Marc Yor

Sur les théories du filtrage et de la prédiction

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 257-297
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__257_0>

Université de Strasbourg 1975/76

Séminaire de Probabilités

SUR LES THEORIES DU FILTRAGE ET DE LA PREDICTION.

par

Marc YOR

INTRODUCTION :

Il est possible d'entreprendre, dans de nombreuses situations en théorie des processus de Markov, la construction d'un processus de filtrage $(\pi_t, t \geq 0)$ du processus de Markov $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P_x)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ par rapport aux tribus $\bar{\underline{\underline{F}}}{}_t^\circ = \sigma(Y_s, s \leq t)$ d'un second processus $(Y_t, t \geq 0)$, comme processus de Markov à valeurs dans l'espace S des probabilités sur $(E, \mathcal{E})$, augmenté de la mesure nulle.

Le processus π_t - ou plus précisément $(\pi_t^\nu, t \geq 0, \nu \in S)$ est - en "première approximation" - obtenu au moyen de l'égalité :

$$(*) \qquad \begin{array}{l} \forall\, f \in b(\mathcal{E}) \\ \forall\, \nu \in S \end{array} \quad , \ \pi_t^\nu(f) = E_\nu[f(X_t) | \bar{\underline{\underline{F}}}{}_{t^+}^\circ] \, P_\nu \, ps \ .$$

On a voulu donner un cadre général qui permette de synthétiser ces différentes situations et constructions : Le cadre retenu ici, qui englobe - à notre connaissance - tous ceux des études de filtrage markovien faites jusqu'à présent est la donnée de $\underline{X} = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, (X_t, Y_t)_{t \geq 0}, \theta_t, P_x)$ où $X = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, (X_t)_{t \geq 0}, \theta_t, P_x)$ est un processus fortement markovien, et $(Y_t)_{t \geq 0}$ une fonctionnelle additive, non adaptée aux tribus de X

(en général), non forcément positive, faisant de $\underline{X}$ un processus à accroissements semi-markoviens ([1] ou [6]).

On définit également un noyau multiplicatif q de X par rapport à $\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty}$ (voir [7] et [11] ; toutefois, le présent travail ne satisfait pas aux hypothèses de ces articles), à valeurs dans S , et vérifiant :

$$(**) \qquad \begin{matrix} \forall\, f \in b(\mathcal{E}) \\ \\ \forall\, \nu \in S \end{matrix} \quad , \quad q_t^{\nu}(\omega,f) = E_{\nu}[f(X_t)/\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty}]\; P_{\nu}\,\text{ps} .$$

On montre, en particulier, dans le cadre décrit ci-dessus que le processus de filtrage $(\pi_t^{\nu}, t \geq 0)$ et le noyau multiplicatif $(q_t^{\nu}, t \geq 0)$ ne sont indistinguables pour toute mesure $\nu \in S$ que si $Y = (\Omega, \mathcal{F}_{\infty}, \mathcal{F}_t, (X_t, t \geq 0), P_{\nu})$ est un processus à accroissements indépendants, inhomogène (1), situation qui correspond (2) aux hypothèses initiales des études de Jacod [7] et Meyer [11].

A l'aide de la théorie de la prédiction de F. Knight ([8],[12]), on obtient aisément au paragraphe 1 la construction du processus de filtrage en question, étudié au paragraphe 2 dans le cadre markovien décrit précédemment. Enfin, le paragraphe 3 est consacré à l'étude du processus de filtrage obtenu en prenant pour X le mouvement brownien à d dimensions, et pour Y la norme de X (c'est-à-dire le processus de Bessel associé) (3).

L'utilisation présente de la théorie de la prédiction, loin d'être artificielle, peut s'expliquer par le fait qu'elle intervient de façon importante – sous une forme cachée et très simplifiée – dans l'étude des représentations

---

(1) Noter ici que la situation n'est pas habituelle, puisque les probabilités P_{ν} sous lesquelles on étudie Y sont indexées par S , ensemble de mesures sur l'espace d'états de X .

(2) Voir <u>2-3</u> pour cette correspondance.

(3) La fonctionnelle additive $\hat{Y}_t = \int_0^t Y_s\,ds$ et le processus $Y_t = |X_t|$ engendrent la même filtration.

markoviennes en filtrage linéaire ([14]). Remarquons également une autre parenté entre processus de filtrage et processus de prédiction qui permet d'éclairer cette étude : la construction de processus de filtrage apparaît comme une étape intermédiaire entre celle des processus de Markov habituels et celle de F. Knight dans le procédé de grossissement de l'espace d'états en vue de l'obtention d'un processus de Markov (il faut prendre ici le processus Y comme donnée initiale : il vérifie une <<propriété de Markov>> qui fait intervenir X , ce qui oblige à augmenter l'espace d'états de Y pour pouvoir le considérer comme processus de Markov).

0. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES.

Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ espace mesurable et $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ filtration croissante et continue à droite de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

- Si $\mu\in\mathcal{M}_+^1(\Omega,\mathcal{F})$, on note $\mathcal{F}_t^\mu = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}^\mu$, où $\mathcal{N}^\mu$ est la classe des ensembles μ-négligeables de $\mathcal{F}$, puis $\mathcal{F}_t^* = \bigcap_{\mu\in\mathcal{M}_+^1(\Omega,\mathcal{F})} \mathcal{F}_t^\mu$.

- $\mathcal{I}^\mu$ est la classe des processus, définis sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, μ indistinguables de 0 ; si H et K sont deux processus μ indistinguables $(H-K\in\mathcal{I}^\mu)$, on note $H_t \underset{\mu}{=} K_t$.

On a souvent besoin, dans ce travail, de la notion d'espace mesurable lusinien : on rappelle que l'espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ est lusinien si E est un borélien d'un espace métrique compact $\hat{E}$, tel que $\mathcal{E}$ soit la trace de la tribu borélienne de $\hat{E}$ sur E . En fait, d'après [2] (page 248), il existe une topologie $\mathcal{T}$ (1) compacte, métrisable, sur E , pour laquelle $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne. On fixe désormais une telle topologie $\mathcal{T}$, ce qui permet de munir $M_E = \mathcal{M}_+^1(E,\mathcal{E}) \cup \{0\}$ de la topologie correspondante de la convergence étroite. Il est clair que la tribu borélienne sur M_E est

$$\mathcal{M}_E = \sigma\{\nu \to <\nu, g>; \ g\in b(\mathcal{E})\}$$

(1) qui n'est, en général, pas "naturelle".

et ne dépend donc pas du choix de $\mathcal{J}$. On note $M_E^1 = \mathcal{M}_+^1(E,\mathcal{E})$.

Les propositions suivantes sont une première étape de la construction des différents opérateurs de projection qui interviennent dans les théories du filtrage et de la prédiction :

PROPOSITION 1. - Soit μ probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$, et X processus mesurable à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ espace mesurable lusinien.

Il existe un noyau $\pi_t(\omega;dy)$ de $(E,\mathcal{E})$ dans $(R_+ \times \Omega, \mathcal{O})$ - où $\mathcal{O}$ est la tribu optionnelle sur $R_+ \times \Omega$ - à valeurs dans M_E tel que :

1) pour tout $f \in b(\mathcal{E})$, $\pi_t(\cdot,f)$ est une μ-projection optionnelle de $f \circ X_t$ par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

2) si X est continu à droite (resp : continu à droite et limité à gauche), le processus $\pi_t(\omega,dy)$ est μp.s. étroitement continu à droite (resp : continu à droite et limité à gauche).

Démonstration : A tout $f \in b(\mathcal{E})$, on associe une $(\mathcal{F}_t,\mu)$ projection optionnelle $\tilde{\pi}_f(t,\omega)$ de $f \circ X_t$. Dans le langage de [4], l'application $f \to \tilde{\pi}_f(t,\omega)$ est $\mathcal{J}^\mu$ presque linéaire, et $\mathcal{J}^\mu$ presque positive.
De plus, si $f_n \in b_+(\mathcal{E})$, $f_n \uparrow f \in b_+(\mathcal{E})$, on peut donc définir $g(t,\omega)$ comme

$\lim_n \uparrow \tilde{\pi}_{f_n}(t,\omega)$ si cette limite existe (elle existe $\mathcal{J}^\mu$ps) , et 0 ailleurs. On a alors, pour tout temps d'arrêt T ,

$$E[g_T \, 1_{(T<\infty)}] = \lim_n \uparrow E[\tilde{\pi}_{f_n}(T) \, 1_{(T<\infty)}] = \lim_n \uparrow E[f_n \circ X_T \, 1_{T<\infty}]$$

$$= E[f \circ X_T \, 1_{(T<\infty)}] \text{ . } \quad (E \text{ est l'espérance relative à } \mu).$$

D'après le théorème de section optionnel, on a $g = \tilde{\pi}_f$ $\mathcal{J}^\mu$ps , et donc : $\tilde{\pi}_f = \lim_n \uparrow \tilde{\pi}_{f_n}$ $\mathcal{J}^\mu$ps . D'après le théorème de régularisation des presque noyaux [4], il existe donc un noyau $\pi_t(\omega,dy)$ de $(E,\mathcal{E})$ dans $(R_+ \times \Omega, \mathcal{O})$ tel que :

$\forall\, f \in b(\mathcal{E})$, $\pi_t(\omega,f) = \tilde{\pi}_f(t,\omega)$ $\mathcal{J}^{\mu}$ps , d'où 1).

2) se déduit alors de la séparabilité de $\mathcal{C}_b(E)$ pour la convergence uniforme, et de la propriété bien connue suivante : une projection optionnelle d'un processus continu à droite (resp : continu à droite et limité à gauche) est elle-même continue à droite (resp : continue à droite et limitée à gauche) □

Si l'on veut obtenir un procédé de construction universel de noyaux de projection optionnelle (c'est-à-dire qui ne dépende pas des processus X) , il faut travailler directement sur l'espace $(\Omega,\mathcal{F})$. On construit tout d'abord un noyau d'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu fixée de $\mathcal{F}$ (voir le paragraphe suivant pour les constructions définitives).

PROPOSITION 2. - Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ espace mesurable lusinien, et $\mathcal{G}$ sous-tribu séparable de $\mathcal{F}$. Il existe une application

$$N : M_\Omega \times \Omega \to M_\Omega$$
$$(\mu,\omega) \to N^{\mu}(\omega;d\omega') .$$

$\mathcal{M}_\Omega \otimes \mathcal{G}/\mathcal{M}_\Omega$ mesurable, telle que :

$$\forall\, \mu \in M_\Omega,\ \forall\, f \in b(\mathcal{F}) ,\ \mu(f|\mathcal{G}) = N^{\mu}(.;f)\,\mu\,\mathrm{ps} .$$

De plus, si $\mathcal{G} = \sigma(Y_s, s \in \mathbb{R}_+)$, où Y est un processus continu à droite, à valeurs dans F , espace polonais, on peut choisir N vérifiant en outre :

$$\forall\, w \in \Omega ,\ \forall\, \mu \in M_\Omega ,\ N^{\mu}(\omega,d\omega') \text{ est portée par } \mathcal{Y}_\omega = \{\omega' | Y.(\omega) = Y.(\omega')\} .$$

Démonstration : La première partie de la proposition fait l'objet du lemme 1 de [12]. Démontrons la seconde partie : si f_n est une suite de fonctions continues bornées sur F , séparant les points de F , alors :

$$\forall\, \mu \in M_\Omega ,\ \mu\,\mathrm{ps} ,\ N^{\mu}(\omega,d\omega') \text{ est portée par } \bigcap_n \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \{\omega' ; f_n(Y_q(\omega)) = f_n(Y_q(\omega'))\}$$

ensemble identique à $\mathcal{Y}_\omega$. Il suffit alors de remplacer $N^{\mu}(\omega,d\omega')$ par

$$\bar{N}^{\mu}(\omega;d\omega') = I_{\{\omega;N^{\mu}(\omega;\mathcal{V}_{\omega}) = 1\}} N^{\mu}\{\omega;d\omega'\} .$$

1. VARIATIONS SUR LA THEORIE DE LA PREDICTION.

1.1. Quelques espaces canoniques.

Dans tout le travail, E_o est un espace localement compact de type dénombrable, que l'on compactifie par adjonction d'un point à l'infini ∂ (point isolé si E_o est compact). On note $E = E_o \cup \{\partial\}$ et $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne. On aura également souvent besoin d'un second espace $\bar{F} = F_o \cup \{\bar{\partial}\}$ du même type ; on notera $\bar{\mathcal{E}}$ sa tribu borélienne (pour éviter les confusions).

Ω_E désigne l'ensemble des applications $\omega : \mathbb{R}_+ \to E$, continues à droite, limitées à gauche, et absorbées en ∂ . On note $X_t(\omega) = \omega(t)$, et $\underline{\underline{F}}^{o}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$. Cet espace est muni naturellement des opérateurs de translation, de raccordement, et d'arrêt, définis respectivement par :

$$X_s(\theta_t\omega) = X_{s+t}(\omega)$$

$$X_s(\omega/t/\omega') = X_s(\omega) \quad \text{si} \quad s<t \ , \ X_{s-t}(\omega') \quad \text{si} \quad s \geq t$$

$$X_s(a_t\omega) = X_{s \wedge t}(\omega) .$$

Pour bien indiquer que l'on a choisi ces opérateurs sur Ω_E , on notera en fait cet espace Ω^h_E (h pour homogène).

