SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ALAIN BERNARD
BERNARD MAISONNEUVE

Décomposition atomique de martingales de la classe H^1

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 303-323
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__303_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

DECOMPOSITION ATOMIQUE DE MARTINGALES DE LA CLASSE $\mathcal{H}^1$

par

A. BERNARD et B. MAISONNEUVE

§1 - INTRODUCTION.

Nous étudions dans divers cas (martingales continues, martingales "dyadiques", martingales dominées par un processus croissant continu à gauche) la décomposition d'un élément de $\mathcal{H}^1$ en combinaison linéaire d'atomes. L'idée de telles décompositions provient de la lecture de l'article [1] de R. COIFMAN qui l'attribue lui-même à C. HERZ. De telles décompositions ont pour conséquence la mise en dualité de certains sous-espaces de $\mathcal{H}^1$ avec des espaces de martingales "bmo", ce qui, joint à la décomposition de DAVIS, fournit une nouvelle approche, dans le cas général, de la dualité $(\mathcal{H}^1,\mathrm{BMO})$ et des inégalités de DAVIS.

La définition d'un atome est donnée dans le §3. Les §4 et 5 sont consacrés à deux cas particuliers et leur lecture n'est pas indispensable pour la suite. La décomposition en atomes est étudiée dans le §6. La décomposition de DAVIS est rappelée dans le §8. La dualité se développe dans les §7 , 9 et 10 . Le papier se termine (§11) par les inégalités de DAVIS.

§2 - NOTATIONS GENERALES.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé complet, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ une famille croissante et continue à droite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}_o$ contient tous les négligeables de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F} = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$.

Toutes les martingales envisagées seront supposées relatives à $(\mathcal{F}_t)$, continues à droite, pourvues de limites à gauche et nulles en 0. Pour tout $p \in [1,\infty]$, nous noterons $\mathcal{M}^p$ l'espace des martingales fermées par une variable de L^p. Si $X \in \mathcal{M}^1$, X_∞ désignera sa variable terminale.

Nous désignerons par $\mathcal{H}^1$ l'ensemble des martingales X telles que $X^*_\infty = \sup_{s\geq 0} |X_s|$ soit intégrable. On vérifie facilement que $\mathcal{H}^1$, muni de la norme $\|X\|_{\mathcal{H}^1} = E(X^*_\infty)$, est un espace de Banach et que $\mathcal{M}^2 \subset \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{M}^1$. Noter que la définition de $\mathcal{H}^1$ que nous avons choisie n'est pas la définition habituelle. C'est grâce à l'usage de la variable maximale X^*_∞ dans cette définition que nous pourrons effectuer des décompositions "atomiques". Nous poserons aussi, pour toute martingale X, $X^*_t = \sup_{s\leq t} |X_s|$. Pour une martingale $X \in \mathcal{M}^1$ et pour $q \in [1,\infty[$, on pose :

$$\|X\|_{bmo^q} = \mathrm{Sup}\{\|X_\infty - X_T\|_q / P\{T<\infty\}^{1/q}\} \qquad (\tfrac{0}{0} = 0)$$

le Sup étant pris sur tous les temps d'arrêt T (de $(\mathcal{F}_t)$). L'espace $bmo^q = \{X\in\mathcal{M}^1 : \|X\|_{bmo^q} < \infty\}$ est alors un espace vectoriel normé. D'après l'inégalité de Hölder on a $\|X\|_{bmo^1} \leq \|X\|_{bmo^q}$ et $bmo^q \subset bmo^1$, $\forall q\geq 1$. Les normes $\|\cdot\|_{bmo^q}$, à la différence des normes $\|\cdot\|_{BMO^q}$ obtenues en remplaçant X_T par X_{T-} dans la définition (on pose $X_{0-} = X_0 = 0$), ne sont en général pas équivalentes, comme le montre l'exemple suivant (qui sera réutilisé dans la suite) :

Un exemple : Prenons comme système de tribus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{F}_t$ = tribu triviale (dûment complétée) si $t < 1$

$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ si $t \geq 1$.

Il est alors facile de voir que $\|X\|_{bmo^q} = \|X_\infty\|_q$, donc que $bmo = \mathcal{M}^q$ pour tout q.

§3 - MARTINGALES ATOMIQUES (ou ATOMES).

DEFINITION 1. On appelle martingale atomique (ou simplement atome) toute martingale a pour laquelle il existe un temps d'arrêt T tel que

(i) $a_t = 0$ si $t \leq T$

(ii) $|a_t| \leq \frac{1}{P\{T<\infty\}}$, $\forall t \geq 0$.

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 1. Tout atome est dans la boule unité de $\mathcal{H}^1$.

Démonstration : Soit a un atome, T un temps d'arrêt associé ; on a $a^*_\infty \leq \frac{1}{P\{T<\infty\}}$ et $a^*_\infty = 0$ sur $\{T=+\infty\}$ donc $E(a^*_\infty) \leq 1$.∎

Cette proposition admet trivialement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. Pour toute suite (a^n) d'atomes, pour toute suite (λ_n) de scalaires tels que $\sum|\lambda_n| < \infty$, la série $\sum\lambda_n a^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{H}^1$.

Nous verrons dans le paragraphe 6 quelles sont les martingales de $\mathcal{H}^1$ qui sont susceptibles d'une décomposition $\sum\lambda_n a^n$ du type ci-dessus. L'espace de telles martingales sera mis en dualité (partielle) avec l'espace bmo^1 , résultat que suggère la proposition suivante :

PROPOSITION 2. Pour toute martingale $Y \in \mathcal{M}^1$ on a

$$1/2 \|Y\|_{\mathrm{bmo}^1} \leq \mathrm{Sup}\{|E(a_\infty Y_\infty)| \ ; \ a \text{ atome}\} \leq \|Y\|_{\mathrm{bmo}^1} .$$

Démonstration : Soit $Y \in \mathcal{M}^1$.

