

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ ZANZOTTO

**Sur l'existence d'un noyau induisant un opérateur
sous markovien donné**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 298-302

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__298_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'EXISTENCE D'UN NOYAU INDUISANT

UN OPERATEUR SOUS-MARKOVIENT DONNE

(P.A. Zanzotto)

Etant donné un couple d'espaces probabilisés $(E, \underline{E}, \lambda)$, (F, \underline{F}, μ) , on énonce des conditions suffisantes pour que tout opérateur sous-markovien appliquant $L^\infty(\mu)$ dans $L^\infty(\lambda)$ soit induit, au sens de [2], par un noyau sous-markovien (ou sous-probabilité de transition).

L'intérêt (et peut-être la nouveauté) de ces conditions réside dans le fait qu'elles n'imposent aucune espèce de séparabilité à la tribu \underline{F} . En revanche, elles imposent à la mesure λ d'être complète (ou, plus généralement, telle que l'espace $L^\infty(\lambda)$ admette un relèvement linéaire).

Les notations et la terminologie sont essentiellement celles de [3]. Si (E, \underline{E}) est un espace mesurable, on désigne par $B(\underline{E})$ l'espace des fonctions (réelles) mesurables et bornées sur (E, \underline{E}) . Un noyau sous-markovien N relatif au couple d'espaces mesurables (E, \underline{E}) , (F, \underline{F}) est le plus souvent identifié à une application de $B(\underline{F})$ dans $B(\underline{E})$. De même un opérateur sous-markovien M relatif au couple d'espaces probabilisés $(E, \underline{E}, \lambda)$, (F, \underline{F}, μ) est considéré comme une application de $L^\infty(\mu)$ dans $L^\infty(\lambda)$. On dit que l'opérateur M est induit par le noyau N si, pour tout élément f de $B(\underline{F})$, la classe d'équivalence déterminée par Nf dans $L^\infty(\lambda)$ coïncide avec l'image par M de la classe d'équivalence déterminée par f dans $L^\infty(\mu)$. Cette condition se traduit par la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\lambda) & \xleftarrow{p} & B(\underline{E}) \\ \uparrow M & & \uparrow N \\ L^\infty(\mu) & \xleftarrow{q} & B(\underline{F}) \end{array}$$

où p, q désignent les projections canoniques de $B(\underline{E})$, $B(\underline{F})$ sur leurs quotients respectifs $L^\infty(\lambda)$, $L^\infty(\mu)$.

Soit en particulier F un espace topologique séparé, et \underline{F} sa tribu borélienne: un

noyau N relatif au couple $(E, \underline{E}), (F, \underline{F})$ est alors dit tendu si, pour tout élément x de E , la mesure $N(x, \cdot)$ est tendue (c.-à-d. intérieurement régulière par rapport au pavage des ensembles compacts de F).

Une application linéaire croissante r de $L^\infty(\lambda)$ dans $B(\underline{E})$, telle que l'on ait $r(1)=1$ et que $p \circ r$ coïncide avec l'application identique de $L^\infty(\lambda)$, est appelée un relèvement linéaire de $L^\infty(\lambda)$ dans $B(\underline{E})$. Pour qu'il existe de telles applications, il suffit que la mesure λ soit complète (cf. [1]).

THEOREME 1. Soit M un opérateur sous-markovien relatif au couple d'espaces probabilisés $(E, \underline{E}, \lambda), (F, \underline{F}, \mu)$. Pour qu'il existe un noyau N induisant l'opérateur M , il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

- (a) Il existe un relèvement linéaire r de $L^\infty(\lambda)$ dans $B(\underline{E})$.
- (b) Il existe sur F une topologie séparée, localement compacte, telle que \underline{F} coïncide avec la tribu borélienne et que la mesure μ soit tendue.