Si $F = \bar{\mathbb{R}}^n$ (ie : $F_o = \mathbb{R}^n$ et $\bar{\partial} = \infty$) (ou plus généralement si F est un groupe topologique abélien, compact métrisable, et dont la loi est notée $+$), on considère, en plus de l'espace Ω_F , la restriction de cet espace aux applications $\omega : t \to \omega(t)$ telles que $\omega(0) = 0$. On note Y le processus des coordonnées et $\underline{\underline{\bar{F}}}^{o} = \sigma\{Y_s, s \leq t\}$(1) . Cet espace muni des opérateurs $\theta, (./././)$ et a définis ci-dessous est noté Ω^a_F (a pour additif) :

(1) de façon générale, tout ce qui se rapporte à Y est surmonté d'une barre.

$$Y_s(\theta_t \omega) = Y_{s+t}(\omega) - Y_t(\omega)$$

$$Y_s(\omega/t/\omega') = Y_s(\omega) \quad \text{si} \quad s \leq t \ , \quad Y_t(\omega) + Y_{s-t}(\omega') \quad \text{si} \quad s \geq t \ .$$

$$Y_s(a_t \omega) = Y_{s \wedge t}(\omega) \ .$$

Le théorème suivant (relatif à Ω^a_F) sera fondamental pour la suite :

THEOREME 1. - Soient S et T deux temps d'arrêt de la filtration $\{\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t^+}\}$; $R = S + T \circ \theta_S$ est encore un temps d'arrêt de cette famille.

Soit U une v.a $\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{R^+}$ mesurable. Il existe alors une fonction $\tilde{U}(\omega;w)$ sur $\Omega^a_F \times \Omega^a_F$ possédant les propriétés suivantes :

1) $\tilde{U}$ est $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{S^+} \otimes \underline{\underline{F}}^{\circ}_{\infty}$ mesurable.

2) $U(\omega) = \tilde{U}(\omega;\theta_S \omega)$.

3) pour tout ω fixé, $\tilde{U}(\omega;.)$ est $\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{T^+}$ mesurable.

Démonstration : - le "test de Galmarino" permet de montrer que R est un $\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{t^+}$ temps d'arrêt (voir [13], théorème 1, où le présent théorème est démontré pour l'espace $\Omega = \Omega^h_E$).

- la démonstration faite en [13] se transpose si $\Omega = \Omega^a_F$, lorsque l'on a remarqué que $V(\omega;w) = U(\omega/S\omega/w)$ est $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{S^+} \otimes \bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty}$ mesurable, ce qui résulte en particulier du lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $U : \Omega^a_F \to R$ une v.a $\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty} / \mathcal{B}(R)$ mesurable. Alors, pour tout temps d'arrêt S pour la filtration $\{\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{t^+}\}$, la variable $(\omega,w) \to V(\omega,w) = U(\omega/S\omega/w)$ est $\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{S^+} \otimes \bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty}$ mesurable.

Démonstration : Par un argument de classe monotone, il suffit de démontrer la propriété pour $U(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} f(Y_u(\omega))du$, avec $\alpha > 0$, $f \in C_b(F)$. On a alors :

$$V(\omega,w) = \int_0^{S(\omega)} e^{-\alpha u} f(Y_u(\omega))du + e^{-\alpha S(\omega)} \int_0^{\infty} dw\, e^{-\alpha v}\, f[Y_S(\omega) + Y_v(w)] \;.$$

S est une v.a $\underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{S^-}$ mesurable, ainsi que la première intégrale.

A l'aide du schéma :

$$\begin{array}{ccc} \sigma(Y_S) \otimes \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty} & \bar{\mathcal{E}} \otimes \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty} & \mathcal{B}(R) \\ (\omega,w) \longrightarrow & (Y_S(\omega),w) & \\ & (y,w) \rightarrow & \int_0^{\infty} dv e^{-\alpha v} f[y + Y_v(w)] \end{array}$$

on voit que la seconde intégrale est $\sigma(Y_S) \otimes \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty}$ mesurable, donc $\underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{S^+} \otimes \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty}$ mesurable.

- On travaille principalement par la suite sur l'espace $\hat{\Omega} = \Omega^h_E \times \Omega^a_F$: cette notation un peu trop concise signifie que si $\hat{\omega} = (\omega,\bar{\omega})$ est la trajectoire générique de $\hat{\Omega}$, $X_t(\hat{\omega}) = X_t(\omega) = \omega(t)$; $Y_t(\hat{\omega}) = Y_t(\bar{\omega}) = \bar{\omega}(t)$, et par exemple $\theta_t\hat{\omega} = (\theta_t\omega\,,\, \theta_t\bar{\omega})$ (les opérateurs θ_t sur Ω^h_E et Ω^a_F ayant été définis précédemment). On note encore

$$\underline{\underline{F}}^{\circ}_t = \sigma\{X_s, s \le t\}\,,\; \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_t = \sigma\{Y_s, s \le t\} \;\text{ et }\; \mathcal{F}^{\circ}_t = \sigma\{X_s, Y_s, s \le t\}\;.$$

<u>Remarques</u> : <u>1.a.</u> Il est bien connu que l'espace $(\Omega^h_E, \underline{\underline{F}}^{\circ}_{\infty})$ et donc $(\Omega^a_F, \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty})$ sont des espaces mesurables lusiniens ([2],IV.19,p. 146).

<u>1.b.</u> Le théorème 1. a été démontré initialement sur Ω^h_E (en [13]), et on peut alors remplacer dans la partie 1) du théorème la tribu $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{S^+}$ par $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{S^-}$. Le théorème 1. est également valable sur $\hat{\Omega}$ lorsque l'on remplace la filtration $(\underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{t^+})$ par $\mathcal{F}^{\circ}_{t+})$.

<u>1.c.</u> On se place en 2.3 dans la situation suivante : soit $\varphi : E \to F$ (espace métrisable compact) une fonction continue telle que $\varphi(\partial) = \bar{\partial}$. On définit sur Ω^h_E le processus $\check{Y} = \varphi \circ X$. Les opérateurs $\theta, (./././)$

et a définis sur Ω_E^h opérent sur $\check{Y}$ de la même façon que sur X , ce qui entraîne encore la validité du théorème 1. pour la filtration $\{\check{\underline{F}}^{o}_{t^+}\}$ associée à $\check{Y}$.

1.2. Processus de prédiction de X par rapport à Y.

On rappelle maintenant, tout en référant aux articles [8] et [12], les principales notions et propriétés de la théorie de la prédiction, selon F. Knight, relative à l'espace filtré $(\hat{\Omega},\mathcal{F}^{o}_{\infty},\mathcal{G}_{t+})$, où $(\mathcal{G}_t)$ est une filtration formée de sous-tribus séparables de $\mathcal{F}^{o}_{\infty}$. Soit $\mathcal{J}$ une topologie compacte compatible avec le caractère lusinien de $(\hat{\Omega},\mathcal{F}^{o}_{\infty})$ (voir le paragraphe 0).
Soulignons ici que les seules différences par rapport aux articles [8] et [12] - mais, elles sont importantes pour la suite - sont les choix des espaces canoniques et de la filtration $(\mathcal{G}_t)$.

Il existe une application $L : \begin{array}{l} M_{\hat{\Omega}} \times R_+ \times \hat{\Omega} \to M_{\hat{\Omega}} \\ (\mu,t,\omega) \longrightarrow L_t^{\mu}(\omega;d\omega') \end{array}$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) pour tout $t \geq 0$, et tout $\varepsilon > 0$, l'application $(\mu,\omega) \to L_t^{\mu}(\omega)$ est $\mathcal{M}_{\hat{\Omega}} \otimes \mathcal{G}_{t+\varepsilon} / \mathcal{M}_{\hat{\Omega}}$ mesurable.

ii) $\tilde{\zeta}_{\mu}(\omega) = \mathrm{Inf}(t|L_t^{\mu}(\omega) = 0)$ est, pour tout $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$ un temps d'arrêt relatif aux tribus $\mathcal{G}_{t+}$ tel que $\mu(\zeta_{\mu} < \infty) = 0$, et $L_t^{\mu}(\omega) = 0$, pour $t \geq \tilde{\zeta}_{\mu}(\omega)$. De plus, $L_{\cdot}^{\mu}(\omega)$ est continu à droite partout, et limité à gauche sur $]0,\tilde{\zeta}_{\mu}(\omega)[$.

iii) pour tout processus $\mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{F}^{o}_{\infty}$ mesurable borné $(U_t, t \geq 0)$, pour toute loi $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$, le processus $(L^{\mu}.U)_t(\omega) = \int L_t^{\mu}(\omega;d\omega')\,U_t(\omega')$ est une $(\mu,\mathcal{G}_{t+})$ projection optionnelle de U .

iv) pour tout $\mathcal{G}_{t+}$ temps d'arrêt S , pour toute loi $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$, μps

sur $(S<\infty)$, la tribu $\mathcal{G}_{S^+}$ est dégénérée pour $L_S^\mu(\omega)$.
Remarquons que le processus L ne dépend essentiellement pas de la topologie $\mathcal{T}$ choisie précédemment : en effet, si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux telles topologies, d'après la propriété iii), et la séparabilité de la tribu $\mathcal{F}^\circ_\infty$, les processus ${}_{\mathcal{T}}L^\mu$ et ${}_{\mathcal{T}'}L^\mu$ correspondants sont μ indistinguables, pour toute $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$.

$$\text{Si } \mathcal{G}_t = \begin{cases} \mathcal{F}^\circ_t \\ \underline{\underline{F}}^\circ_t \end{cases}, \text{ on note : } L_t^\mu(\omega;d\omega') = \begin{cases} \mathcal{K}_t^\mu(\omega;d\omega') \\ K_t^\mu(\omega;d\omega') \end{cases}.$$

Les processus de prédiction sont définis à partir des noyaux de projection optionnelle au moyen de :

$$\forall\ U \in b(\mathcal{F}^\circ_\infty)\ ,\quad \begin{aligned} \mathcal{Z}_t^\mu(\omega;U) &= \mathcal{K}_t^\mu(\omega;U\circ\theta_t) \\ Z_t^\mu(\omega;U) &= K_t^\mu(\omega;U\circ\theta_t)\ . \end{aligned}$$

La terminologie suivante est très intuitive : le processus $\mathcal{Z}$ est le processus de prédiction relatif à $\underline{X} = (X,Y)$, c'est-à-dire le processus de prédiction du futur de $\underline{X}$, lorsque son passé est connu ; de la même façon, le processus Z est le processus de prédiction de $\underline{X}$ par rapport à Y .
Ces processus possèdent les propriétés suivantes d'homogénéité :

THEOREME 2. - <u>Soit</u> $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$ <u>et</u> S <u>temps d'arrêt relatif à la filtration</u> $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ (resp : $\underline{\underline{F}}^\circ_{t+}$) . <u>On a alors</u> :

$$(1)\ \mathcal{Z}^\mu_{t+S}(\omega) \underset{\mu}{=} \mathcal{Z}_t^{\mathcal{Z}_S^\mu(\omega)}(\theta_S\omega)\ ;\ (1')\ Z^\mu_{t+S}(\omega) \underset{\mu}{=} Z_t^{Z_S^\mu(\omega)}(\theta_S\omega)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Montrons par exemple (1'), pour t fixé (l'indistinguabilité est ensuite obtenue comme en [13], théorème 2). Les deux membres de (1') sont $\underline{\underline{F}}^\circ_{(t+S)+}$ mesurables : le membre de gauche l'est par construction ; d'autre part, d'après i), pour tout $\varepsilon>0$, le membre de droite est $\underline{\underline{F}}^\circ_{S^+} \vee \theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+\varepsilon})$ mesurable ;

or, $\underline{\underline{F}}^\circ_{S^+} \vee \theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+\varepsilon}) \subset \underline{\underline{F}}^\circ_{(t+S+\varepsilon)^+}$, et donc le membre de gauche est $\underline{\underline{F}}^\circ_{(t+S)^+}$ mesurable. Il suffit donc de montrer que pour tout

$U \in b(\underline{\underline{F}}^{\circ}_{(t+S)^+})$ et $f \in b(\mathcal{F}^{\circ}_{\infty})$, on a : $\mu[U\, Z^{\mu}_{t+S}(f)] = \mu[U\, Z_t^{Z_S^{\mu}}(\theta_S, f)]$.

Avec les notations du théorème 1, le membre de droite est égal à

$$\mu[\widetilde{U}(\omega;\theta_S\omega)\, Z_t^{Z_S^{\mu}(\omega)}(\theta_S\omega;f)]$$

$$= \mu[Z_S^{\mu}\{\omega;\widetilde{U}(\omega;.)\, Z_t^{Z_S^{\mu}(\omega)}(.;f)\}] \quad \text{d'après iv)}$$

$$= \mu[Z_S^{\mu}\{\omega;\widetilde{U}(\omega;)f \circ \theta_t\}] \quad \text{(d'après 3), théorème 1)}$$

$$= \mu[U(\omega)f(\theta_{t+S}\omega)] = \mu[U\, Z^{\mu}_{t+S}(f)] .$$

On en déduit le théorème principal de la théorie de F. Knight ([8],[12]).