1) Soit a un atome, soit T un temps d'arrêt associé. On a $|E(a_\infty Y_\infty)| = |E(a_\infty(Y_\infty - Y_T))| \leq E[|Y_\infty - Y_T|]/P\{T<\infty\}$ d'où la deuxième inégalité.

2) Soit T un temps d'arrêt quelconque, soit Z_∞ la variable

signe $(Y_\infty - Y_T)$. Notons Z une version cad-lag de $E(Z_\infty | \mathcal{F}_t)$ et a la martingale $\frac{Z-Z^T}{2P\{T<\infty\}}$, où Z^T désigne la martingale stoppée en T . a est un atome et on a

$$E(|Y_\infty - Y_T|) = E[Z_\infty(Y_\infty - Y_T)] = E[(Z_\infty - Z_T)Y_\infty]$$

donc $1/2\, E(|Y_\infty - Y_T|)/P\{T<\infty\} = E(a_\infty Y_\infty)$; d'où la première inégalité. ∎

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à des cas particuliers. Leur lecture n'est pas indispensable pour la suite.

§4 - <u>DECOMPOSITION EN ATOMES DES MARTINGALES CONTINUES, RESULTATS DE GETOOR ET SHARPE</u>.

Pour tout espace $\mathcal{E}$ de martingales, on note $\mathcal{E}_c$ l'ensemble des martingales continues de $\mathcal{E}$. $\mathcal{H}^1_c$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1$. Par suite, si dans le corollaire 1, on suppose que les atomes a^n sont continus, alors $\sum \lambda_n a^n$ est en fait un élément de $\mathcal{H}^1_c$. Le théorème qui suit montre qu'on obtient ainsi tous les éléments de $\mathcal{H}^1_c$.

THEOREME 1.

$$\mathcal{H}^1_c = \{\sum \lambda_n a^n : a^n \text{ atomes continus, } \lambda_n \text{ scalaires, } \sum |\lambda_n| < \infty\} ,$$

<u>plus précisément, pour tout</u> $X \in \mathcal{H}^1_c$, <u>il existe une suite</u> $(a^n)_{n\geq 0}$ <u>d'atomes continus et une suite</u> $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ <u>de scalaires telles que</u>

(i) $\forall t \geq 0$, <u>la suite</u> $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i_t$ <u>converge ponctuellement vers</u> X_t , <u>en restant dominée en module par</u> $2X^*_t$.

(ii) $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| \leq 6\|X\|_{\mathcal{H}^1}$,

<u>et la série</u> $\sum \lambda_i a^i$ <u>converge alors normalement vers</u> X <u>dans</u> $\mathcal{H}^1$.

<u>Démonstration</u> : Soit $X \in \mathcal{H}^1_c$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on définit le temps d'arrêt

$$T_p = \mathrm{Inf}\{t : |X_t| > 2^p\} .$$

L'application $t \to X_t$ étant continue, $\lim_{p\to+\infty} T_p = +\infty$. Par ailleurs $\lim_{p\to-\infty} T_p = T = \inf\{t : X_t \neq 0\}$. Il en résulte que, si $T < t < \infty$, on a

$$X_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} (X_{t\wedge T_{p+1}} - X_{t\wedge T_p}) ,$$

égalité qui reste vraie si $t \leq T$, puisque $X_t = 0$ pour $t \leq T$.

Posons alors

$$\mu_p = 3.2^p P\{T_p < \infty\} \quad , \quad b^p = \frac{1}{\mu_p}(X^{T_{p+1}} - X^{T_p}) .$$

On a $\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{p-1} P\{X_\infty^* > 2^p\} \leq E(X_\infty^*)$, et, du fait que $\{T_p < \infty\} = \{X_\infty^* > 2^p\}$, il vient

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\mu_p| \leq 6E(X_\infty^*) .$$

D'autre part, $b_t^p = 0$ si $t \leq T_p$, et comme $|X_{t\wedge T_p}| \leq 2^p$, il vient $b_t^p \leq \frac{1}{P\{T_p < \infty\}}$, de sorte que b^p est un atome associé à T_p . Pour obtenir des suites (a^n) , (λ_n) indexées par $\mathbb{N}$ et satisfaisant aux conditions (i) , (ii) , il reste à faire une renumérotation des b^p , μ_p . Par exemple on posera

$$a^{2k} = b^k \quad , \quad \lambda_{2k} = \mu_k \quad , \quad k = 0,1,2\dots$$
$$a^{2k-1} = b^{-k} \quad , \quad \lambda_{2k-1} = \mu_{-k} \quad , \quad k = 1,2\dots .$$

La série $\sum \lambda_p a^p$ converge normalement dans $\mathcal{H}^1$, d'après le corollaire 1 . Le fait qu'elle converge vers X dans $\mathcal{H}^1$ résulte de ce que la convergence dans $\mathcal{H}^1$ implique la convergence p. s. pour chaque t , à extraction de sous-suite près.

Nous allons montrer maintenant que le théorème 1 admet comme conséquences la dualité entre $\mathcal{H}_c^1$ et bmo_c^1 , le fait que $bmo_c^1 = bmo_c^2$, ainsi que les inégalités de DAVIS pour les martingales continues, c'est-à-dire les résultats essentiels de GETOOR et SHARPE [4] , avec une présentation totalement différente.

LEMME 1 (Inégalité de FEFFERMAN). <u>Pour</u> $X \in \mathcal{M}_c^\infty$, $Y \in \mathrm{bmo}_c^1$

$$|E(X_\infty Y_\infty)| \le 6\|X\|_{\mathcal{H}^1} \|Y\|_{\mathrm{bmo}^1} .$$

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème 1, X admet une décomposition $\sum \lambda_n a^n$ possédant les propriétés (i) et (ii) . D'après le théorème de convergence dominée on a

$$E(X_\infty Y_\infty) = \sum \lambda_n E(a_\infty^n Y_\infty) .$$

Donc $|E(X_\infty Y_\infty)| \le \sum |\lambda_n| \|Y\|_{\mathrm{bmo}^1}$ et le résultat. On a ici utilisé le fait que pour tout atome a , $|E(a_\infty Y_\infty)| \le \|Y\|_{\mathrm{bmo}^1}$ (deuxième inégalité de la proposition 2). ∎

Le lemme 1 permet de plonger bmo_c^1 dans le dual de $\mathcal{H}_c^1$ (d'après le théorème 1, $\mathcal{M}_c^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}_c^1$). L'identification du dual de $\mathcal{H}_c^1$ va alors résulter du lemme qui suit, après avoir noté qu'un élément $\ell \in (\mathcal{H}_c^1)'$ définit de manière unique un élément $Y \in \mathcal{M}_c^2$ tel que $\ell(X) = E(X_\infty Y_\infty)$ pour $X \in \mathcal{M}_c^2$.

