

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ALAIN BERNARD

## Complément à l'exposé précédent

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 11 (1977), p. 324-326

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1977\\_\\_11\\_\\_324\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__324_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# COMPLEMENT A L'EXPOSE PRECEDENT

par Alain BERNARD

Gardons les mêmes notations et montrons comment prouver la dernière proposition (proposition 9 : 2e inégalité de DAVIS) sans faire appel à l'inégalité de FEFFERMAN pour  $H^1$  et BMO, ce qui fournit donc par là même une démonstration de cette inégalité de FEFFERMAN à partir de celle pour  $\mathbb{H}^1$  et BMO.

Soit donc  $X \in H^1$ . Nous voulons montrer que  $X \in \mathbb{H}^1$  et  $\|X\|_{\mathbb{H}^1} \leq c \|X\|_{H^1}$ , où  $c$  désigne une constante absolue. Pour cela nous allons appliquer à  $X$  la décomposition de DAVIS exposée dans MEYER [6], page 145 et qui se présente comme suit :

Notons pour chaque  $t > 0$  :

$$\begin{aligned}(\Delta X)_t &= X_t - X_{t-} \\ (\Delta X)_t^* &= \sup\{ |(\Delta X)_s| ; s \leq t \} \\ (\Delta X)_{t-}^* &= \sup\{ |(\Delta X)_s| ; s < t \}\end{aligned}$$

et considérons le processus adapté  $Q$  défini par :

$$Q_t = \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^1 \{ (\Delta X)_s^* \geq 2(\Delta X)_{s-}^* \}.$$

Du fait que  $(\Delta X)_s^* \geq 2(\Delta X)_{s-}^*$  entraîne  $|(\Delta X)_s| \leq 2((\Delta X)_s^* - (\Delta X)_{s-}^*)$  on déduit que  $Q$  a une variation totale majorée par  $2(\Delta X)_\infty^*$ , donc par  $2[X, X]_\infty^{1/2}$ . L'hypothèse  $X \in H^1$  entraîne donc, tout d'abord que la variation totale de  $Q$  est finie presque sûrement - ce qu'il aurait fallu en toute rigueur signaler

préliminairement à la définition de  $Q$  ! -, et ensuite que l'espérance de la variation de  $Q$  est majorée par  $2\|X\|_{H^1}$ .

Soit  $Z$  la martingale compensée de  $Q$ .  $Z$  est alors dans  $\mathcal{H}_V^1$  et précisément :

$$\|Z\|_{\mathcal{H}_V^1} \leq 4\|X\|_{H^1}.$$

Notons alors  $Y = X - Z$  : du fait que  $X$  et  $Z$  sont dans  $H^1$  ( $Z$  l'est puisque  $Z \in \mathcal{H}_V^1$  et que  $\mathcal{H}_V^1 \subset \mathcal{H}^1 \subset H^1$ ) on déduit que  $Y$  est dans  $H^1$  (avec  $\|Y\|_{H^1} \leq C_1\|X\|_{H^1}$ , où  $C_1$  est une constante que l'exposé précédent permet de choisir égale à  $1 + 4 \times 212 = 849 \dots$ ). Mais les sauts de  $Y$  satisfont à l'inégalité

$$|(\Delta Y)_t| \leq 4(\Delta X)_t^*$$

et le résultat cherché (la 2e inégalité de DAVIS) résultera donc immédiatement du lemme suivant :

LEMME. Soit  $Y$  un élément de  $H^1$  tel que

$$\forall t > 0 \quad |(\Delta Y)_t| \leq Y_{t-}$$

où  $Y_t$  est un processus croissant cad-lag, adapté, nul en zéro, tel que  $E(Y_\infty) < \infty$ . Alors  $Y$  est dans  $\mathcal{H}^1$  et on a

$$\|Y\|_{\mathcal{H}^1} \leq 12(\|Y\|_{H^1} + E(Y_\infty)).$$

Démonstration : Elle va consister à faire une décomposition de  $Y$  en "2-atomes" (voir plus loin) :

Posons pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$

$$\tau_i = \inf\{t ; [Y, Y]_t^{1/2} + Y_t > 2^i\}.$$

De même que dans la démonstration du théorème 4 de l'exposé précédent on a :

$$Y = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y^{\tau_{i+1}} - Y^{\tau_i}}{2^{i+1}P(\tau_i < \infty)} \times [2^{i+1}P(\tau_i < \infty)]$$

où  $\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{i+1}P(\tau_i < \infty) \leq 12(\|Y\|_{H^1} + E(Y_\infty))$  et où la martingale  $a_i$  définie par

$$a_i = \frac{Y^{\tau_{i+1}} - Y^{\tau_i}}{2^{i+1} P(\tau_i < \infty)}$$

est cette fois un 2-atome au sens de la définition suivante :

DEFINITION. On appelle 2-atome toute martingale a telle qu'il existe un temps d'arrêt T tel que

- (i)  $a(t) = 0$  si  $t \leq T$
- (ii)  $\|a\|_{\mathcal{M}^2} \leq \frac{1}{P(T < \infty)^{1/2}}$ .

Le fait que  $a_i$  soit un 2-atome, pour  $T = \tau_i$ , se vérifie facilement : le point (i) est évident. Pour le point (ii) remarquer que

$$\|Y^{\tau_{i+1}} - Y^{\tau_i}\|_{\mathcal{M}^2}^2 = E([Y, Y]_{\tau_{i+1}} - [Y, Y]_{\tau_i})$$

et que

$$[Y, Y]_{\tau_{i+1}} = [Y, Y]_{\tau_{i+1}} + |(\Delta Y)_{\tau_{i+1}}|^2 \leq 4^{i+1}$$

donc que

$$\|[Y, Y]_{\tau_{i+1}} - [Y, Y]_{\tau_i}\|_{\infty} \leq 4^{i+1}.$$

Mais  $[Y, Y]_{\tau_{i+1}} - [Y, Y]_{\tau_i}$  est nulle sur  $\tau_i = +\infty$ , donc

$$E([Y, Y]_{\tau_{i+1}} - [Y, Y]_{\tau_i}) \leq 4^{i+1} P(\tau_i < \infty)$$

d'où l'inégalité (ii).

Il ne reste plus qu'à remarquer que tout 2-atome est dans la boule unité de  $\mathcal{M}^1$  et le lemme est démontré, d'où le résultat cherché, avec  $C = 10236 \dots$

-:-:-:-

Décembre 1976

A. BERNARD, Institut Fourier, BP 116, 38402 ST MARTIN D'HERES