THEOREME 3. - <u>La formule</u> $\mathcal{J}_t(\mu,A) = \mu\{\omega | \mathcal{Z}_t^{\mu}(\omega) \in A\}$ <u>définit un semi-groupe sur</u> $M_{\hat{\Omega}} \times \mathcal{M}_{\hat{\Omega}}$, <u>borélien, markovien sur</u> $M^1_{\hat{\Omega}} = M_{\hat{\Omega}} \backslash \{0\}$. <u>De plus, pour toute loi</u> μ , <u>le processus</u> $\mathcal{Z}^{\mu}$ <u>est fortement markovien relativement à la filtration</u> $(\mathcal{F}^{\circ}_{t+})$ <u>et à ses temps d'arrêt, et admet le semi-groupe</u> $\mathcal{J}_t$ <u>pour semi-groupe de transition</u> :

(2) $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, S$ t.a de $\mathcal{F}^{\circ}_{t+}$, $\forall\, A \in_{\hat{\Omega}}$, $\mu[\mathcal{Z}^{\mu}_{S+t} \in A | \mathcal{F}^{\circ}_{S^+}] = \mathcal{J}_t(\mathcal{Z}^{\mu}_S;A)\, \mu$ ps .

<u>Le même résultat est valable pour</u> (Z_t^{μ}) <u>relativement à la filtration</u> $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+})$, <u>avec le semi-groupe</u> $J_t(\mu,A) = \mu\{\omega | Z_t^{\mu}(\omega) \in A\}$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer (2) ; or, d'après la formule (1) (théorème 2) et iv), on a :

$$\mu[\mathcal{Z}^{\mu}_{t+S} \in A | \mathcal{F}^{\circ}_{S^+}] = \mathcal{Z}_S^{\mu}(\omega)[\mathcal{Z}_t^{\mathcal{Z}_S^{\mu}(\omega)} \in A]\ (\mu ps)$$

$$= \mathcal{J}_t(\mathcal{Z}_S^{\mu}(\omega);A) .$$

1.3. Processus de filtrage de X par rapport à Y.

On obtient facilement le processus de filtrage (non markovien) π du processus X par rapport à Y à partir des constructions précédentes. Notons

$$\zeta = \operatorname{Inf}(t \mid X_t \notin E_o) \ , \ \bar{\zeta} = \operatorname{Inf}(t \mid Y_t \notin F_o) \ .$$

PROPOSITION 3. - On munit $M_E = \mathcal{M}_+^1(E,\mathcal{E}) \cup \{0\}$ de la topologie de la convergence étroite et de la tribu borélienne $\mathcal{M}_E$.

Il existe une application $\pi : \begin{array}{l} M_{\hat{\Omega}} \times R_+ \times \hat{\Omega} \to M_E \\ (\mu, t, \omega) \longrightarrow \pi_t^\mu(\omega; dx) \end{array}$

vérifiant : j) π est $\mathcal{M}_{\hat{\Omega}} \otimes \mathcal{B}(R_+) \otimes \bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_\infty / \mathcal{M}_E$ mesurable ; de plus, pour tout $t \geq 0$, et tout $\varepsilon > 0$, l'application $\pi_t : (\mu,\omega) \to \pi_t^\mu(\omega, dx)$ est $\mathcal{M}_{\hat{\Omega}} \otimes \bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_{t+\varepsilon} / \mathcal{M}_E$ mesurable

jj) pour toute loi $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$, et $f \in b(\mathcal{E})$, le processus $\pi_t^\mu(f)$ est une $(\mu, \bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_{t+})$ projection optionnelle de $(f \circ X_t \, , \, t \geq 0)$

jjj) pour toute loi $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$, μps, le processus $\pi_t^\mu(\omega; dx)$ est étroitement continu à droite (resp : continu à droite et limité à gauche si X est continu à droite, et limité à gauche, ou continu)

jv) pour toute loi $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$, telle que $\zeta = \bar{\zeta}$ μps, on a :

$$\pi_t^\mu(1_{E_o}) \underset{\mu}{=} 1_{(t < \bar{\zeta})} \ .$$

Démonstration : Définissons π^μ par l'identité :

$$\forall \ f \in b(\mathcal{E}) \ , \ \pi_t^\mu(\omega, f) \equiv \dot{Z}_t^\mu(\omega; f(X_o)) \equiv K_t^\mu(\omega; f(X_t))$$

j) et jj) découlent respectivement de i) et iii) appliqués au processus K^μ
Soit $f \in C_b(E)$. Le processus $\pi_t^\mu(\omega; f)$ - projection optionnelle de $f \circ X_t$ - est alors μps continu à droite (resp : cadlag) si X l'est (resp : est cadlag ou continu). jjj) découle alors de la séparabilité de $C_b(E)$.

jv) est une conséquence de $1_{E_o}(X_t) = 1_{(t<\zeta)}$ μps, et ζ est un $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}$ temps d'arrêt.

PROPOSITION 4. - Soit S temps d'arrêt pour la filtration $(\underline{\underline{\bar F}}^{\circ}_{t+})$. Pour toute loi $\mu \in M_{\hat\Omega}$, on a : (3) $\pi^{\mu}_{t+S}(\omega) \underset{\mu}{=} \pi_t^{Z^{\mu}_S(\omega)}(\theta_S\omega)$.

Démonstration : D'après la formule (1') du théorème 2, on a :

$$\forall\, g \in b(\mathcal{E}) \;,\; \pi^{\mu}_{t+S}(\omega;g) \equiv Z^{\mu}_{t+S}(\omega;g(X_o)) \underset{\mu}{=} Z_t^{Z^{\mu}_S(\omega)}(\theta_S\omega;g(X_o))$$
$$= \pi_t^{Z^{\mu}_S(\omega)}(\theta_S\omega;g) \;.$$

La séparabilité de $\mathcal{E}$ entraîne le résultat.

Remarque 2 : On aurait pu définir de la même façon le processus de filtrage π de n'importe quel processus H - qui soit homogène pour θ, c'est-à-dire : $H_s \circ \theta_t \equiv H_{s+t}$ - à valeurs dans un bon espace d'états, et la proposition 4 restait valable. En particulier, considérons sur l'espace Ω^h_E le processus $Y = X$, et $H : \begin{array}{l} \Omega^h_E \times R_+ \to \Omega^h_E \\ (\omega,t) \to \theta_t\omega \end{array}$. Le processus de prédiction de X est alors le processus de filtrage de $H = \theta$ par rapport à X. Inversement, on vient de montrer sur $\hat\Omega$ que le processus de filtrage de X par rapport à Y se déduisait facilement du processus de prédiction de X par rapport à Y. Donc, quitte à changer de processus, et d'espaces d'états, ces deux théories(1) n'en font qu'une seule.

1.4. Noyau multiplicatif de X par rapport à Y.

Rappelons que la théorie des noyaux multiplicatifs a été développée dans le cadre des processus subordonnés par J. Jacod [7] et également P.A. Meyer [11]. En [11], E et F sont deux espaces métriques compacts, auxquels on adjoint ∂ et $\bar\partial$; soit $\varphi : E \to F$ continue. (P_t) et $(\bar P_t)$ sont deux semi-groupes de Ray markoviens sur E et F respectivement, admettant ∂ et $\bar\partial$ comme points absorbants. On suppose que (P_t) est "au-dessus" de $(\bar P_t)$,

(1) les théories du filtrage et de la prédiction.

c'est-à-dire :

$$\forall\, f \in b(\bar{\mathcal{E}}) \ , \ \forall\, x \in E \ , \ P_t(x; f \circ \varphi) = \bar{P}_t(\varphi(x); f) \ .$$

Ceci entraîne que si $(P_x, x \in E)$ désignent les lois de la réalisation canonique de (P_t) sur Ω_E^h , le processus $(Y = \varphi \circ X \, ; \, \theta_t \, ; \, P_x)$ est markovien pour ses propres tribus, de semi-groupe $\bar{P}_t$. Le noyau multiplicatif $q_t^x(\omega; dy)$ est alors une bonne version de la loi conditionnelle de X_t sous P_x , par rapport à $\underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty}$.

On examinera, au cours de l'article, les différences entre cette situation et celle dans laquelle on travaille (voir en particulier 2-3).

Bien que les hypothèses de ces articles ([7] et [11]) ne soient pas vérifiées ici, on peut néanmoins définir un noyau ayant des propriétés voisines de celles de (q_t^x) , décrites en [7] et [11].

PROPOSITION 5. - Il existe une application

$$q : M_{\hat{\Omega}} \times R_+ \times \hat{\Omega} \to M_E$$
$$(\mu, t, \omega) \to q_t^{\mu}(\omega)$$

vérifiant : k) q est $\mathcal{M}_{\hat{\Omega}} \otimes \mathcal{B}(R_+) \otimes \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty} / \mathcal{M}_E$ mesurable -

kk) pour toute loi $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$, le processus $q_{\cdot}^{\mu}(\omega)$ est étroitement continu à droite -

kkk) pour toute $f \in b(\mathcal{E})$, $q_t^{\mu}(\omega; f) = \mu\{f(X_t) / \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty}\}$ μps -

kv) pour toute loi $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$ telle que $\zeta = \bar{\zeta}$ μps , $q_t^{\mu}(\omega; 1_{E_o}) \underset{\mu}{=} 1_{(\bar{\zeta} > t)}$.

Démonstration : Il suffit de prendre $q_t^{\mu}(\omega; f) \equiv N^{\mu}(\omega; f(X_t))$, l'application N ayant été définie dans la proposition 2, où l'on pose $\mathcal{G} = \underline{\underline{\bar{F}}}^{\circ}_{\infty}$ $\square$

On exhibe maintenant une relation multiplicative vérifiée par q (mais, on n'a fait jusqu'ici aucune hypothèse de Markov).

PROPOSITION 6. - Soit $g \in b(\mathcal{F}^{\circ}_{\infty})$ et $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$.

1) Si T est un temps d'arrêt des tribus $\mathcal{F}^{\circ}_{t+}$, on a :

$$\mu[g\circ\theta_T/\mathcal{F}^\circ_{T+}\vee\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty] = N^{\mathcal{Z}^\mu_T(\omega)}(\theta_T\omega;g)(\mu\,ps)\,.$$

2) Si T est un temps d'arrêt des tribus $\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_{t+}$, on a :

$$q^\mu_{t+T(\omega)}(\omega;dy) \underset{\mu}{=} \int N^\mu(\omega;d\omega')\,q_t^{\mathcal{Z}^\mu_T(\omega)(\omega')}(\theta_T\omega;dy)\,.$$

Démonstration : Montrons tout d'abord l'identité suivante, pour T temps d'arrêt de $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$

$$\mathcal{F}^\circ_{T+}\vee\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty = \mathcal{F}^\circ_{T+}\vee\theta_T^{-1}(\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty)\,.$$

D'après la continuité à droite de Y , on a, pour tout $u\geq 0$:

$$Y_{u+T} = \lim_{n\to\infty}\sum_k Y_{(u+\frac{k+1}{2^n})}\,1_{(\frac{k}{2^n}\leq T<\frac{k+1}{2^n})} \quad \text{sur} \quad (T<\infty)\,.$$

Ceci entraîne facilement $\theta_T^{-1}(\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty)\subset\mathcal{F}^\circ_{T+}\vee\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty$. Inversement, il suffit de montrer que $U(\omega) \doteq \int_0^\infty e^{-\alpha u}f(Y_u(\omega))\,du$ $(\alpha>0, f\in C_b(F)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}^\circ_{T+}\vee\theta_T^{-1}(\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty)$; une légère modification de la démonstration du lemme 1 donne ce résultat.

Pour obtenir 1), il suffit alors de montrer, que pour $f\in b(\mathcal{F}^\circ_{T+})$, $h\in b(\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty)$, et $g\in b(\mathcal{F}^\circ_\infty)$, on a :

$$\mu[f\ h\circ\theta_T\ g\circ\theta_T\ 1_{(T<\infty)}] = \mu[f\ h\circ\theta_T\ N^{\mathcal{Z}^\mu_T}(\theta_T;g)\ 1_{(T<\infty)}]\,.$$

Or, le membre de droite est égal à :

$$\mu[f(\omega)\,\mathcal{Z}^\mu_T(\omega)[h\,N^{\mathcal{Z}^\mu_T(\omega)}(\,.\,;g)]\,1_{(T<\infty)}]$$

$$=\mu[f(\omega)\,\mathcal{Z}^\mu_T(\omega)[hg]\,1_{(T<\infty)}] \qquad \text{(par définition de } N\text{)}$$

$$=\mu[f(gh)\circ\theta_T\ 1_{(T<\infty)}] \qquad \text{(par définition de } \mathcal{Z}\text{)}\,.$$

Montrons maintenant 2) ; soit $g \in b(\mathcal{E})$; on a :

$$
\begin{aligned}
q^{\mu}_{t+T}(\omega;g) &= \mu[g(X_{t+T})/\underline{\underline{F}}^{\circ}_{\infty}]\ \mu\,ps \\
&= \mu[g(X_{t+T})/\mathcal{F}^{\circ}_{T+} \vee \underline{\underline{F}}^{\circ}_{\infty}/\underline{\underline{F}}^{\circ}_{\infty}]\ \mu\,ps \\
&= \mu[N^{\mathcal{Y}^{\mu}_T}(\theta_T;g(X_t))/\underline{\underline{F}}^{\circ}_{\infty}] \qquad \text{(d'après 1))} \\
&= \int N^{\mu}(\omega;d\omega')\ q_t^{\mathcal{Y}^{\mu}_T(\omega)(\omega')}(\theta_T\omega';g) \\
&= \int N^{\mu}(\omega;d\omega')\ q_t^{\mathcal{Y}^{\mu}_T(\omega)(\omega')}(\theta_T\,\omega;g)(\mu\,ps)
\end{aligned}
$$

La dernière égalité, où l'on a remplacé certains ω' par ω découle de la fin de la proposition 2.