LEMME 2. <u>Soit</u> $Y \in \mathcal{M}_c^2$ <u>tel que</u>

$$|E(X_\infty Y_\infty)| \le C\|X\|_{\mathcal{H}^1} \quad , \quad X \in \mathcal{M}_c^2 .$$

<u>Alors</u>

$$\|Y\|_{\mathrm{bmo}^2} \le 2C$$

<u>donc</u> $Y \in \mathrm{bmo}_c^2$ (<u>donc aussi</u> $Y \in \mathrm{bmo}_c^1$) .

<u>Démonstration</u> : Soit T un temps d'arrêt. La martingale $X = Y - Y^T$ est dans $\mathcal{M}_c^2$, donc

$$E[(Y_\infty - Y_T)^2] = E(X_\infty Y_\infty) \le C\|X\|_{\mathcal{H}^1} .$$

Mais $X_\infty^* = 0$ si $T = \infty$, donc

$$\|X\|_{\mathcal{H}^1} \le \|X_\infty^*\|_2 \, P\{T<\infty\}^{1/2} \quad \text{(inégalité de SCHWARZ)}$$

$$\le 2\|X_\infty\|_2 \, P\{T<\infty\}^{1/2} \quad \text{(inégalité de DOOB)}$$

et comme $X_\infty = Y_\infty - Y_T$, il vient

$$\|Y_\infty - Y_T\|_2 \le 2C P\{T<\infty\}^{1/2}$$

d'où le résultat. ∎

Remarque : La conjonction des lemmes 1 et 2 entraîne que $bmo_c^1 = bmo_c^2$ et que sur bmo_c^1 les normes $\|.\|_{bmo_c^1}$ et $\|.\|_{bmo_c^2}$ sont équivalentes, ce qui s'obtient aussi comme conséquence des inégalités de JOHN-NIRENBERG.

Enonçons maintenant le théorème de dualité obtenu après avoir posé $bmo_c = bmo_c^1 = bmo_c^2$.

THEOREME 2. Pour tout $Y \in bmo_c$, il existe une forme linéaire continue ℓ_Y et une seule, sur $\mathcal{H}_c^1$, telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_c^\infty$, $\ell_Y(X) = E(X_\infty Y_\infty)$. L'application $Y \to \ell_Y$ ainsi définie est une bijection bi-continue de bmo_c sur $(\mathcal{H}_c^1)'$, muni de sa norme de dual.

Pour retrouver par cette présentation les résultats essentiels de GETOOR et SHARPE, il nous reste à établir les inégalités de DAVIS.

DEFINITION 2. Pour toute martingale continue X , on note $\langle X,X\rangle$ le processus croissant continu associé et on pose

$$\|X\|_{H^1} = E[\langle X,X\rangle_\infty^{1/2}] \ .$$

On désigne par H_c^1 l'ensemble des martingales continues telles que $\|X\|_{H^1} < \infty$.

Notons que, d'après l'inégalité de SCHWARZ, on a

$$\|X\|_{H^1} \leq E[\langle X,X\rangle_\infty]^{1/2}$$

donc $\|X\|_{H^1} \leq \|X_\infty\|_2$.

PROPOSITION 3. Tout atome continu est dans la boule unité de H_c^1.

Démonstration : Soit a un atome continu, soit T un temps d'arrêt associé. On a $E[\langle a,a\rangle_T] = E[a_T^2] = 0$. Par suite $\langle a,a\rangle_\infty = 0$ si $T = \infty$ et d'après l'inégalité de SCHWARTZ, il vient

$$\|a\|_{H^1} \leq E[\langle a,a\rangle_\infty]^{1/2} P\{T < \infty\}^{1/2}$$

mais $E[\langle a,a\rangle_\infty] = E(a_\infty^2) \leq \dfrac{1}{P\{T<\infty\}^2} P\{T<\infty\} = \dfrac{1}{P\{T<\infty\}}$ d'où le résultat. ∎

PROPOSITION 4 (1ère inégalité de DAVIS). *Pour toute martingale continue*

$$\|X\|_{H^1} \leq 6\|X\|_{\mathcal{H}^1} .$$

Démonstration : Par arrêt on se ramène au cas où X est bornée. Soit $\sum \lambda_n a^n$ une décomposition de X satisfaisant aux conditions (i) et (ii) du théorème 1. La série $\sum \lambda_n a^n$ converge vers X dans $\mathcal{M}^2$, donc aussi dans H^1. Par suite

$$\|X\|_{H^1} \leq \sum |\lambda_i| \|a^i\|_{H^1} \leq \sum |\lambda_i| \leq 6\|X\|_{\mathcal{H}^1} . \blacksquare$$

PROPOSITION 5 (2e inégalité de DAVIS). *Pour toute martingale continue* X *on a*

$$\|X\|_{\mathcal{H}^1} \leq 2\sqrt{2}\,\|X\|_{H^1} .$$

Démonstration : Nous reprenons ici sans démonstration l'inégalité de FEFFERMAN pour H_c^1 et bmo_c^2 (théorème (3.5) de [4]) :

$$|E(X_\infty, Y_\infty)| \leq \sqrt{2}\,\|X\|_{H^1} \|Y\|_{bmo^2} , \quad X \in \mathcal{M}_c^2 , \quad Y \in \mathcal{M}_c^2 .$$

Soit maintenant $X \in \mathcal{M}_c^\infty$ et soit $\ell \in (\mathcal{H}_c^1)'$, de norme 1, tel que $\ell(X) = \|X\|_{\mathcal{H}^1}$. D'après le théorème 2 et le lemme 2, $\ell = \ell_Y$ avec $\|Y\|_{bmo^2} \leq 2$. Il résulte de l'inégalité ci-dessus que

$$\|X\|_{\mathcal{H}^1} \leq 2\sqrt{2}\,\|X\|_{H^1} . \blacksquare$$

§5 - MARTINGALES DYADIQUES. DECOMPOSITION EN ATOMES. DUALITE AVEC BMO .

