SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ALAIN BERNARD

Complément à l'exposé précédent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 324-326
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__324_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

COMPLEMENT A L'EXPOSE PRECEDENT

par Alain BERNARD

Gardons les mêmes notations et montrons comment prouver la dernière proposition (proposition 9 : 2e inégalité de DAVIS) sans faire appel à l'inégalité de FEFFERMAN pour H^1 et BMO , ce qui fournit donc par là même une démonstration de cette inégalité de FEFFERMAN à partir de celle pour $\mathcal{H}^1$ et BMO .

Soit donc $X \in H^1$. Nous voulons montrer que $X \in \mathcal{H}^1$ et $\|X\|_{\mathcal{H}^1} \leq c\|X\|_{H^1}$, où c désigne une constante absolue. Pour cela nous allons appliquer à X la décomposition de DAVIS exposée dans MEYER [6], page 145 et qui se présente comme suit :

Notons pour chaque $t > 0$:

$$(\Delta X)_t = X_t - X_{t-}$$

$$(\Delta X)^*_t = \sup\{|(\Delta X)_s| \ ; \ s \leq t\}$$

$$(\Delta X)^*_{t-} = \sup\{|(\Delta X)_s| \ ; \ s < t\}$$

et considérons le processus adapté Q défini par :

$$Q_t = \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)\, 1_{\{(\Delta X)^*_s \geq 2(\Delta X)^*_{s-}\}} \ .$$

Du fait que $(\Delta X)^*_s \geq 2(\Delta X)^*_{s-}$ entraîne $|(\Delta X)_s| \leq 2((\Delta X)^*_s - (\Delta X)^*_{s-})$ on déduit que Q a une variation totale majorée par $2(\Delta X)^*_\infty$, donc par $2[X,X]^{1/2}_\infty$. L'hypothèse $X \in H^1$ entraîne donc, tout d'abord que la variation totale de Q est finie presque sûrement - ce qu'il aurait fallu en toute rigueur signaler préliminairement à la définition de Q ! -, et ensuite que l'espérance de la variation de Q est majorée par $2\|X\|_{H^1}$.

Soit Z la martingale compensée de Q . Z est alors dans $\mathcal{H}^1_v$ et précisément :

$$\|Z\|_{\mathcal{H}^1_v} \leq 4\|X\|_{H^1} .$$

Notons alors $Y = X - Z$: du fait que X et Z sont dans H^1 (Z l'est puisque $Z \in \mathcal{H}^1_v$ et que $\mathcal{H}^1_v \subset \mathcal{H}^1 \subset H^1$) on déduit que Y est dans H^1 (avec $\|Y\|_{H^1} \leq C_1\|X\|_{H^1}$, où C_1 est une constante que l'exposé précédent permet de choisir égale à $1 + 4 \times 212 = 849\ldots$). Mais les sauts de Y satisfont à l'inégalité

$$|(\Delta Y)_t| \leq 4(\Delta X)^*_{t-}$$

et le résultat cherché (la 2e inégalité de DAVIS) résultera donc immédiatement du lemme suivant :

LEMME. Soit Y un élément de H^1 tel que

$$\forall t > 0 \qquad |(\Delta Y)_t| \leq \gamma_{t-}$$

où γ_t est un processus croissant cad-lag, adapté, nul en zéro, tel que $E(\gamma_\infty) < \infty$. Alors Y est dans $\mathcal{H}^1$ et on a

$$\|Y\|_{\mathcal{H}^1} \leq 12(\|Y\|_{H^1} + E(\gamma_\infty)) .$$

Démonstration : Elle va consister à faire une décomposition de Y en "2-atomes" (voir plus loin) :

Posons pour chaque $i \in Z$

$$\tau_i = \inf\{t \,;\, [Y,Y]^{1/2}_t + \gamma_t > 2^i\} .$$

De même que dans la démonstration du théorème 4 de l'exposé précédent on a :

$$Y = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y^{\tau_{i+1}} - Y^{\tau_i}}{2^{i+1}P(\tau_i < \infty)} \times [2^{i+1}P(\tau_i < \infty)]$$

où $\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{i+1}P(\tau_i < \infty) \leq 12(\|Y\|_{H^1} + E(\gamma_\infty))$ et où la martingale a_i définie par

$$a_i = \frac{Y^{\tau_{i+1}} - Y^{\tau_i}}{2^{i+1}P(\tau_i<\infty)}$$

est cette fois un 2-atome au sens de la définition suivante :

DEFINITION. <u>On appelle 2-atome toute martingale</u> a <u>telle qu'il existe un temps d'arrêt</u> T <u>tel que</u>

(i) $a(t) = 0$ si $t \le T$

(ii) $\|a\|_{\mathcal{M}^2} \le \dfrac{1}{P(T<\infty)^{1/2}}$.

Le fait que a_i soit un 2-atome, pour $T = \tau_i$, se vérifie facilement : le point (i) est évident. Pour le point (ii) remarquer que

$$\|Y^{\tau_{i+1}} - Y^{\tau_i}\|^2_{\mathcal{M}^2} = E([Y,Y]_{\tau_{i+1}} - [Y,Y]_{\tau_i})$$

et que

$$[Y,Y]_{\tau_{i+1}} = [Y,Y]_{\tau_{i+1}^-} + |(\Delta Y)_{\tau_{i+1}}|^2 \le 4^{i+1}$$

donc que

$$\|[Y,Y]_{\tau_{i+1}} - [Y,Y]_{\tau_i}\|_\infty \le 4^{i+1} .$$

Mais $[Y,Y]_{\tau_{i+1}} - [Y,Y]_{\tau_i}$ est nulle sur $\tau_i = +\infty$, donc

$$E([Y,Y]_{\tau_{i+1}} - [Y,Y]_{\tau_i}) \le 4^{i+1}P(\tau_i < \infty)$$

d'où l'inégalité (ii).

Il ne reste plus qu'à remarquer que tout 2-atome est dans la boule unité de $\mathcal{H}^1$ et le lemme est démontré, d'où le résultat cherché, avec $C = 10236...$

-:-:-:-

Décembre 1976

A. BERNARD, Institut Fourier, BP 116, 38402 ST MARTIN D'HERES