2. PREDICTION ET FILTRAGE POUR UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS SEMI-MARKOVIENS.

2.1. Définition et exemples de processus à accroissements semi-markoviens.

Dans la situation classique du filtrage markovien ([9]) (décrite dans l'exemple 1 ci-dessous), le couple $\underline{X} = (X,Y)$ constitué du processus de signal X et du processus d'observation Y satisfait aux propriétés suivantes :

DEFINITION 1. - On appelle processus à accroissements semi-markoviens tout objet $\underline{X} = (\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,(X_t,Y_t)_{t\geq 0},\theta_t,P_x)$ tel que :

1) $X = (\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,P_x)$ est un processus de Markov standard (1) à valeurs dans $E = E_o \cup \{\partial\}$, absorbé en ∂ au temps ζ .

2) le processus $Y = (Y_t, t \geq 0)$ est une fonctionnelle additive parfaite, adaptée aux tribus $\mathcal{F}_t$, continue à droite et limitée à gauche à valeurs dans $F = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$; en outre, $Y_o = 0$, $Y_t = Y_\zeta$ pour $t \geq \zeta$.

3) pour tout $t \geq 0$, pour tout temps d'arrêt T des tribus $(\mathcal{F}_t)$, on a :

---

(1) pour fixer les idées.

$\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall B \in \bar{\mathcal{E}}$, $\quad P_x[X_{t+T} \in A ; Y_{t+T} - Y_T \in B | \mathcal{F}_T]$

$$= P_{X_T}(X_t \in A ; Y_t \in B) \quad P_x ps$$

<u>et pour tout</u> $t \geq 0$, <u>l'application</u> $x \to P_x(X_t \in A) ; Y_t \in B)$ <u>est</u> $\mathcal{E}$ <u>mesurable.</u>

Les processus à accroissements semi-markoviens ont été étudiés extensivement par E. Cinlar ([1]). On remarquera, à l'aide des exemples suivants que l'on ne peut pas comparer a priori les tribus $\mathcal{F}_t^X = \bigcap_{\nu \in M_E^1} (\sigma(X_s, s \leq t) \vee \mathcal{N}^\nu)$ et $\mathcal{F}_t^Y = \bigcap_{\nu \in M_E^1} (\sigma(Y_s, s \leq t) \vee \mathcal{N}^\nu)$.

<u>Exemple 1</u> : Considérons sur Ω_E^h la réalisation d'un processus de Markov standard, c'est-à-dire les lois $(P_x, x \in E)$, pour lequel $\zeta = \infty$ ps . Soit sur $C^o(R_+; R^n) = \{\omega : R_+ \to R^n$, continue ; $\omega(0) = 0\}$ la mesure de Wiener W du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ à valeurs dans R^n . Soit $h : (E, \mathcal{E}) \to (R^n, \mathcal{B}(R^n))$ bornée.

On définit sur $\mathcal{W} = \Omega_E^h \times C^o(R_+, R^n)$ le processus d'observation $Y_t = \int_0^t h(X_s) ds + B_t$, les lois $\mathbb{P}_x = P_x \otimes W$, les opérateurs (θ_t) suivants : $X_s(\theta_t \omega) = X_{s+t}(\omega)$; $B_s(\theta_t \omega) = B_{s+t}(\omega) - B_t(\omega)$ et enfin les tribus

$$\mathcal{F}_t^o = \sigma(X_s, Y_s ; s \leq t)$$
$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\nu \in M_E^1} (\mathcal{F}_t^o \vee \mathcal{N}^{\mathbb{P}_\nu}) .$$

Il est alors facile de démontrer, à l'aide de l'indépendance de X et B que $\underline{\underline{X}} = (\mathcal{W}, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, (X_t, Y_t)_{t \geq 0}, \theta_t, \mathbb{P}_x)$ est un processus à accroissements semi-markoviens.

<u>Exemple 2</u> : $\underline{X} = (X, Y)$ est le couple formé par un processus de Markov standard $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P_x)$, et Y fonctionnelle additive de X vérifiant les conditions de 2) (définition 1), non forcément positive, nulle en 0 , $\mathcal{F}_t^X$ adaptée.

<u>Exemple 3</u> : Les équations différentielles stochastiques donnent des exemples de processus à accroissements semi-markoviens pour lesquels $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^Y$.

On note $\mathcal{W} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^o(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Posons $\omega = (\omega', \omega'')$; $X_t(\omega) = \omega(t)$; $Y_t(\omega) = \omega''(t)$ et

$$(\theta_t \omega(s) = (\omega'(t+s) \, ; \, \omega''(t+s) - \omega''(t)) .$$

Rappelons les définitions suivantes, dues à Yamada et Watanabé ([15]) :

α) on appelle solution de $e_{(\sigma,b)} : dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$,

où $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}^n)$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions boréliennes, tout $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{B}_t, (X_t, B_t), P)$ où $(B_t, t \geq 0)$ est un $\mathcal{B}_t$ mouvement brownien pour P et (X_t, B_t) vérifie $e_{(\sigma,b)}$.

β) on dit qu'il y a unicité trajectorielle de $e_{(\sigma,b)}$ si $\mathcal{X} = (X_t, B_t)$ et $\mathcal{X}' = (X_t', B_t)$ étant deux solutions de $e_{(\sigma,b)}$ définies sur le même espace, avec la même seconde composante, et $X_o = X_o'$, vérifient $X_t \underset{P}{=} X_t'$.

γ) on dit qu'il y a unicité en loi de $e_{(\sigma,b)}$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, deux solutions $\mathcal{X} = (X_t, B_t)$ et $\mathcal{X}' = (X_t', B_t')$ de $e_{(\sigma,b)}$ avec $X_o' = X_o = x$ ont même loi sur $\mathcal{W}$, muni de la tribu $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \sigma(X_s, Y_s, s \in \mathbb{R}_+)$.

Bien que Yamada et Watanabé ne s'intéressent pour l'unicité en loi qu'à la loi de $(X_t, t \geq 0)$, ils démontrent dans la proposition 1 de [15] que l'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi ($\beta) \Rightarrow \gamma)$). On note alors $\mathbb{P}_x$ la loi d'une quelconque solution de $e_{(\sigma,b)}$ telle que $X_o = x$, sur $(\mathcal{W}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})$. D'après le corollaire 1 de [15], s'il y a unicité trajectorielle de $e_{(\sigma,b)}$, on a $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^Y$. Enfin, on peut énoncer la proposition 2 de [15] de la façon suivante :

PROPOSITION 7. - <u>Supposons que pour tout</u> $x \in \mathbb{R}^n$, <u>il y ait unicité en loi.</u> <u>Si l'application</u> $x \to \mathbb{P}_x(\Gamma)$ <u>est universellement mesurable pour</u> $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$, <u>alors</u> $\underline{X} = (\mathcal{W}, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, X_t, Y_t, \theta_t, \mathbb{P}_x)$ <u>est un processus à accroissements semi-markoviens</u>, où $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\nu \in M^1_{\mathbb{R}^n}} (\mathcal{F}^\circ_t \vee \eta^{\mathbb{P}_\nu})$.

On pourrait encore développer de nombreux exemples liés à des questions de changement de temps, temps locaux, et systèmes régénératifs : en résumé, on peut donc souligner que les processus à accroissements semi-markoviens interviennent très souvent en théorie des processus de Markov.

2.2. Processus de filtrage et noyau multiplicatif associés à un processus à accroissements semi-markoviens.

Remarquons que dans les études faites jusqu'à présent sur les processus à accroissements semi-markoviens ([1], par exemple), c'est principalement le conditionnement de Y quand $\mathcal{F}^\circ_\infty(X) = \sigma(X_s, s \in \mathbb{R}_+)$ qui est considéré ; le résultat essentiel dans cette direction est le suivant : si P_ω désigne une désintégration régulière des lois P_x quand $\mathcal{F}^\circ_\infty(X)$, alors P_x ps, le processus Y est sous P_ω un processus à accroissements indépendants (non homogène) ([1], théorème 2.22).

Au contraire, le processus de filtrage et le noyau multiplicatif apparaissent lorsque l'on considère le conditionnement de X par rapport à Y : on reprend les notations de 1.1 sur $\hat{\Omega}$; supposons que

$$\underline{X} = (\hat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, (X_t, Y_t)_{t \geq 0}, \theta_t, P_x)$$

soit un processus à accroissements semi-markoviens, les tribus $(\mathcal{F}_t)$ étant continues à droite, $(\mathcal{F}^\circ_\infty, P_x)$ complètes, et contenant $\mathcal{F}^\circ_t$ (donc $\mathcal{F}^\circ_{t+}$). On peut alors écrire la propriété de Markov énoncée dans la définition 1 de la façon suivante : pour tout T temps d'arrêt des tribus $\mathcal{F}^\circ_{t+}$, et $t \geq 0$,

$$P_x[X_t \circ \theta_T \in A ; Y_t \circ \theta_T \in B | \mathcal{F}^\circ_{T+}] = E_{X_T}(X_t \in A ; Y_t \in B)\, P_x \text{ ps}.$$

D'après le théorème de classe monotone, on en déduit :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, H \in b(\mathcal{F}^\circ_\infty) \\ \forall\, T \text{ temps d'arrêt de } (\mathcal{F}^\circ_{t+}) \end{array}\right., \quad E_x[H \circ \theta_T | \mathcal{F}^\circ_{T+}] = E_{X_T}(H)\, P_x \text{ ps}.$$

Les seules mesures $\mu \in M_{\hat{\Omega}}$ considérées dorénavant sont les mesures $(P_\nu, \nu \in M_E^1)$. On adopte la convention suivante : si $\mu = P_\nu$, toute notation $n(\mu,.)$ définie au paragraphe 1 devient $n(\nu,.)$; de plus, si $\nu = \varepsilon_x$, $n(\nu,.) = n(x,.)$.

Explicitons tout d'abord dans ce cadre les processus de prédiction que l'on a introduits :

PROPOSITION 8. - <u>Soit</u> $\nu \in M_E^1$; <u>Alors,</u>

1) <u>les processus</u> $\mathcal{Z}_\cdot^\nu$ <u>et</u> $P_{X_\cdot}$ <u>sont</u> P_ν <u>indistinguables.</u>

2) <u>les processus</u> $Z_\cdot^\nu$ et $P_{\pi_\cdot^\nu}$ sont P_ν <u>indistinguables.</u>

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de section, il suffit de vérifier que pour $H \in b(\mathcal{F}_\infty^\circ)$, et T temps d'arrêt de $\mathcal{F}_{t+}^\circ$, on a :

$$\mathcal{Z}_T^\nu(H) = P_{X_T}(H) \quad P_\nu \text{ ps} \quad \text{sur} \quad (T<\infty) .$$

Cette égalité est réalisée, car les deux membres sont des versions de $E_\nu[H\circ\theta_T|\mathcal{F}_{T+}^\circ]$ (pour le membre de droite, cela découle de la continuité à droite des tribus définitives $\mathcal{F}_t$, qui entraîne $\mathcal{F}_{T+}^\circ \subset \mathcal{F}_T$, et de la propriété de Markov forte).

- pour obtenir 2), remarquons que si T est un $\bar{\underline{F}}_{t+}^\circ$ temps d'arrêt, c'est aussi un $\mathcal{F}_{t+}^\circ$ temps d'arrêt, et $\bar{\underline{F}}_{T+}^\circ \subset \mathcal{F}_T$; on a donc, pour $H \in b(\mathcal{F}_\infty^\circ)$,
$E_\nu[H\circ\theta_T|\bar{\underline{F}}_{T+}] = E_\nu[E_{X_T}(H)|\bar{\underline{F}}_{T+}^\circ]$ P_ν ps sur $(T<\infty)$.