Lorsque $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_c^1$ (cas brownien), il résulte du théorème 1 que toute martingale de $\mathcal{H}^1$ est décomposable en atomes. Nous allons voir que, dans le cas "dyadique" également, toute martingale de $\mathcal{H}^1$ est décomposable en atomes. Cela n'est pas vrai en général, comme nous le verrons plus loin.

Nous supposons dans ce paragraphe que $\Omega = [0,1]$, que $\mathcal{F}$ est la tribu des ensembles mesurables (au sens de LEBESGUE) de $[0,1]$ et que P est la mesure de LEBESGUE de $[0,1]$. On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les négligeables et les intervalles $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$, $k = 0,1,\ldots,2^n-1$. Pour rester avec les notations des paragraphes précédents, on pose aussi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[t]}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, de sorte qu'une martingale X est telle que $X_t = X_{[t]}$, $\forall t \geq 0$.

La notion suivante nous permettra d'adapter facilement la démonstration du théorème 1 à la situation présente (les difficultés proviennent des sauts de la martingale X : on n'a plus nécessairement $|X_{t\wedge T_p}| \leq 2^p$) .

DEFINITION 3. Pour tout temps d'arrêt discret T (c'est-à-dire ne prenant p.s. que des valeurs entières) on pose

$$\tilde{T} = \text{Ess Sup}\{S : S \text{ temps d'arrêt discret} < T \text{ p.s.}\} .$$

Le temps d'arrêt $\tilde{T}$ est appelé <u>annonceur</u> de T .

Noter que $\tilde{T} < T$ p.s. sur $\{T<\infty\}$. On peut même expliciter $\tilde{T}$ de la manière suivante. Soit G_n le plus petit ensemble de $\mathcal{F}_{n-1}$ qui contienne $\{T = n\}$. Les G_n ne sont pas nécessairement disjoints. Posons

$$G'_1 = G_1 \quad , \quad G'_2 = G_2 \backslash G_1 , \ldots , G'_n = G_n \backslash G_1 \cup \ldots \cup G_{n-1} .$$

Il est alors facile de vérifier que p.s.

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= n-1 \quad \text{sur} \quad G'_n \quad , \quad n = 1,2,\ldots \\ &= +\infty \quad \text{sur} \quad \cup G'_n . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$P\{\tilde{T}<\infty\} \leq \sum P(G_n) \leq 2\sum P\{T=n\} = 2P\{T<\infty\}$$

et nous avons obtenu la proposition suivante.

PROPOSITION 6. Pour tout temps d'arrêt discret T

$$P(\widetilde{T}<\infty) \leq 2P\{T<\infty\} .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le :

THEOREME 3. Dans le cas dyadique

$$\mathcal{H}^1 = \{\sum \lambda_i a^i : a^i \text{ atomes}, \ \lambda_i \text{ scalaires}, \ \sum |\lambda_i| < \infty\}$$

plus précisément pour tout $X \in \mathcal{H}^1$ il existe une suite $(a^n)_{n\geq 0}$ d'atomes et une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ de scalaires telles que

(i) $\forall t \geq 0$, la suite $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_t^i$ converge ponctuellement vers X_t , en restant dominée en module par $2X_t^*$.

(ii) $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| \leq 12\|X\|_{\mathcal{H}^1}$,

et la série $\sum \lambda_i a^i$ converge normalement vers X dans $\mathcal{H}^1$.

Démonstration : Soit $X \in \mathcal{H}^1$; on définit la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ comme pour le théorème 1. On a $\lim_{p\to+\infty} T_p = +\infty$, et aussi $\lim_{p\to+\infty} \widetilde{T}_p = +\infty$, comme on le vérifie aisément. On a donc

$$X_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} (X_{t\wedge\widetilde{T}_{p+1}} - X_{t\wedge\widetilde{T}_p}) .$$

On a aussi $|X_{t\wedge\widetilde{T}_p}| \leq 2^p$ p.s., car $\widetilde{T}_p < T_p$ p.s. sur $\{T_p < \infty\}$. Ces éléments et la proposition 6 permettent de terminer la démonstration comme pour le théorème 1. ∎

Les méthodes du paragraphe précédent permettent de déduire du théorème 3 que, dans le cas particulier dyadique :

$$(\mathcal{H}_1)' = \text{bmo}^1 = \text{bmo}^q , \quad \forall q \in [1,\infty[.$$

Par ailleurs on vérifie facilement que $\text{bmo}^2 = \text{BMO}$.

§6 - MARTINGALES DECOMPOSABLES EN ATOMES : L'ESPACE $\mathcal{H}^1_g$.

DEFINITION 4. Soit $\mathcal{A}^1_g$ l'ensemble des processus croissants A adaptés nuls en 0 , continus à gauche et tels que A_∞ soit intégrable.

Nous désignerons par $\mathcal{H}^1_g$ l'ensemble des martingales X pour lesquelles il existe $A \in \mathcal{A}^1_g$ tel que $\forall t$, $|X_t| \leq A_t$ p. s. . $\mathcal{H}^1_g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}^1$ et

$$\|X\|_{\mathcal{H}^1_g} = \mathrm{Inf}\{\, E(A_\infty) \; : \; A \in \mathcal{A}^1_g \; , \; |X_t| \leq A_t \; , \; \forall t \quad \text{p.s.}\}$$

est une norme qui en fait un espace de Banach (vérification simple).

