega_{n-1}|n \circ \omega_n|n \circ \Psi(\omega_n,\omega_{n-1})|n \circ \ldots \circ \Psi(\omega_2,\omega_1)|n$$

Il est clair que la connaissance de f(u) permet de retrouver, de manière unique, $\omega_1|n,\ldots,\omega_n|n,\Psi(\omega_n,\omega_{n-1})|n,\ldots,\Psi(\omega_2,\omega_1)|n$, et que la fonction f ainsi construite par récurrence vérifie la propriété (°). Il ne nous reste plus qu'à vérifier que l'arbre B , engendré par f(A), est bien fondé. Raisonnons par l'absurde. S'il n'en était pas ainsi, il existerait un chemin infini w dans B , et donc, vu la construction de f , une suite infinie (u_k) d'éléments de A , de longueur n_k tendant en croissant vers l'infini, telle que

$$f(u_1) \dashv f(u_2) \dashv \ldots \dashv f(u_k) \dashv \ldots \dashv w$$

Posons, pour tout k , $u_k = \omega_1^k,\ldots,\omega_{n_k}^k$. D'après la construction de f, il est facile de voir que, pour i fixé, $\lim_k \omega_i^k = \omega_i$ existe ainsi que $\lim_k \Psi(\omega_{i+1}^k,\omega_i^k) = \Psi(\omega_{i+1},\omega_i)$. Mais, puisque F est fermé, on a, pour tout i , $(\omega_{i+1},\omega_i,\Psi(\omega_{i+1},\omega_i)) \in F$ et donc $\omega_{i+1} R \omega_i$: ce qui contredit le fait que R est bien fondée. C'est fini.