Or, par définition du processus π^ν, on a : $\forall\, f \in b(\mathcal{E}), \pi_T^\nu(f) = E_\nu[f(X_T)|\bar{\underline{F}}_{T+}^\circ]$ sur $(T<\infty)$ P_ν ps, et donc $E_\nu[H\circ\theta_T|\bar{\underline{F}}_{T+}^\circ] = E_{\pi_T^\nu}(H)$ P_ν ps sur $(T<\infty)$. Le théorème de section optionnel entraîne alors 2) □

On déduit de cette proposition une relation d'homogénéité pour le processus de filtrage $(\pi_t^\nu, \nu \in M_E, t \geq 0)$, et de multiplicativité pour le noyau $(q_t^\nu, \nu \in M_E, t \geq 0)$: cette seconde relation est formellement identique à celle obtenue en [7] et [11], bien que notre cadre diffère de celui de ces articles (voir 1.4 et 2.3).

PROPOSITION 9. - *Soit* $\nu \in M_E^1$ *et* T *un* $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}$ *temps d'arrêt. Alors on a :*

$$1) \quad \pi^{\nu}_{(t+T)}(\omega) \underset{\nu}{=} \pi_t^{\pi_T^{\nu}(\omega)}(\theta_T\omega)$$

$$2) \quad q^{\nu}_{t+T}(\omega;dy) \underset{\nu}{=} \int q^{\nu}_T(\omega;dz)\,q^z_t(\theta_T\omega;dy)\ .$$

Démonstration : - D'après la proposition 4, on a : $\pi^{\nu}_{t+T}(\omega) \underset{\nu}{=} \pi_t^{Z_T^{\nu}(\omega)}(\theta_T\omega)$

1) découle alors de la proposition précédente.

- on obtient de même 2) à partir de la relation obtenue dans la proposition 6), et de la proposition précédente □

On déduit de la relation d'homogénéïté vérifiée par le processus de filtrage le :

THEOREME 4. - *La formule* $Q_t(\nu,\Gamma) = P_{\nu}[\pi^{\nu}_t \in \Gamma]$ *définit un semi-groupe sur* $M_E \times \mathcal{M}_E$, *borélien, markovien sur* M_E^1 .

De plus, pour toute loi ν , *le processus* π^{ν} *est fortement markovien, relativement à la filtration* $(\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+})$ *et à ses temps d'arrêt, et admet le semi-groupe* $(Q_t, t \geq 0)$ *pour semi-groupe de transition* :

$$\forall\, t \geq 0,\ \forall\, T \text{ t.a de } \underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+},\ \forall\, \Gamma \in \mathcal{M}_E \qquad P_{\nu}[\pi^{\nu}_{t+T} \in \Gamma \,|\, \mathcal{F}^{\circ}_{T+}] = Q_t(\pi^{\nu}_T(\omega);\Gamma)\ P_{\nu}\,ps\ .$$

Démonstration : rappelons que $Z^{\nu}_t \underset{\nu}{=} P_{\pi^{\nu}_t}$ (proposition 8).

D'après la relation d'homogénéïté vérifiée par π^{ν} (proposition 9), on a donc :

$$P_{\nu}[\pi^{\nu}_{t+T} \in \Gamma \,|\, \underline{\underline{F}}^{\circ}_{T+}] = P_{\pi^{\nu}_T(\omega)}[\pi_t^{\pi^{\nu}_T(\omega)} \in \Gamma]$$

$$= Q_t(\pi^{\nu}_T(\omega);\Gamma)$$

P_{ν} ps sur $(T<\infty)$.

La propriété de Markov simple entraîne que $(Q_t, t \geq 0)$ est un semi-groupe.

Il est borélien d'après la $\mathcal{M}_E \otimes \underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}/\mathcal{M}_E$ mesurabilité de $(\nu,\omega) \to \pi^\nu_t(\omega)$, qui découle de la proposition 3, j) □

En théorie classique du filtrage ([9], par exemple), le processus π_t défini par $\pi_t(\omega) = \pi_t^{X_o(\omega)}(\omega)$ pour les mesures $(P_x, x \in E)$ (et donc pour les mesures $(P_\nu, \nu \in M^1_E)$) joue également un rôle important : c'est le processus de filtrage du signal X par rapport à l'observation Y lorsque le signal X_o est connu.

Notons $\overline{\overline{F}}^o_t = \sigma(X_o) \vee \overline{F}^o_t$. D'après la proposition 3, j), le processus π_t est $\overline{\overline{F}}^o_{t+}$ mesurable. On déduit alors du théorème 4, et de l'égalité $P_\nu = \int \nu(dx) P_x$ le :

COROLLAIRE. - Le processus $\pi = (\Omega, \overline{\overline{F}}^o_\infty, \overline{\overline{F}}^o_{t+}, \pi_t, P_\nu)$ est un processus fortement markovien, de semi-groupe Q_t .

De plus, il vérifie : - $\pi_o = \varepsilon_{X_o}$ $P_\nu$ps , $\forall$ ν

- pour toute mesure $\nu \in M^1_E$, le processus $\pi_\cdot(\omega)$ est $P_\nu$ps continu à droite (et limité à gauche si X l'est).

En s'inspirant du travail de H. Kunita ([9]), on obtient les relations de domination suivantes entre les semi-groupes (P_t) et (Q_t) : ces relations sont importantes dans le cadre de [9] pour l'étude des mesures invariantes de (Q_t) .

PROPOSITION 10. - On note $\prec$ la relation définie sur l'ensemble $M^1_{M^1_E}$ des probabilités sur $(M^1_E, \mathcal{M}^1_E)$ par

$$(p \prec q) \iff \text{pour toute } F : M^1_E \to R \text{ , convexe, continue, bornée, } p(F) \le q(F) \text{ .}$$

Les semi-groupes (P_t) et (Q_t) satisfont aux relations suivantes :

1) pour toute $\nu \in M^1_E$, $Q_{t+s}(\nu;\cdot) \succ Q_t(\nu P_s;\cdot)$

2) pour toute $\nu \in M^1_E$, $\int \nu P_s(dx) Q_t(\varepsilon_x;\cdot) \succ \int \nu(dx) Q_{t+s}(\varepsilon_x;\cdot)$.

Démonstration : rappelons tout d'abord que $P_{\nu P_s} = \theta_s(P_\nu)$ sur la tribu $\mathcal{F}^\circ_\infty$.

Si l'on définit, pour ν fixée, le processus $\tilde{\pi}_t^\nu(\omega;dy)$ des lois conditionnelles de $(X_{t+s}, t \geq 0)$ quand $\theta_s^{-1}(\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+})$ sous P_ν (à l'aide de la proposition 1 par exemple), on a :

$$\forall\ f \in b(\mathcal{E})\ ,\ \tilde{\pi}_t^\nu(f) = E_\nu[f(X_{t+s}) \,|\, \theta_s^{-1}(\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+})] P_\nu ps$$

et donc

$$(4) \qquad \tilde{\pi}_t^\nu(dy) = E_\nu[\pi^\nu_{t+s}(dy) \,|\, \theta_s^{-1}(\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+})]\, P_\nu ps$$

à l'aide de l'inclusion $\theta_s^{-1}(\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+}) \subset \underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{(t+s)^+}$, et de la séparabilité de $\mathcal{E}$.

Montrons l'égalité $\qquad \tilde{\pi}_t^\nu = \pi_t^{\nu P_s} \circ \theta_s \quad (P_\nu ps)$.

Soit $\bar{g}_t \in b(\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+})$ et $f \in b(\mathcal{E})$.

$$\begin{aligned} E_{\nu P_s}[\pi_t^{\nu P_s}(f)\bar{g}_t] &= E_{\nu P_s}[f(X_t)\bar{g}_t] \\ &= E_\nu[f(X_{t+s})\bar{g}_t \circ \theta_s] \quad \text{(d'après le rappel)} \\ &= E_\nu[\tilde{\pi}_t^\nu(f)\bar{g}_t \circ \theta_s] \quad \text{d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Soit $F : M_E^1 \to R$, fonction convexe, continue, bornée.

$$\begin{aligned} Q_t(\nu P_s;F) &= E_{\nu P_s}(F(\pi_t^{\nu P_s})) \\ &= E_\nu[F(\pi_t^{\nu P_s} \circ \theta_s)] = E_\nu[F(\tilde{\pi}_t^\nu)]. \end{aligned}$$

D'après (4) et l'inégalité de Jensen généralisée ([9], Lemme 3-1), on a:

$$Q_t(\nu P_s;F) \leq E_\nu[F(\pi^\nu_{t+s})] = Q_{t+s}(\nu;F)\ .$$

- on utilise maintenant les notations précédant le corollaire : on déduira 2) de l'égalité

$$(5) \qquad \pi_{t+s} = E_\nu[\pi_t \circ \theta_s | \underline{\underline{\bar{\bar{F}}}}^\circ_{(t+s)^+}] P_\nu ps\ .$$

Les variables π_{t+s} et $\pi_t \circ \theta_s$ ne dépendant pas de ν , il suffit de montrer, pour tout $x \in E$,

$$\pi^x_{t+s} = F_x[\pi_t \circ \theta_s | \overline{\overline{F}}^\circ_{(t+s)^+}](P_x ps) .$$

Soit $f(\omega) = \bar{f}(\omega;\theta_s\omega) \in b(\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{(t+s)^+})$, où $\bar{f}$ est la fonction définie au théorème 1, pour $S = s$, $T = t$. Si $\varphi \in b(\mathcal{E})$, on a :

$$\begin{aligned} E_x[\bar{f}(\omega;\theta_s\omega)\varphi(X_{t+s})] &= E_x[E_{X_s(\omega)}[\bar{f}(\omega;.)\varphi(X_t)]] \\ &= E_x[E_{X_s(\omega)}[\bar{f}(\omega;.)\pi_t(\varphi)]] \\ &= E_x[\bar{f}(\omega;\theta_s\omega)(\pi_t \circ \theta_s)(\varphi)] . \end{aligned}$$

On en déduit donc $\pi^x_{t+s} = E_x[\pi_t \circ \theta_s | \underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{(t+s)^+}] P_x \, ps$.

De même qu'au théorème 2 de [13], on montre que l'application $t \to \pi_t(\theta_s\omega)$ est $P_x \, ps$ continue à droite ; il est facile de déduire alors de l'égalité précédente, la tribu $\sigma(X_o)$ étant P_x triviale, que :

$$\pi^x_{t+s} = E_x[\pi_t \circ \theta_s | \overline{\overline{F}}^\circ_{(t+s)^+}] P_x \, ps ,$$

d'où l'égalité (5). On a alors :

$$\begin{aligned} \int \nu(dx) Q_{t+s}(\varepsilon_x;F) &= E_\nu[F(\pi_{t+s})] \\ &\leq E_\nu[F(\pi_t \circ \theta_s)] \\ &\leq \int (\nu P_s)(dx)\, Q_t(\varepsilon_x;F) \ \square \end{aligned}$$

On considère à nouveau le noyau multiplicatif $(q^\nu_t, \nu \in M^1_E, t \geq 0)$ (voir 1.4 et la proposition 5). Remarquons que la différence essentielle entre le noyau q et le noyau multiplicatif de Jacod ([7] ou [11]) est que le processus $(q^\nu_t, t \geq 0)$ n'est pas en général adapté aux tribus $(\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+}, t \geq 0)$ (pour tout t , la variable q^ν_t est seulement $\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_\infty$ mesurable). On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que Y soit un processus à accroissements indépendants (non homogène, en général) "au dessous de X" (cette terminologie correspond à celle de [11] dans le cadre des couples markoviens homogènes, que l'on décrit en 2.3).

THEOREME 5. - 1) Supposons que pour toute mesure $\nu \in M_E^1$, on ait $q_o^\nu = \nu P_\nu ps$. La propriété suivante est alors vérifiée :

(6) pour toute $\nu \in M_E^1$ et $\bar{b} \in b(\underline{\underline{F}}_\infty^\circ)$, l'application $x \to E_x(\bar{b})$ est νps constante (et donc égale νps à $E_\nu(\bar{b})$).

De plus, pour toute loi $\nu \in M_E^1$, $Y = (Y_t, t \geq 0)$ est un processus à accroissements indépendants - non homogène. Plus précisément, on a :

(7) pour toute $\nu \in M_E^1$, $\bar{b} \in b(\underline{\underline{F}}_\infty^\circ)$, et T temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$,

$$E_\nu[\bar{b} \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] = E_{\nu P_T}(\bar{b}) \; P_\nu ps .$$

2) Inversement, si Y vérifie (6) pour toute $\nu \in M_E^1$, les processus q_t^ν et π_t^ν sont P_ν indistinguables et $q_o^\nu = \pi_o^\nu = \nu P_\nu ps$.

Démonstration : 1) L'hypothèse faite entraîne :

$$\left.\begin{array}{l}\forall f \in b(\mathcal{E}),\ \forall \nu \in M_E^1 \\ \forall \bar{b} \in b(\underline{\underline{F}}_\infty^\circ)\end{array}\right. , \int \nu(dx) f(x) E_x(\bar{b}) = \nu(f) E_\nu(\bar{b}) , \text{ d'où (6).}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P_\nu[E_{X_T}(\bar{b}) = E_{\nu P_T}(\bar{b})] &= \theta_T(P_\nu)[E_{X_o}(\bar{b}) = E_{\nu P_T}(\bar{b})] \\ &= P_{\nu P_T}[E_{X_o}(\bar{b}) = E_{\nu P_T}(\bar{b})] = 1 \text{ pour tout temps d'arrêt} \end{aligned}$$

T de $(\mathcal{F}_t)$. (7) en découle.