On a évidemment

$$\|X\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|X\|_{\mathcal{H}^1_g}$$

mais en général ces deux normes ne sont pas équivalentes ; en d'autres termes $\mathcal{H}^1_g$ n'est pas nécessairement fermé dans $\mathcal{H}^1$. En effet, dans l'exemple du paragraphe 2, il est facile de voir que $\mathcal{H}^1 = \mathcal{M}^1$ et $\mathcal{H}^1_g = \mathcal{M}^\infty$. Or en général $\mathcal{M}^\infty \simeq L^\infty_o$ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}^1 \simeq L^1_o$ (le o indique que les fonctions sont de moyenne nulle). ∎

$\mathcal{H}^1_c$ est un sous-espace de $\mathcal{H}^1_g$, car si $X \in \mathcal{H}^1_c$ le processus (X^*_t) est dans $\mathcal{A}^1_g$.

$\mathcal{M}^\infty$ est également un sous-espace de $\mathcal{H}^1_g$, car si $X \in \mathcal{M}^\infty$ $\|X_\infty\|_\infty . 1_{t>0} \in \mathcal{A}^1_g$. On montre aisément, par une technique d'arrêt, que $\mathcal{M}^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}^1_g$ (cela résultera aussi du théorème 4).

Si a est un atome et T un temps d'arrêt associé, le processus $\|a_\infty\|_\infty . 1_{t>T} \in \mathcal{A}^1_g$ et majore $|a|$, donc a est dans la boule unité de $\mathcal{H}^1_g$. La proposition 1 et le corollaire 1 peuvent ainsi être améliorés en remplaçant $\mathcal{H}^1$ par $\mathcal{H}^1_g$, et on a en fait le théorème suivant :

THEOREME 4. $\mathcal{H}^1_g = \{\sum \lambda_n a^n \; : \; a^n$ atomes, λ_n scalaires, $\sum|\lambda_n| < \infty\}$.

Plus précisément, pour toute martingale $X \in \mathcal{H}^1_g$, il existe une suite d'atomes (a^n) et une suite de scalaires (λ_n) telles que

(i) $\forall t \geq 0$, la suite $\sum_0^n \lambda_i a_t^i$ converge ponctuellement vers X_t, en restant dominée en module par $2X_t^*$.

(ii) $\sum_0^\infty |\lambda_i| \leq 12 \|X\|_{\mathcal{H}_g^1}$,

et la série $\sum \lambda_i a^i$ converge normalement vers X dans $\mathcal{H}_g^1$.

Démonstration : Soit $X \in \mathcal{H}_q^1$ et soit $A \in \mathcal{A}_g^1$ majorant $|X|$ et tel que $E(A_\infty) \leq 2\|X\|_{\mathcal{H}_g^1}$. On pose

$$T_p = \inf\{t : A_t > 2^p\} , \ p \in \mathbb{Z} .$$

On a $\lim_{p\to\infty} T_p = +\infty$, $\lim_{p\to-\infty} T_p = T = \inf\{t : A_t > 0\}$ ce qui permet d'écrire

$$X_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} (X_{t\wedge T_{p+1}} - X_{t\wedge T_p}) .$$

On a $A_{T_p} \leq 2^p$ car le processus A est continu à gauche, et par suite $|X_{t\wedge T_p}| \leq 2^p$. La démonstration se termine comme pour le théorème 1, en remplaçant X_∞^* par A_∞. ■

§7 - LE DUAL DE $\mathcal{H}_g^1$ ET bmo^1.

D'après l'exemple du paragraphe 2, il n'est pas question de montrer que $(\mathcal{H}_g^1)' = \mathrm{bmo}^1$! Toutefois, si nous notons $(\mathcal{H}_g^1)'_{m^1}$ le sous-espace de $(\mathcal{H}_g^1)'$ (muni de sa norme de dual) constitué des formes linéaires ℓ pour lesquelles il existe $Y \in \mathcal{M}^1$ (unique) tel que

$$\ell(X) = E(X_\infty Y_\infty) , \quad \forall X \in \mathcal{M}^\infty ,$$

alors on peut énoncer le résultat suivant :

THEOREME 5. Pour tout $Y \in \mathrm{bmo}^1$, il existe une forme linéaire continue ℓ_Y, et une seule, sur $\mathcal{H}_g^1$, telle que

$$\ell_Y(X) = E(X_\infty Y_\infty) , \quad \forall X \in \mathcal{M}^\infty .$$

L'application $Y \to \ell_Y$ ainsi définie est une bijection bicontinue de bmo^1 sur $(\mathcal{H}_g^1)'_{m^1}$.

Démonstration : Elle repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 3. Soit $Y \in \text{bmo}^1$; pour tout $X \in \mathcal{M}^\infty$ on a

$$|E(X_\infty Y_\infty)| \leq 12\|X\|_{\mathcal{H}^1_g} \|Y\|_{\text{bmo}^1} .$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 1, en utilisant cette fois le théorème 4. ∎

LEMME 4. Soit $\ell \in (\mathcal{H}^1_g)'_{m^1}$, représenté par $Y \in \mathcal{M}^1$. Alors $\|Y\|_{\text{bmo}^1} \leq 2\|\ell\|$.

Démonstration : D'après la première inégalité de la proposition 2 du paragraphe 3, on a $\frac{1}{2}\|Y\|_{\text{bmo}^1} \leq \|\ell\|$ (les atomes sont dans la boule unité de $\mathcal{H}^1_g$). ∎

Remarque : Dans le cas discret, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[t]}$, $\forall t \geq 0$, on vérifie facilement que $\mathcal{H}^1_g$ s'identifie à la classe $\mathcal{P}$ définie par GARSIA ([3] page 91). L'exemple du paragraphe 2 montre qu'on n'a pas toujours $(\mathcal{P})' = \text{bmo}^1$, malgré ce qu'affirme un peu rapidement GARSIA dans [3] page 130.