De façon plus précise, si ces deux conditions sont remplies, et si l'on pose

$$(1) \quad L = r \circ M \circ q$$

(où q désigne la projection canonique de $B(\underline{F})$ sur $L^\infty(\mu)$), il existe un noyau tendu N (unique) tel que l'on ait

$$(2) \quad Nf = Lf \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } C_c(F),$$

$$(3) \quad Nf \sim Lf \pmod{\lambda} \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } B(\underline{F}).$$

DEMONSTRATION. Pour tout élément x de E , considérons sur F la mesure de Radon (positive et de masse totale inférieure ou égale à 1) $f \mapsto (Lf)(x)$, et désignons par ν_x la mesure de Borel tendue qui lui est associée. On a donc, par définition,

$$(Lf)(x) = \int f d\nu_x$$

pour tout élément f de $C_c(F)$.

Posons ensuite

$$(Nf)(x) = \int f d\nu_x$$

pour tout élément f de $B(\underline{F})$. Le noyau tendu N ainsi obtenu vérifie la condition (2) par définition. Montrons qu'il vérifie aussi la condition (3). Remarquons à cet effet que, si (f_n) est une suite monotone, uniformément bornée, d'éléments de $B(\underline{F})$,

on a

$$N(\lim_n f_n) = \lim_n Nf_n, \quad L(\lim_n f_n) \sim \lim_n Lf_n \pmod{\lambda}.$$

Ceci montre que l'espace vectoriel \underline{M} constitué par les éléments f de $B(\underline{F})$ possédant la propriété $Nf \sim Lf \pmod{\lambda}$ est stable par convergence monotone bornée.

D'autre part \underline{M} contient $C_c(F)$, car N coïncide avec L sur $C_c(F)$. Il suffit donc de prouver que \underline{M} contient toute fonction positive bornée semi-continue inférieurement sur F . Or, si f est une telle fonction, et si l'on pose

$$H = \{ g: g \in C_c(F), \quad 0 \leq g \leq f \},$$

on a

$$\int f d\mu = \sup_{g \in H} \int g d\mu,$$

de sorte qu'il existe une suite croissante (g_n) d'éléments de H , telle que l'on ait

$$\int f d\mu = \sup_n \int g_n d\mu,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \quad f \sim \sup_n g_n \pmod{\mu}.$$

Pour tout élément g de H on a alors

$$g \leq \sup_n g_n \quad \mu\text{-p.p.},$$

et par conséquent

$$Lg \leq L(\sup_n g_n) \quad \text{partout.}$$

Il en résulte

$$\sup_{g \in H} Lg \leq L(\sup_n g_n) \sim \sup_n Lg_n \leq \sup_{g \in H} Lg,$$

de sorte que les deux fonctions $\sup_{g \in H} Lg$ et $L(\sup_n g_n)$ sont équivalentes $\pmod{\lambda}$.

On a alors (compte tenu du fait que N est tendu)

$$Nf = \sup_{g \in H} Ng = \sup_{g \in H} Lg \sim L(\sup_n g_n) = Lf,$$

où la dernière égalité découle de (4) et de la définition de L .

La fonction f appartient donc à \underline{M} , ce qui achève la démonstration.

THEOREME 2. Soit M un opérateur sous-markovien relatif au couples d'espaces probabilisés $(E, \underline{E}, \lambda)$, (F, \underline{F}, μ) . Pour qu'il existe un noyau N induisant l'opérateur M ,

il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

- (a) Il existe un relèvement linéaire r de $L^\infty(\lambda)$ dans $B(\underline{E})$.
- (b) Il existe sur F une topologie séparée, localement compacte, telle que \underline{F} coïncide avec la tribu de Baire et que F soit une réunion dénombrable d'ensembles compacts.

De façon plus précise, si ces deux conditions sont remplies, il existe un noyau N (unique) vérifiant les relations (2) et (3) (où L est définie par (1)).

DEMONSTRATION. Exactement comme dans la première partie de la démonstration précédente, après avoir défini le noyau N (en remplaçant la locution "mesure de Borel tendue" par "mesure de Baire"), on remarque que l'espace vectoriel

$$\underline{M} = \{ f: f \in B(\underline{F}), Nf \sim Lf \pmod{\lambda} \}$$

contient $C_c(F)$ et est stable par convergence monotone bornée. Il en résulte que \underline{M} contient toute fonction continue bornée positive (car une telle fonction est, dans nos hypothèses, l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions continues à support compact), de sorte que \underline{M} coïncide avec $B(\underline{F})$.