Inversement, si Y vérifie (6), il vérifie (7) et donc si $\bar{b}_t \in \underline{\underline{F}}_{t+}^\circ$, $\bar{b} \in \underline{\underline{F}}_\infty^\circ$, on a :

$$E_\nu[f(X_t)\bar{b}\circ\theta_t\,\bar{b}_t] = E_\nu[f(X_t)\bar{b}_t]E_\nu[\bar{b}\circ\theta_t]$$

$$= E_\nu[\pi_t^\nu(f)\bar{b}_t]E_\nu[\bar{b}\circ\theta_t]$$

$$= E\,[\pi_t^\nu(f)\bar{b}_t\;\bar{b}\circ\theta_t]$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 1, $q_t^\nu = \pi_t^\nu$ $P_\nu ps$, et donc la P_ν indistinguabilité de ces deux processus par continuité à droite.

Enfin, $E_\nu[\bar{b}|\bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_{0+}] = E_\nu[\bar{b}]$; la tribu $\bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_{0+}$ est donc P_ν triviale d'où $q_0^\nu = \pi_0^\nu = \nu\ P_\nu ps$.

<u>Remarques</u> : <u>3.a.</u> L'hypothèse $q_0^\nu = \nu\,P_\nu ps$ faite dans la première partie du théorème 5 est identique à : q_0^ν est $\bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_0 \vee \mathcal{N}^\nu$ mesurable et est donc plus forte que : q_0^ν est $\bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_{0+} \vee \mathcal{N}^\nu$ mesurable ($\Leftrightarrow q_0^\nu = \pi_0^\nu P_\nu$ ps) . Les probabilités $\nu \in M_E^1$ telles que $P_\nu[\pi_0^\nu \neq \nu] > 0$ (donc, = 1) sont les points de branchement du semi-groupe Q_t défini au théorème 4 .

<u>3.b.</u> De (7), on déduit : les processus $\mathcal{Q}^\nu_\cdot|_{\bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_\infty}$ et $P_{\nu P_\cdot}|_{\bar{\underline{\underline{F}}}{}^\circ_\infty}$ sont P_ν indistinguables.

2.3. <u>Le cas particulier des couples markoviens homogènes.</u>

Les exemples les plus simples de processus à accroissements semi-markoviens sont sans doute constitués par les couples $\underline{X} = (X,Y)$, où X est un processus de Markov (standard) et $Y_t = \int_0^t \varphi(X_s)ds$, avec $\varphi : E \to \bar{R}^n (= F)$ fonction mesurable. Rappelons d'autre part, que, d'après le théorème de Motoo, si Y est une fonctionnelle additive de X positive et continue, absolument continue par rapport à la fonctionnelle $H_t \equiv t$, il existe $\varphi : (E,\mathcal{E}) \to (R_+, \mathcal{B}(R_+))$ telle que $Y_t = \int_0^t \varphi(X_s)ds$, l'égalité ayant lieu à une indistinguabilité près.

Pour de tels couples $\underline{X} = (X,Y)$, l'étude de $\check{X} = (X,\check{Y})$, avec $\check{Y} = \varphi(X)$ est alors tout aussi naturelle que celle de $\underline{X}$.

$\check{X}$ vérifie la propriété de Markov suivante :

pour tout $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt T, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $B \in \bar{\mathcal{E}}$

$$(8)\qquad \begin{aligned} &P_\nu[X_{t+T} \in A\,;\, \check{Y}_{t+T} \in B \,|\, \mathcal{F}_T] \\ &= P_{X_T}(X_t \in A\,;\, \check{Y}_t \in B) \qquad P_\nu \text{ps}. \end{aligned}$$

Inversement, soit $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P_x)$ un processus de Markov (standard), à valeurs dans $E = E_o \cup \{\partial\}$, et $\check{Y}$ un processus (θ_t) homogène $(Y_{s+t} \equiv Y_s \circ \theta_t)$, $\mathcal{F}_t$ adapté, mais qui n'est pas a priori $\mathcal{F}_t^X$ adapté, à valeurs dans $F = F_o \cup \{\check{\partial}\}$ espace métrisable compact. Si l'égalité (8) est vérifiée, on dit que $\check{X} = (X, \check{Y})$ est un couple markovien homogène.

La proposition suivante montre en particulier, qu'en général, on est ramené à la situation du début de ce paragraphe (c'est-à-dire : $\check{Y}$ est $\mathcal{F}_t(X)$ adapté).

PROPOSITION 11. - Soit $\check{X} = (X, \check{Y})$ un couple markovien homogène. On suppose de plus que :

1) le processus $\check{Y}$ est ps continu à droite

2) les processus X et $\check{Y}$ ont presque sûrement même durée de vie pour toute $\nu \in M_E^1$

3) l'application $x \to P_x(\check{Y}_o \in B)$ est $\mathcal{E}$ mesurable, pour tout $B \in \bar{\mathcal{E}}$.

Il existe alors une fonction $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (\bar{F}, \bar{\mathcal{E}})$, vérifiant $\varphi(\partial) = \check{\partial}$ et $\varphi(E_o) \subset F_o$, telle que les processus $\check{Y}_t$ et $\varphi(X_t)$ soient indistinguables pour les lois $(P_\nu, \nu \in M_E^1)$.

Démonstration : Supposons tout d'abord $F = [0,1]$.

On a alors $\qquad \check{Y}_o = E_x(\check{Y}_o | \mathcal{F}_o) = E_{X_o}(\check{Y}_o) \quad P_x \text{ps}.$

D'après 3), l'application $\varphi : x \to E_x(\check{Y}_o)$ est $\mathcal{E}$ mesurable, et d'après 2), $\varphi(\partial) = \check{\partial}$, et $\varphi(E_o) \subset F_o$.

De plus, pour tout $\nu \in M_E^1$, on a $P_\nu[\check{Y}_o = \varphi(X_o)] = 1$.

D'où, si T est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt, on a, d'après la propriété de Markov forte :

$$P_\nu[\check{Y}_T = \varphi(X_T)]$$

$$= P_\nu[P_{X_T}\{\check{Y}_o = \varphi(X_o)\}]$$

$$= P_{\nu P_T}\{\check{Y}_o = \varphi(X_o)\} = 1 \ .$$

Le théorème de section appliqué aux processus optionnels $\check{Y}_t$ et $\varphi(X_t)$ entraîne alors le résultat. On passe au cas général où F est un espace compact polonais en appliquant le raisonnement précédent à une suite de processus $(h_n(\check{Y}_t)\ , n \in \mathbb{N})$, $h_n : F \to [0,1]$ étant une suite de fonctions continues sur F , séparant les points de F .

Remarque 4 : Lorsque l'ensemble des temps est discret ($\mathbb{N}$ par exemple) , on peut donner la même définition d'un couple markovien homogène, avec dans l'égalité (8), $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$, et seulement $T = s \in \mathbb{N}$ (ce qui entraîne (8) pour tout T $(\mathcal{F}_n)$ temps d'arrêt). On ne peut alors comparer a priori les tribus $\mathcal{F}_n^X$ et $\mathcal{F}_n^{\check{Y}}$, comme cela apparaît en [14]. Ceci ne se produit pas en temps continu, où, à cause de la continuité à droite des processus X et $\check{Y}$, supposer (8) pour $t > 0$ revient à la supposer pour $t \geq 0$.

Précisons maintenant comment, étant donnée X réalisation canonique d'un processus de Markov standard sur Ω_E^h , et $\varphi : E \to F = F_o \cup \{\check{\partial}\}$, telle que $\varphi(\partial) = \check{\partial}$, on peut appliquer - de façon simplifiée - au processus $\check{X} = (X, \check{Y} = \varphi \circ X)$ les constructions faites précédemment.

On suppose dorénavant que φ est continue (1). D'après la remarque 1.c, les résultats du théorème 1 sont valables pour la filtration $\check{F}^o_{t+}$ associée à $\check{Y}$; d'autre part, F étant un compact métrisable, il existe un homéomorphise $j : F \to j(F) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ et le couple $\underline{X} = (X,Y)$, où $Y_t = \int_o^t j[\check{Y}_s]ds \in R_+^{\mathbb{N}}$, est alors un processus à accroissements semi-markoviens, dont on a une réalisation sur l'espace Ω_E^h . De plus, si l'on note à nouveau $\underline{\underline{F}}^o_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$, il

(1) essentiellement pour assurer la séparabilité des tribus $\check{\underline{\underline{F}}}^o_t = \sigma\{\check{Y}_s \ ; \ s \leq t\}$.

est immédiat que $\check{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{t+} = \bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{t+}$. Au changement d'espaces canoniques près (Ω^h_E au lieu de $\hat{\Omega}$) , on s'est donc ramené à la situation de 2.2, dont tous les résultats restent valables.

La différence importante entre les couples markoviens homogènes et le cadre de [11] (rappelé en 1.4) est que si $\check{X} = (X,\check{Y})$ est un couple markovien homogène, $\check{Y}$ n'est pas a priori un processus de Markov pour les mesures $(P_x, x\in E)$. On montre, dans le théorème suivant (qui est la version homogène du théorème 5) que le processus $\check{Y}$ est un processus de Markov (en général non homogène, ce qui englobe donc le cadre de [11]) si et seulement si (1), les processus q^ν et π^ν sont P_ν indistinguables.

THEOREME 6. - 1) On note π^ν_{0-} une version $\mathcal{M}^1_E \otimes \check{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{0}$ mesurable de la loi conditionnelle de X_0 quand $\check{Y}_0$ sous P_ν .
Supposons que pour tout $\nu\in M^1_E$, on ait $q^\nu_0 = \pi^\nu_{0-}$ $P_\nu$ps . Il existe alors une famille de probabilités $(\bar{P}^\nu_y ; \nu\in M^1_E , y\in F)$ sur $(\Omega, \bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty})$ telle que :

$$(9)\qquad \begin{array}{l}\forall\ \nu\in M^1_E\\ \forall\ \bar{b}\in b(\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty})\end{array} ,\ E_{X_0}(\bar{b}) = \bar{E}^{\nu}_{\check{Y}_0}(\bar{b})\ P_\nu\text{ps} .$$

De plus, $\check{Y}$ vérifie la propriété de Markov suivante :

$$(10)\qquad \begin{array}{l}\forall\ \bar{b}\in b(\bar{\underline{\underline{F}}}^{\circ}_{\infty})\\ \forall\ T \text{ temps d'arrêt de } (\mathcal{F}_t)\end{array} ,\ E_\nu[\bar{b}\circ\theta_T|\mathcal{F}_T] = \bar{E}^{\nu P_T}_{\check{Y}_T}(\bar{b})\ P_\nu\text{ps} .$$

2) Inversement, si $\check{Y}$ vérifie (9), alors :
pour toute $\nu\in M^1_E$, les processus q^ν_t et π^ν_t sont P_ν indistinguables et

$$q^\nu_0 = \pi^\nu_0 = \pi^\nu_{0-}\quad P_\nu\text{ps} .$$

(1) de même que pour le théorème 5, l'énoncé exact du théorème est légèrement différent.

<u>Démonstration</u> : Par hypothèse, on a :

$$\forall\ f \in b(\mathcal{E})\ ,\ E_\nu[f(X_o)|\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty] = E_\nu[f(X_o)|\check{\underline{\underline{F}}}^\circ_o]\ P_\nu\text{ps}\ .$$

On en déduit

$$(11) \qquad \forall\ \bar{b} \in b(\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty)\ ,\ E_{X_o}(\bar{b}) = E_\nu[\bar{b}|\check{\underline{\underline{F}}}^\circ_o]\ P_\nu\text{ps}\ .$$

En effet, $\qquad E_\nu[f(X_o)\bar{b}] = E_\nu[f(X_o)E_{X_o}(\bar{b})]\ .$

D'autre part, $\qquad E_\nu[f(X_o)\bar{b}] = E_\nu[q^\nu_o(f)\bar{b}]$

$$= E_\nu[\pi^\nu_{o-}(f)\bar{b}] \quad \text{(par hypothèse)}$$

$$= E_\nu[\pi^\nu_{o-}(f)E_\nu[\bar{b}|\check{\underline{\underline{F}}}^\circ_o]]$$

$$= E_\nu[f(X_o)E_\nu[\bar{b}|\check{\underline{\underline{F}}}^\circ_o]]\ ,\ \text{d'où (11).}$$

Il suffit alors de prendre une version conditionnelle régulière de P_ν quand $\check{Y}_o$ pour obtenir (9) à l'aide de la séparabilité de $\bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty$.