§8 - DECOMPOSITION DE DAVIS : $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1_g + \mathcal{H}^1_v$.

En général $\mathcal{H}^1_g \neq \mathcal{H}^1$, comme nous l'avons vu. Toutefois la décomposition de DAVIS, étendue par MEYER au cas général (voir [5] page 145) permet d'écrire toute martingale de $\mathcal{H}^1$ comme somme d'une martingale de $\mathcal{H}^1_g$ et d'une martingale à variation intégrable, avec de bonnes conditions sur leurs normes. Ce résultat remarquable, combiné avec les résultats du §7 et du §9 nous permettra une nouvelle approche de la dualité $(\mathcal{H}^1, \text{BMO})$, voir §10 .

Pour tout processus cad-lag adapté X on note V_X la variation totale de la trajectoire $t \to X_t$, et on dit que X est à variation intégrable si $E(V_X) < \infty$.

DEFINITION 5. On notera $\mathcal{H}_v^1$ l'ensemble des martingales X à variation intégrable et pour $X \in \mathcal{H}_v^1$ on note :

$$\|X\|_{\mathcal{H}_v'} = E(V_X) .$$

$\mathcal{H}_v^1$ est un espace vectoriel normé (complet) et on a

$$\mathcal{H}_v^1 \subset \mathcal{H}^1 \quad \text{et} \quad \|X\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|X\|_{\mathcal{H}_v^1} .$$

THEOREME 6 (Décomposition de DAVIS). $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_g^1 + \mathcal{H}_v^1$. Plus précisément pour toute martingale $X \in \mathcal{H}^1$, il existe deux martingales $Y \in \mathcal{H}_g^1$ et $Z \in \mathcal{H}_v^1$ telles que

i) $X = Y+Z$

ii) $\|Y\|_{\mathcal{H}_g^1} \leq 17\|X\|_{\mathcal{H}^1}$

iii) $\|Z\|_{\mathcal{H}_v^1} \leq 8\|X\|_{\mathcal{H}^1}$.

Démonstration : Soit $X \in \mathcal{H}^1$. Posons :

$$Q_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s \cdot 1_{\{X_t^* > 2X_{t-}^*\}} .$$

On définit ainsi un processus adapté cad-lag. Du fait que $X_t^* > 2X_{t-}^*$ entraîne $X_t^* < 2(X_t^* - X_{t-}^*)$ et $(\Delta X_t) \leq 4(X_t^* - X_{t-}^*)$, il vient $V_Q \leq 4X_\infty^*$ et donc $E(V_Q) \leq 4\|X\|_{\mathcal{H}^1}$. Notons alors (Z_t) la martingale compensée de (Q_t) : $Z = Q - \tilde{Q}$, où $\tilde{Q}$ est le processus prévisible, à variation finie, nul en 0 tel que $Q - \tilde{Q}$ soit une martingale. On a $E(V_{\tilde{Q}}) \leq E(V_Q)$, donc $Z \in \mathcal{H}_v^1$ et $\|Z\|_{\mathcal{H}_v^1} \leq 8\|X\|_{\mathcal{H}^1}$.

Posons maintenant $Y = X-Z$. L'argument de MEYER ([6] page 145) convenablement adapté (la décomposition de DAVIS de MEYER n'est pas tout à fait la notre !) montre que $|\Delta Y_t| \leq 8X_{t-}^*$. Mais

$$E(Y_\infty^*) = \|Y\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|X\|_{\mathcal{H}^1} + \|Z\|_{\mathcal{H}^1} \leq 9\|X\|_{\mathcal{H}^1} .$$

Donc de $|Y_t| \leq |Y_{t-}| + |\Delta Y_t| \leq Y_{t-}^* + 8X_{t-}^*$ on déduit que $\|Y\|_{\mathcal{H}_v^1} \leq 17\|X\|_{\mathcal{H}^1}$. ∎

Remarque : La décomposition faite dans la démonstration précédente est telle que si on suppose $X \in \mathcal{M}^\infty$, alors Y et $Z \in \mathcal{M}^2$. (En effet, $X \in \mathcal{M}^\infty$ implique Q bornée, puisque $V_Q \leq 4X^*_\infty$, donc $\widetilde{Q}_\infty \in L^2$, et donc Z, puis $Y = X-Z$, sont dans $\mathcal{M}^2$).

§9 - LE DUAL DE $\mathcal{H}^1_v$ ET bj .

Dans ce paragraphe, nous caractérisons une partie "raisonnable" du dual de $\mathcal{H}^1_v$, ce qui, grâce aux deux paragraphes précédentes, nous fournira la dualité $(\mathcal{H}^1, BMO)$.

DEFINITION 6. On dira qu'une martingale X est dans bj (à sauts bornés) si la quantité $\|X\|_{bj}$ définie par

$$\|X\|_{bj} = \operatorname{Sup}\{\|\Delta X_T . I_{\{0<T<\infty\}}\|_\infty \ ; \ T \text{ temps d'arrêt}\}$$

est finie. bj est un espace vectoriel, et $\|X\|_{bj}$ est une semi-norme sur cet espace vectoriel.

Nous noterons $(\mathcal{H}^1_v)'_{m^2}$ le sous-espace de $(\mathcal{H}^1_v)'$ constitué des formes linéaires ℓ pour lesquelles il existe $Y \in \mathcal{M}^2$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{H}^1_v \cap \mathcal{M}^2 \quad , \quad \ell(X) = E(X_\infty Y_\infty) .$$

On a alors le théorème suivant :

THEOREME 7. Pour tout $Y \in bj \cap \mathcal{M}^2$, il existe une forme linéaire continue unique ℓ_Y sur $\mathcal{H}^1_v$ telle que

$$\forall X \in \mathcal{H}^1_v \cap \mathcal{M}^2 \quad , \quad \ell_Y(X) = E(X_\infty Y_\infty) .$$

De plus l'application $Y \to \ell_Y$ a pour image $(\mathcal{H}^1_v)'_{m^2}$ et on a :

$$\frac{1}{2}\|Y\|_{bj} \leq \|\ell_Y\|_{(\mathcal{H}^1_v)'} \leq \|Y\|_{bj} .$$

Attention : $Y \to \ell_Y$ n'est en général pas injective, de même que $\|Y\|_{bj}$ n'est en général pas une norme.