THEOREME 3. Soit M un opérateur sous-markovien relatif au couple d'espaces probabilisés $(E, \underline{E}, \lambda), (F, \underline{F}, \mu)$. Pour qu'il existe un noyau tendu N induisant l'opérateur M , il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

- (a) Il existe un relèvement linéaire r de $L^\infty(\lambda)$ dans $B(\underline{E})$.
- (b) Il existe sur F une topologie séparée, telle que \underline{F} coïncide avec la tribu borélienne et que la mesure μ soit tendue.

DEMONSTRATION. Le théorème a déjà été démontré dans le cas particulier où l'espace F est compact (voir théorème 1). Dans le cas général, considérons une suite croissante (F_n) d'ensembles compacts de F , telle que la mesure μ soit portée par $\bigcup_n F_n$. Pour tout n , désignons par μ_n la restriction de μ à la tribu borélienne \underline{F}_n de F_n . A tout élément f de $L^\infty(\mu_n)$ associons l'élément de $L^\infty(\mu)$ déterminé par la fonction qui coïncide avec f sur F_n et qui est nulle sur $F \setminus F_n$. On obtient ainsi une immersion de $L^\infty(\mu_n)$ dans $L^\infty(\mu)$. Si on compose cette immersion avec l'opérateur M , on obtient un opérateur sous-markovien M_n appliquant $L^\infty(\mu_n)$ dans $L^\infty(\lambda)$.

Posons maintenant

$$(5) \quad L_n = r \circ M_n \circ q_n,$$

où q_n désigne la projection canonique de $B(\underline{F}_n)$ sur $L^\infty(\mu_n)$. Il existe alors, d'après le théorème 1, un noyau sous-markovien tendu N_n , appliquant $B(\underline{F}_n)$ dans $B(\underline{E})$, tel que l'on ait

$$(6) \quad N_n f = L_n f \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } C(\underline{F}_n),$$

$$(7) \quad N_n f \sim L_n f \pmod{\lambda} \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } B(\underline{F}_n).$$

Désignons par R_n le noyau qui à tout élément f de $B(\underline{F})$ associe sa restriction à \underline{F}_n . Pour tout élément positif f de $B(\underline{F})$ on a alors

$$M_n q_n R_n f \leq M_{n+1} q_{n+1} R_{n+1} f$$

et par conséquent, en appliquant r aux deux membres (et en tenant compte de (5)),

$$L_n R_n f \leq L_{n+1} R_{n+1} f.$$

Si la restriction de f à \underline{F}_{n+1} est continue, cette dernière inégalité s'écrit aussi, grâce à (6),

$$(8) \quad N_n R_n f \leq N_{n+1} R_{n+1} f.$$

Or, si on considère le noyau composé $N_n R_n$, on voit que, pour tout élément x de \underline{E} , $N_n R_n(x, \cdot)$ est une mesure de Borel tendue sur l'espace \underline{F} , portée par l'ensemble compact \underline{F}_n . Par conséquent la relation (8) (valable pour toute fonction f positive dont la restriction à \underline{F}_{n+1} est continue) entraîne l'inégalité entre noyaux

$$N_n R_n \leq N_{n+1} R_{n+1}.$$

Désignons alors par N le noyau $\sup_n N_n R_n$ (qui est encore tendu). Pour tout élément positif f de $B(\underline{F})$ et pour tout n , on a, d'après (7),

$$N_n R_n f \sim L_n R_n f = r M_n q_n R_n f \pmod{\lambda}.$$

Il en résulte, par passage à la limite, $N f \sim r M q f \pmod{\lambda}$, où q désigne la projection canonique de $B(\underline{F})$ sur $L^\infty(\mu)$. Cela montre que l'opérateur sous-markovien M est induit par le noyau N .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. and C. IONESCU TULCEA, Topics in the theory of Lifting. Springer (1970).
- [2] J. NEVEU, Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et C^{ie} (1970).
- [3] P.A. ZANZOTTO, Nuclei ed operatori markoviani. Rend. Sem. Mat. Padova, 51 (1974).