De (9), on déduit : pour tout temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$,

$$E_\nu[E_{X_T}(\bar{b}) = \bar{E}^{\nu P_T}_{\check{Y}_T}(\bar{b})]$$

$$= E_{\nu P_T}[E_{X_o}(\bar{b}) = \bar{E}^{\nu P_T}_{\check{Y}_o}(\bar{b})] = 1\ .$$

D'où : $\qquad E_\nu[\bar{b}\circ\theta_T|\mathcal{F}_T] = E_{X_T}(\bar{b}) = \bar{E}^{\nu P_T}_{\check{Y}_T}(\bar{b})\ .$

Inversement, si $\check{Y}$ vérifie (9), il vérifie (10), et donc, si $\bar{b}_t \in \bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_{t+}$, $\bar{b} \in \bar{\underline{\underline{F}}}^\circ_\infty$, on a :

$$E_\nu[f(X_t)\,\bar{b}\circ\theta_t\,\bar{b}_t] = E_\nu[q^\nu_t(f)\,\bar{b}\circ\theta_t\,\bar{b}_t] \quad \text{(définition de } q\text{)}$$

et, d'autre part :

$$E_\nu[f(X_t)\,\bar{b}_t\,\bar{b}\circ\theta_t] = E_\nu[f(X_t)\,\bar{b}_t\,\bar{E}^{\nu P_t}_{\check{Y}_t}(\bar{b})]$$

$$= E_\nu[\pi^\nu_t(f)\,\bar{b}_t\,\bar{E}^{\nu P_t}_{\check{Y}_t}(\bar{b})]$$

$$= E_\nu[\pi^\nu_t(f)\,\bar{b}_t\,\bar{b}\circ\theta_t]\ .$$

Un argument de classe monotone entraîne alors :

$\forall\ t\ ,\ \pi^\nu_t = q^\nu_t\ P_\nu$ ps . La continuité à droite des deux processus implique qu'ils sont P_ν indistinguables.

Remarquons enfin que $\underline{\underline{F}}^\circ_{0+} \subset \mathcal{F}^\circ_{0+} \subset \mathcal{F}_0$, par continuité à droite des tribus définitives. On a donc : $E_\nu[\bar{b}|\underline{\underline{F}}^\circ_{0+}] = \bar{E}^\nu_{Y_0}(\bar{b})\,P_\nu$ ps , ce qui entraîne

$$\overline{\underline{\underline{F}}^\circ_{0+} \vee \mathcal{N}^\nu}^{P_\nu} = \overline{\underline{\underline{F}}^\circ_0 \vee \mathcal{N}^\nu}^{P_\nu}\ ,\ \text{d'où}\ \ (q^\nu_0 =)\pi^\nu_0 = \pi^\nu_{0-}\ P_\nu\ \text{ps}\ .$$

<u>Remarques</u> : <u>5.a.</u> On a dû supposer, dans tout ce paragraphe, la fonction $\varphi : E \to F$ continue, pour pouvoir appliquer le théorème 1 (par l'intermédiaire de la remarque 1.c). Dans le cadre de [11], on peut supprimer cette hypothèse en remplaçant E et F par des compactifiés de Ray convenables (voir [11]).

D'autre part, si φ est seulement supposée mesurable, par exemple de $(E,\mathcal{E})$ dans $([0,1]^n\ ,\ \mathcal{B}([0,1]^n))$ (1), on doit alors pour pouvoir appliquer les constructions, remplacer le processus $\check{Y} = \varphi\circ X$ par $Y = \int_0^\cdot \check{Y}_s\,ds$ (ce qui fait perdre de l'information sur $\check{Y}$) , puis considérer les images $\hat{P}_\nu$ sur $\hat{\Omega} = \Omega^h_E \times \Omega^a_{\bar{R}^n_+}$ des mesures P_ν sur Ω^h_E par l'application $\omega \to (X_\cdot(\omega)\ ,\ Y_\cdot(\omega))$, et appliquer les constructions de <u>2.2</u> relativement à la filtration $\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+}$.

<u>5.b.</u> Dans le cadre général de ce paragraphe, le processus Y ne vérifie pas pour P_ν et la filtration $\underline{\underline{\bar{F}}}^\circ_{t+}$, la propriété de Markov, qui est vérifiée par contre par π^ν (théorème 4) ; de plus, on a clairement

(1) On peut remplacer $[0,1]$ par tout espace qui lui soit homéomorphe, en particulier $\bar{R}$.

$\varphi(\pi_t^\nu) \underset{\nu}{=} \varepsilon_{\check{Y}_t}$. Ainsi, le changement de l'espace F en l'espace M_E correspond pour le processus $\check{Y}$ à un grossissement de son espace d'états, et on a pu construire de façon naturelle "au dessus de $\check{Y}$ " un processus de Markov π^ν à valeurs dans ce nouvel espace M_E (voir la fin de l'introduction).

4. ETUDE D'UN EXEMPLE.

Soient $(P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ les lois sur $\Omega^c = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ - muni des opérateurs usuels de translation - du mouvement brownien X_t à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les constructions faites sur Ω_E^h sont a fortiori valables sur Ω^c ; on va étudier ici le processus de filtrage (π_t^ν) de X_t par rapport à $R_t = |X_t|$.

Soit (P_t) le semi-groupe du mouvement brownien à d dimensions ; si $f \in b(\mathbb{R}_+)$, l'application $x \to P_t(x; f(|\cdot|))$ ne dépend que de $|x|$: le processus R est donc fortement markovien sous (P_x), de semi-groupe de transition $\bar{P}_t(|x|; f) = P_t(x; f(|\cdot|))$. D'après le théorème 5, on a donc pour tout $\nu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^d)$, $q_t^\nu \underset{\nu}{=} \pi_t^\nu$, et on utilisera également le résultat $q_o^\nu = \pi_o^\nu = \pi_{o-}^\nu$.

4.1. Calculs explicites de π^ν.

Posons $x = r(x)\xi(x)$, avec $r(x) = |x|$ et $\xi(x) = \frac{x}{|x|} I_{(x \neq o)}$.

Si $\nu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^d)$ on note $p_\nu(r; d\xi)$ la loi conditionnelle de ξ quand r (remarquons que sur $(r \neq 0)$, νps, $p_\nu(r; d\xi)$ est portée par la sphère $S_{d-1} \subset \mathbb{R}^d$) si $d = 1$, on notera seulement $p_\nu(r) = \nu[1_{(x>o)} \mid |x| = r]$.

On a le premier résultat suivant :

LEMME 2. - <u>Soit</u> σ_{d-1} <u>la mesure superficielle de masse</u> 1 <u>sur</u> S_{d-1}. <u>Alors</u> : <u>pour</u> $f \in b(\mathbb{R}^d)$, $\pi_t^o(\omega; f) = \int f(R_t(\omega)\xi) d\sigma_{d-1}(\xi)$ P_o ps (<u>si</u> $d = 1$, <u>cette formule s'écrit</u> : $\pi_t^o(\omega; dy) = \frac{1}{2}[\varepsilon_{|X_t(\omega)|} + \varepsilon_{-|X_t(\omega)|}]$).

<u>Démonstration</u> : Soit $\rho \in O(d)$, groupe des transformations linéaires orthogonales de $\mathbb{R}^d$. Alors, si $t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$, et $f_i \in b(\mathbb{R}_+)$, $f \in b(\mathbb{R}^d)$

$$E_o[\prod_{i=1}^n f_i(|X_{t_i}|)f(\rho X_t)] = E_o[\prod_{i=1}^n f_i(|X_{t_i}|)f(X_t)] \ ,$$

d'où : $$E_o[\prod_{i=1}^n f_i(|X_{t_i}|)\pi_t^o(f\circ\rho)] = E_o[\prod_{i=1}^n f_i(|X_{t_i}|)\pi_t^o(f)]$$

et donc : $\pi_t^o(f\circ\rho) = \pi_t^o(f)\ P_o\,ps$, par un argument de classe monotone, relation dont découle le lemme.

Il faut maintenant faire les calculs séparément pour $d = 1$ et $d \geq 2$ (ceci est très lié à la propriété : pour le mouvement brownien dans R^d , $d \geq 2$, les points sont polaires).

PROPOSITION 12. - Si $d = 1$, posons $\tau = \mathrm{Inf}\,(t|X_t = 0)$. Alors,

$$\pi_t^\nu(\omega) = 1_{(t<\tau)}\{P_\nu(R_o)\varepsilon_{R_t} + (1-P_\nu(R_o))\varepsilon_{-R_t}\} + 1_{(\tau\leq t)}(\tfrac{1}{2})[\varepsilon_{R_t} + \varepsilon_{-R_t}].$$

<u>Démonstration</u> : τ est évidemment un $\underline{\underline{\bar{F}}}^o_{t+}$ temps d'arrêt.

Calculons tout d'abord π_t^x $(\nu = \varepsilon_x)$.

Si $x > 0$, on a :

$$\pi_t^x(f)1_{(t<\tau)} = E_x[f(X_t)|\underline{\underline{\bar{F}}}^o_{t+}]1_{(t<\tau)}$$

$$= E_x[f(|X_t|)1_{(t<\tau)}|\underline{\underline{\bar{F}}}^o_{t+}]1_{(t<\tau)}$$

$$= f(|X_t|)1_{(t<\tau)} \ .$$

De même, si $x \leq 0$, $\pi_t^x(f)1_{(t<\tau)} = f(-|X_t|)1_{(t<\tau)}$.

Pour calculer $\pi_t^x(f)1_{(\tau\leq t)}$, il suffit de calculer $E_x[1_{(X_t>o)}|\bar{F}^o_{t+}]1_{(\tau\leq t)}$.

On va utiliser pour cela la formule dite « formule de Dawson » :

Si $F \in b(\mathcal{F}^o_\infty)$, on a pour tout $\mathcal{F}^o_{t+}$ temps d'arrêt T :

$$E_x[F|\mathcal{F}^o_{T+}] = E_{X_T(\omega)}[F(\omega|T(\omega)|.)]\ P_x\,ps \ .$$

Soient $t_1 < t_2 < \dots < t_n \le t$, $f_i \in b(\mathbb{R}_+)$. Alors ,

$$E_x\Big[\prod_{i\le i_o} f_i(|X_{t_i}|) 1_{(t_{i_o} < \tau < t_{i_o+1})} \prod_{j=i_o+1}^{n} f_j(|X_{t_j}|) 1_{(X_t > o)}\Big]$$

$$= E_x\Big[\prod_{i\le i_o} f_i(|X_{t_i}|(\omega)) 1_{(t_{i_o} < \tau(\omega) < t_{i_o+1})} E_{X_\tau(\omega)}\Big[\prod_{j=i_o+1}^{n} f_j |X_{t_j-\tau(\omega)}| 1_{(X_{t-\tau(\omega)}>0)}\Big]\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2} E_x\Big[\prod_{i\le i_o} f_i(|X_{t_i}(\omega)|) 1_{(t_{i_o} < \tau(\omega) < t_{i_o+1})} E_{X_\tau(\omega)}\Big[\prod_{j=i_o+1}^{n} f_j(|X_{t_j-\tau(\omega)}|)\Big]\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2} E_x\Big[\prod_{i\le i_o} f_i(|X_{t_i}|) 1_{(t_{i_o} < \tau < t_{i_o+1})} \prod_{j=i_o+1}^{n} f_j(|X_{t_j}|)\Big] ,$$

la seconde égalité provenant de $X_\tau = 0$, et du calcul de π° fait dans le lemme 2. On en déduit

$$\pi_t^x(\omega) = \tfrac{1}{2}\Big[\varepsilon_{|X_t(\omega)|} + \varepsilon_{-|X_t(\omega)|}\Big] \; P_x\,\text{ps} \quad \text{sur} \quad (t \le \tau(\omega)) \, .$$

Soit maintenant $\nu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\pi_t^\nu(\omega) = E_\nu[\pi_t^{X_o} | \underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}] \; P_\nu\text{ps}$$

$$= 1_{(\tau\le t)} \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{R_t} + \varepsilon_{-R_t}) + 1_{(t<\tau)}\{\varepsilon_{R_t} P_\nu(X_o > 0|\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}) + \varepsilon_{-R_t} P_\nu(X_o \le 0|\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+})\} \, .$$

Or, on a rappelé que $\pi_{o-}^\nu = q_o^\nu = \pi_o^\nu$, ce qui entraîne :

$$P_\nu(X_o > 0|\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}) = P_\nu(X_o > 0|\underline{\underline{F}}^{\nu\circ}_{o}) = p_\nu(R_o) \text{ , d'où la formule}$$

cherchée.

PROPOSITION 13. - Soit $d = 2$; si l'on note $\ell(t,\omega) = \int_o^t \frac{1}{R_s^2(\omega)} ds$, on a :

$$\pi_t^\nu(f) = 1_{(R_o=o)}\pi_t^{\circ}(f) + 1_{(R_o\neq o)} \int_{S^1} P_\nu(R_o;d\xi) \int_{\mathbb{R}} d\theta\, f(R_t e^{i\theta}\xi) e^{-\frac{\theta^2}{2\ell(t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell(t)}} \, .$$

Démonstration : De même que dans la proposition précédente, on déduit la formule de π^ν de celle de $(\pi^x , x \in \mathbb{R}^2)$.