Pourtant dans le cas discret, on a injectivité, et on peut même vérifier facilement que $(\mathcal{H}^1_v)' = bj$, $\ell_Y(X)$ se définissant quelque soit Y dans bj et X dans $\mathcal{H}^1_v$ par

$$\ell_Y(X) = E(\sum_{\Delta} \Delta X_s . \Delta Y_s) \ .$$

D. LEPINGLE nous a signalé que ce résultat s'apparentait à un résultat de HERZ de [5] , énoncé sous la forme : "le dual de AM est BD" .

La démonstration du théorème 7 résulte immédiatement des trois lemmes suivants :

LEMME 5 $(\mathcal{H}^1_v) \cap \mathcal{M}^2$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{H}^1_v$.

Démonstration : D'après MEYER [7] IV.8, il suffit de montrer que si $X \in \mathcal{H}^1_v$ et si T réduit fortement X , alors X^T peut être approchée dans $\mathcal{H}^1_v$ par une suite d'éléments de $\mathcal{H}^1_v \cap \mathcal{M}^2$. Notons U la martingale compensée du processus X^{T^-} (défini par $X^{T^-}_t = X_t$ si $t < T$, $X^{T^-}_t = X_{T^-}$ si $t \geq T$) et V la martingale compensée du processus $(\Delta X_T).1_{t\geq T}$. On a bien sûr :

$$X = U + V \ .$$

Mais $U \in \mathcal{M}^2 \cap \mathcal{H}^1_v$ puisque X^{T^-} est borné et à variation intégrable. Il suffit donc d'approcher V :

Soit Z_n une suite de v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurables bornées convergeant vers ΔX_T dans L^1 et soit V_n la compensée du processus $Z_n . 1_{t\geq T}$. On a bien $V_n \in \mathcal{M}^2 \cap \mathcal{H}^1_v$ et $V_n \to V$ dans $\mathcal{H}^1_v$. ∎

LEMME 6. <u>Si</u> $X \in \mathcal{H}^1_v \cap \mathcal{M}^2$ <u>et</u> $Y \in bj \cap \mathcal{M}^2$, <u>on a</u>

$$|E(X_\infty Y_\infty)| \leq \|X\|_{\mathcal{H}^1_v} \|Y\|_{bj} \ .$$

Démonstration : X étant à variation intégrable, on a

$$E(X_\infty Y_\infty) = E(\sum_t (\Delta X_t \cdot \Delta Y_t)$$

d'où le résultat.

LEMME 7. Soit $Y \in \mathcal{M}^2$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{H}^1_V \cap \mathcal{M}^2 \ , \ |E(X_\infty Y_\infty)| \leq \|X\|_{\mathcal{H}^1_V} .$$

Alors $Y \in bj$ et $\|Y\|_{bj} \leq 2$.

Démonstration : Nous allons utiliser un argument de MEYER [7] . Il s'agit de voir que, pour tout temps d'arrêt T , $\|\Delta Y_T\|_\infty \leq 2$ (rappelons que $Y_{0-} = 0$) , ou encore que

$$E(\Phi \Delta Y_T) \leq 2$$

pour toute variable Φ bornée, $\mathcal{F}_T$-mesurable, telle que $\|\Phi\|_1 \leq 1$. Envisageons le processus $\Phi_t = \Phi I_{t \geq T}$, puis le processus prévisible, à variation intégrable, $(\tilde{\Phi}_t)$ tel que $X_t = \Phi_t - \tilde{\Phi}_t$ soit une martingale (on suppose aussi que $\tilde{\Phi}_0 = 0$) . Comme Φ est bornée, $X \in \mathcal{M}^2$. On a aussi $\|X\|_V \leq 2\|\Phi\|_1$ et par suite $\|X\|_{\mathcal{H}^1} \leq 2$. D'après [7] II.9, on a $E(\Delta X_T \Delta Y_T) = E(X_\infty Y_\infty)$. Si T est totalement inaccessible, $(\tilde{\Phi}_t)$ est continu et $\Delta X_T = \Phi$, donc par hypothèse

$$|E(\Phi \Delta Y_T)| \leq \|X\|_{\mathcal{H}^1} \leq 2 .$$

Si T est prévisible, $\tilde{\Phi}_t = E(\Phi | \mathcal{F}_{T-}) I_{t \geq T}$ et $\Delta X_T = \Phi - E[\Phi | \mathcal{F}_{T-}]$, et on a encore $E(\Delta X_T \Delta Y_T) = E(\Phi \Delta Y_T)$, d'où la même conclusion. ∎

§10 - LE DUAL DE $\mathcal{H}^1$ EST BMO .

DEFINITION 7. BMO est l'ensemble des $X \in \mathcal{M}^1$ telles que $\|X\|_{BMO} < \infty$, où

$$\|X\|_{BMO} = \text{Sup}\{\|X_\infty - X_{T-}\|_2 \cdot \frac{1}{P(T<\infty)^{1/2}} \ ; \ T \text{ temps d'arrêt}\} .$$

Cette définition de BMO est équivalente à celle de MEYER ([6] page 333), d'après les remarques qui suivent cette définition. Toujours d'après ces remarques on a

$$\mathrm{BMO} = \mathrm{bmo}^2 \cap \mathrm{bj}$$

$$\mathrm{Sup}\{\|X\|_{\mathrm{bmo}^2}, \|X\|_{\mathrm{bj}}\} \leq \|X\|_{\mathrm{BMO}} \leq \|X\|_{\mathrm{bmo}^2} + \|X\|_{\mathrm{bj}} .$$

THEOREME 8. Le dual de $\mathcal{H}^1$ est BMO . Plus précisément, pour tout $Y \in \mathrm{BMO}$, il existe un élément unique ℓ_Y de $(\mathcal{H}^1)'$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{M}^\infty \ , \ \ell_Y(X) = E(X_\infty Y_\infty)$$

et l'application $Y \to \ell_Y$ ainsi définie est une bijection bicontinue de BMO sur $(\mathcal{H}^1)'$.