Soit donc $x \neq 0$; notons $(\theta_t \omega, t \geq 0)$ une détermination continue de l'argument de $X_t(\omega)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \simeq \mathbb{C} \backslash \{0\})$. On a montré en [16] les propriétés suivantes :

12) $$R(t) = R(0) + \gamma^1(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{R(s)} ds$$

13) $$\sigma(R_s, s \leq t) \underset{P_x}{=} \sigma(\gamma^1(s), s \leq t)$$

14) $$\theta_t - \theta_o = \int_o^t \frac{1}{R(s)} d\gamma^2(s)$$

où $\gamma^1(t) = \int_o^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{R_s}$ et $\gamma^2(t) = \int_o^t \frac{Y_s dX_s - X_s dY_s}{R_s}$ sont deux mouvements browniens indépendants.

La loi conditionnelle de $(\theta_t - \theta_o)$ par rapport à $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}$ est, d'après 13) et 14) la loi normale centrée, de variance $\ell(t,\omega)$.

On en déduit pour $f \in b(\mathbb{R}^2)$,

$$\pi_t^x(f) = E_x\left[f(R_t e^{i(\theta_t - \theta_o)} \frac{x}{|x|}) | \underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\theta\, f(R_t(\omega) e^{i\theta} \frac{x}{|x|}) e^{-\frac{\theta^2}{2\ell(t,\omega)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \ell(t,\omega)}} \quad P_x ps ,$$

d'où la formule générale.

Le résultat de la proposition 13 s'étend - sous une forme convenable - à tout $d \geq 2$: en effet, d'après Ito - Mac Kean ([5], page 270), le mouvement brownien $(X_t$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$ se factorise en $(R(t), Z_{\ell(t)})$, où $\ell(t) = \int_o^t \frac{1}{R^2(s)} ds$, et Z est un mouvement brownien sur la sphère $\hat{S}_{d-1}$ indépendant de R . Si $\hat{P}_t(u;d\xi)$ désigne le semi-groupe du mouvement brownien sur S_{d-1} , on a alors :

(15) $$\pi_t^{\nu}(f) = 1_{(R_o = o)} \pi_t^{\circ}(f) + 1_{(R_o \neq o)} \int P_{\nu}(R_o; du) \int \hat{P}_{\ell(t)}(u, d\xi) f(R_t \xi) .$$

Plus généralement, A. Galmarino [17] a montré que toute diffusion isotrope (c'est-à-dire dont le semi-groupe (P_t) vérifie :

$$\forall\ \rho \in O(d)\ ,\ P_t(\rho x;f) = P_t(x;f\circ \rho))$$

à valeurs dans $R^d (d \geq 2)$ se factorise de la même façon que le mouvement brownien à valeurs dans R^d , mais avec $\ell(t)$ fonctionnelle additive de R . Pour une telle diffusion X , le processus $\overset{\vee}{\pi}$ de filtrage de X par rapport à R est encore donné par la formule (15).

4.2. Equations de filtrage.

Dans le cadre de [9], le processus de filtrage de X par rapport à Y est caractérisé comme l'unique solution d'une équation différentielle stochastique. On montre, dans l'exemple considéré précédemment, que le processus de filtrage vérifie deux équations, la première étant analogue à celle obtenue par Fujisaki-Kallianpur-Kunita en [3], la seconde analogue à celle obtenue par Kunita en [9] .

La proposition suivante joue un rôle important pour l'obtention de ces équations :

PROPOSITION 14. - On note s l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$s(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -1 & \text{si } x<0\ . \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$. Si $d = 1$, on pose $\hat{X}_t = \int_0^t s(X_s)dX_s$, et si

$$d \geq 2\ ,\ \hat{X}_t = \int_0^t \frac{1}{R_s}\Big(\sum_{i=1}^{d} X_s^i\, dX_s^i\Big)\ .$$

Le processus $\hat{X}$ est un mouvement brownien réel tel que $\sigma(R_s, s \leq t) \underset{P_x}{=} \sigma(\hat{X}_s, s \leq t)$.

En conséquence, toute $\underline{\bar{F}}_t = \sigma(R_s, s\leq t) \vee \eta^{P_x}$ martingale locale admet une version continue, et peut s'écrire sous la forme $\int_0^t H_s\, d\hat{X}_s$, où H est un processus

$\underline{\underline{F}}_t$ prévisible.

Démonstration : - le processus $\hat{X}$ est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien réel, car c'est une $\mathcal{F}_t$ martingale locale continue, telle que $<\hat{X},\hat{X}>_t = t$.

$$- \text{Posons } \hat{\mathcal{F}}_t = \sigma(\hat{X}_s, s \le t) \vee \mathcal{N}^{P_x} ;$$

si $d = 1$, d'après la formule de Tanaka ([10]), on a :

$R_t = R_o + \hat{X}_t + \frac{1}{2} L^o_t$, où L^o_t est le temps local en 0 , du mouvement brownien X . On sait que $L^o_t = P_x.\lim\limits_{(\varepsilon \to o)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_o^t 1_{(o < R_s < \varepsilon)} ds$, d'où : $\hat{\mathcal{F}}_t \subset \underline{\underline{F}}_t$.

Inversement, le temps local L^o_t est aussi donné par la formule

$L^o_t = \sup\limits_{(s \le t)} [|x| + \hat{X}_s]^-$ (voir [10]) , ce qui entraîne $\underline{\underline{F}}_t \subset \hat{\mathcal{F}}_t$, et finalement $\hat{\mathcal{F}}_t = \underline{\underline{F}}_t$.

La fin de la proposition est une propriété bien connue.

Pour alléger l'écriture, on fixe x , et on ne le mentionne pas dans les formules qui suivent :

PROPOSITION 15. - <u>Soit</u> $f \in C_b^2(R^d)$. <u>On a alors,</u>

<u>si d = 1</u>

$$1)\ \pi_t(f) = \pi_o(f) + \int_o^t \pi_u(sf')d\hat{X}_u + \tfrac{1}{2}\int_o^t \pi_u(f'')du$$

$$2)\ \pi_t(f) = \pi_o(P_t f) + \int_o^t \pi_u(s(P_{t-u}f)')d\hat{X}_u .$$

<u>si d ≥ 2</u>

$$1)\ \pi_t(f) = \pi_o(f) + \int_o^t \frac{1}{R_u}\pi_u\Big(\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)d\hat{X}_u + \tfrac{1}{2}\int_o^t \pi_u(\Delta f)du$$

$$2)\ \pi_t(f) = \pi_o(P_t f) + \int_o^t \frac{1}{R_u}\pi_u\Big[\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial}{\partial x_i} P_{t-u}f\Big]d\hat{X}_u .$$

Démonstration : La méthode de démonstration ne dépend pas de la dimension d : on écrira donc seulement la démonstration pour $d \ge 2$ par exemple.

Soit $f \in C_b^2(R^d)$. D'après la formule de Ito, $f(X_t) - f(X_o) - \frac{1}{2}\int_o^t \Delta f(X_s)du$ est une $\mathcal{F}_t$ martingale. Un calcul facile entraîne que $\pi_t(f) - \pi_o(f) - \frac{1}{2}\int_o^t ds\ \pi_s(\Delta f)$ est une $\bar{F}_t$ martingale, nulle en $t = 0$.

Pour montrer 1), il suffit d'obtenir pour toute martingale M_t, de carré intégrable, et nulle en 0, l'égalité :

$$E\left[(\pi_t(f) - \pi_o(f) - \tfrac{1}{2}\int_o^t \pi_s(\Delta f)ds)M_t\right] = E\left[M_t \int_o^t \frac{1}{R_u} \pi_u\left[\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right] d\hat{X}_u\right].$$

Or, d'après la proposition précédente, il existe Φ processus $\bar{\underline{F}}_t$ prévisible tel que $M_t = \int_o^t \Phi_u d\hat{X}_u$. On a alors :

$$E\left[\pi_t(f) - \pi_o(f) - \tfrac{1}{2}\int_o^t \pi_s(\Delta f)ds)M_t\right]$$

$$= E\left[f(X_t)M_t\right] - \tfrac{1}{2}\int_o^t du\ E\left[(\Delta f)(X_u)M_u\right]$$

$$= E\left[\int_o^t (M_s\, df(X_s) + f(X_s)dM_s) + \langle f(X),M\rangle_t - \tfrac{1}{2}\int_o^t du\ \Delta f(X_u)M_u\right]$$

$$= E\left[\langle f(X),M\rangle_t\right] = E\left[\int_o^t \Phi_u \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_u)d\langle X^i,\hat{X}\rangle_u\right]$$

$$= E\left[\int_o^t \Phi_u \frac{1}{R_u}\left(\sum_{i=1}^d X_u^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_u)\right)du\right]$$

$$= E \int_o^t \Phi_u \frac{1}{R_u} \pi_u\left\{\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} du$$

$$= E\left[M_t \int_o^t \frac{1}{R_u} \pi_u\left[\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right] d\hat{X}_u\right].$$

Pour montrer 2), remarquons tout d'abord que si $f \in C_b^2(R^d)$, et $s<t$, on a :

$P_{t-s}f(X_s) = P_t f(X_o) + \int_o^s \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} P_{t-u}f(X_u)dX_i^i$, en appliquant la formule de Ito à $(s,x) \to P_{t-s}f(x)$ (solution de l'équation de la chaleur rétrograde). Si l'on fait tendre s vers t par valeurs inférieures, le membre de gauche converge partout vers $f(X_t)$, et donc dans L^2, ainsi que le membre de droite. On peut donc écrire : $f(X_t) = P_t f(X_o) + \int_o^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} P_{t-u}f(X_u)dX_u^i$.

L'égalité 2) sera obtenue si l'on sait montrer pour toute variable $H_t \in L^2(\underline{\underline{F}}_t)$:

$$E\left[(\pi_t(f) - \pi_o(P_t f))H_t\right] = E\left[\int_o^t \frac{1}{R_u} \pi_u\left\{\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial}{\partial x_i} P_{t-u} f\right\} d\hat{X}_u H_t\right].$$

Or, H_t peut s'écrire sous la forme $H_o + \int_o^t \Phi_u \, d\hat{X}_u$, où H_o = cte , et Φ_u est un processus $\underline{\underline{F}}_u$ prévisible.

Le membre de droite est égal à :

$$E\left[\int_o^t du \frac{1}{R_u} \Phi_u\left\{\sum_{i=1}^d X_u^i \frac{\partial}{\partial x_i} P_{t-u} f(X_u)\right\}\right],$$

et le membre de gauche à :

$$\begin{aligned} E\left[\pi_t(f)(H_t - H_o)\right] &= E\, f(X_t) \int_o^t \Phi_u \, d\hat{X}_u \\ &= E \int_o^t \left(\sum_{i=1}^d dX_u^i \frac{\partial}{\partial x_i} P_{t-u} f(X_u)\right) \int_o^t \Phi_u \, d\hat{X}_u \\ &= E\left[\int_o^t du \frac{1}{R_u} \Phi_u\left\{\sum_{i=1}^d X_u^i \frac{\partial}{\partial x_i} P_{t-u} f(X_u)\right\}\right]. \end{aligned}$$

REFERENCES

[1] E. CINLAR — Markov additive processes II. Z. für. Wahr 24(95-121)-1972.

[2] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER — Probabilités et potentiels (nouvelle version) Hermann (1975).

[3] M. FUJISAKI, G. KALLIANPUR, H. KUNITA — Stochastic differential equations for the non linear filtering problem. Osaka J. Math. 9, 1 (1972).

[4] R.K. GETOOR — On the construction of kernels. Séminaire de Probabilités IX.

[5] K. ITO, H.P. Mc KEAN — Diffusion processes and their sample paths. Springer-Verlag.

[6] J. JACOD — Générateurs infinitésimaux de processus à accroissements semi-markoviens. Ann. Inst. Henri Poincaré VII (219-233) - 1971.

[7] J. JACOD — Noyaux multiplicatifs d'un processus de Markov. Bull. Soc. Math. France - Mémoire 35 - (81-117) - 1973.

[8] F. KNIGHT — A predictive view on continuous time processes. Annals of Probability. Vol. 3, p. 573-596 (1975)

[9] H. KUNITA — Asymptotic behavior of the non linear filtering errors of Markov processes. J. of Multivariate Analysis. Vol. 1, n° 4, (365-393) 1971.

[10] H.P. Mc KEAN — Stochastic integrals. Academic Press (1969).

[11] P.A. MEYER — Noyaux multiplicatifs. Séminaire de Probabilités VIII.

[12] P.A. MEYER — La théorie de la prédiction de F. Knight. Séminaire de Probabilités X.

[13] P.A. MEYER et M. YOR — Sur la théorie de la prédiction, et le problème de décomposition des tribus $\mathcal{F}^{o}_{t+}$. Séminaire de Probabilités X.

[14] G. RUCKEBUSCH — Représentations markoviennes de processus gaussiens stationnaires. Thèse de 3ème cycle. Université de Paris VI (1975).

[15] T. YAMADA et S. WATANABE — On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto Univ. Vol. 11, n° 1 (1971).

[16] M. YOR — Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens (à paraître au Bull de la S.M.F).

[17] A. GALMARINO — Representation of an isotropic diffusion as a skew product, Z . für Wahr 1 (359-378) (1963).

UNIVERSITE DE PARIS VI
Laboratoire de Probabilités
2, Place Jussieu - Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05