La démonstration découle immédiatement des trois lemmes suivants :

LEMME 8. $\mathcal{M}^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}^1$.

Démonstration : On peut soit adapter l'argument de MEYER ([7] , page 339) à notre définition de $\mathcal{H}^1$, soit utiliser la décomposition de DAVIS du §8 , la densité de $\mathcal{M}^\infty$ dans $\mathcal{H}^1_g$, et la densité de $\mathcal{H}^1_v \cap \mathcal{M}^2$ dans $\mathcal{H}^1_v$.

LEMME 9 (Inégalité de FEFFERMAN). Soient $X \in \mathcal{M}^\infty$, $Y \in \mathrm{BMO}$. On a :

$$|E(X_\infty Y_\infty)| \leq 212 \|X\|_{\mathcal{H}^1} \|Y\|_{\mathrm{BMO}} .$$

Démonstration : immédiate après le lemme 3, le lemme 6, le théorème 6 et la remarque qui le suit (et $12 \times 17 + 8 = 212$...) .

LEMME 10. Soit $Y \in \mathcal{M}^2$ telle que

$$\forall X \in \mathcal{M}^2 \ , \ |E(X_\infty Y_\infty)| \leq \|X\|_{\mathcal{H}^1} .$$

Alors $Y \in \mathrm{BMO}$ et $\|Y\|_{\mathrm{BMO}} \leq 4$.

Démonstration : On a $\|Y\|_{\mathrm{bmo}^2} \leq 2$ d'après l'argument du lemme 2, et $\|Y\|_{bj} \le 2$ d'après le lemme 7. D'où le résultat.

§11 - INEGALITES DE DAVIS.

Avant d'en venir aux inégalités de DAVIS, rappelons la définition de MEYER de l'espace H^1 .

DEFINITION 8. Pour toute martingale X on pose

$$[X,X]_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \sum_{s\le t} (\Delta X_s)^2 ,$$

où X^c désigne la partie martingale locale continue de X ,

$$\|X\|_{H^1} = E([X,X]_\infty^{1/2}) .$$

H^1 est l'espace des martingales X telles que $\|X\|_{H^1} < \infty$.

H^1 est un espace vectoriel normé, admettant $\mathcal{M}^\infty$ comme sous-espace dense ([7], V.12) . Noter que $X_t^2 - [X,X]_t$ est une martingale si $X \in \mathcal{M}^2$ et que par suite $\|X\|_{H^1} \le \|X_\infty\|_2$, comme dans le cas continu. Noter aussi que $\|X\|_{H^1} \le \|X\|_V$, car si $\|X\|_V < \infty$, alors $X^c = 0$ et

$$[X,X]_\infty = \Sigma (\Delta X_s)^2 \le (\Sigma |\Delta X_s|)^2 .$$

PROPOSITION 7. <u>Tout atome est dans la boule unité de</u> H^1 .

<u>Démonstration</u> : C'est celle de la proposition 3, à condition de remplacer $\langle a,a\rangle$ par $[a,a]$. ∎

PROPOSITION 8. (1ère inégalité de DAVIS). <u>Pour toute martingale</u> X <u>on a</u>

$$\|X\|_{H^1} \le 212\,\|X\|_{\mathcal{H}^1} .$$

Démonstration : $\mathcal{M}^{\infty}$ étant dense dans H^1 et dans $\mathcal{H}^1$, on peut supposer que X est bornée. Soit (Y,Z) la décomposition de DAVIS de X. Y admet une décomposition atomique $\sum\lambda_i a^i$ satisfaisant aux conditions (i) et (ii) du théorème 4. D'après le théorème de convergence dominée, $\sum\lambda_i a^i$ converge vers Y dans $\mathcal{M}^2$, donc aussi dans H^1. Par suite,

$$\|Y\|_{H^1} \le \sum |\lambda_i| \, \|a^i\|_{H^1} \le \sum|\lambda_i| \le 12\|P\|_{\mathcal{H}^1_g} \le 12\times 17\,\|X\|_{\mathcal{H}^1} .$$

D'autre part

$$\|Z\|_{H^1} \le \|Z\|_{\mathcal{H}^1_v} \le 8\,\|X\|_{\mathcal{H}^1} .$$

D'où le résultat.

PROPOSITION 9. (2e inégalité de DAVIS). Pour toute martingale X on a

$$\|X\|_{\mathcal{H}^1} \le 4\sqrt{2}\,\|X\|_{H^1} .$$

Démonstration : On reprend l'inégalité de FEFFERMAN pour H^1 et BMO ([7] V.9) et on raisonne comme pour la proposition 5, en utilisant cette fois le théorème 7 et le lemme 7. ∎

REFERENCES

[1] R.R. COIFMAN - A real variable characterization of H^p . Studia Mathematica, T. LI , (1974) pp.

[2] B. DAVIS - On the integrability of the martingale square function. Israel J.M. 8, 187-190. (1970).

[3] A. GARSIA - Martingale Inequalities. Seminar Notes on Recent Progress, Benjamin (1973).

[4] R.K. GETOOR - M.J. SHARPE - Conformal martingales. Invent. Math. 16, 271-308 (1972).

[5] C. HERZ - Bounded mean oscillation and regulated martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 193, n°6 (1974).

[6] P.A. MEYER - Le dual de "H^1" est "BMO" . Séminaire de probabilités VII, Lecture Notes in Mathematics 321, Springer (1973).

[7] P.A. MEYER - Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer (1976).

Septembre 1976

A. BERNARD, Institut Fourier, BP 116, 38402 ST MARTIN D'HERES

B. MAISONNEUVE, I.M.S.S. Université II, 47X - 38040 GRENOBLE Cedex.