SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Résultats récents de A. Benveniste en théorie des flots

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 120-131

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__120_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

RESULTATS RECENTS DE BENVENISTE EN THEORIE DES FLOTS

par P.A. Meyer

Nous allons nous occuper ici, non pas de théorie des flots au sens usuel du terme, mais de théorie des flots <u>filtrés</u> , la petite branche de la théorie ergodique dans laquelle on s'efforce de garder présent à l'esprit le rôle du temps. Plus de 150 pages du volume IX du séminaire lui ont été consacrées, il y a deux ans, sous la forme d'exposés de LAZARO-MEYER, intitulés <u>questions de théorie des flots</u> (référence [QF] ci-dessous) et d'un important article de BENVENISTE (référence [B]). Notre motivation en rédigeant [QF] était la recherche d'une méthode permettant de reconnaître si, oui ou non, le flot filtré du mouvement brownien possède un compteur qui soit un processus de Poisson. Nous n'y étions pas parvenus, et c'est le problème que BENVENISTE vient de résoudre, en montrant que le flot brownien contient bien le flot de Poisson en ce sens, et même que tous les flots de processus à accroissements indépendants <u>diffus</u> se contiennent les uns les autres.

Nous commençons par rappeler les définitions et les notations de [QF] et [B], ainsi que les résultats concernant les flots sous une fonction que nous aurons à utiliser. Voici quelques notations spéciales

Beaucoup d'auteurs écrivent maintenant " $f\in\underline{\underline{A}}$ " , ou "$f\in\underline{\underline{A}}/\underline{\underline{B}}$ " pour signifier " f est $\underline{\underline{A}}$-mesurable " ou " f est mesurable de $\underline{\underline{A}}$ vers $\underline{\underline{B}}$ " . Je n'ai pu me résoudre à truquer le sens d'un symbole aussi fondamental que $\in$, mais j'ai satisfait ma conscience en écrivant $f\underline{\in}\ \underline{\underline{A}}$, $f\underline{\in}\ \underline{\underline{A}}/\underline{\underline{B}}$.

Dans toute la suite, l'intervalle $]-\infty,0]$ sera noté $\mathbb{R}_-$, l'intervalle $]0,\infty[$, $\mathbb{R}_+$, et les tribus boréliennes correspondantes s'écriront $\mathcal{R}_-$ et $\mathcal{R}_+$, et bien sûr $\mathcal{R}$ quand il s'agira de $\mathbb{R}$.

Enfin, nous travaillerons avec des tribus non complétées, fait que nous rappellerons, chaque fois que la typographie le permettra, par le petit rond $^\circ$ usuel.

I. HYPOTHESES . FLOTS DE P.A.I.. FLOTS DIFFUS .

HYPOTHESES 1. $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ,P)$ est un <u>espace probabilisé</u> (non complet en général), et $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un <u>groupe d'automorphismes</u> de cet espace. On suppose que la tribu $\underline{\underline{F}}^\circ$ est engendrée par une suite (f_n) de fonctions <u>continues sur le flot</u> , i.e. telles que $t\longmapsto f_n(\theta_t\omega)$ soit continue pour tout ω .

Ces hypothèses semblent restrictives, et ne le sont pas vraiment. Si l'on a un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, avec une tribu $\underline{\underline{F}}$ séparable mod(0), et un flot (θ_t) mesurable au sens de Lebesgue, alors on peut choisir une tribu $\underline{\underline{F}}^o$ engendrant $\underline{\underline{F}}$ mod(0), telle que les hypothèses précédentes soient satisfaites. On pourra consulter [QF], et [B] p. 103-104 et 121 pour le genre de méthodes à employer.

La dernière hypothèse entraîne à la fois la séparabilité de $\underline{\underline{F}}^o$, et la mesurabilité de $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ pour $\mathbb{R}\times\underline{\underline{F}}^o/\underline{\underline{F}}^o$.

Soit I l'ensemble des ω tels que, pour tout n et tout t, on ait $f_n(\theta_t\omega)=f_n(\omega)$. Alors I est $\underline{\underline{F}}^o$ mesurable et invariant, et il ne se passe rien sur I. Le flot est dit propre si $P(I)=0$, et nous supposerons dans toute la suite que le flot est propre (ce n'est pas une vraie restriction, car on peut toujours se placer sur I^c, si $P(I^c)\neq 0$).

HYPOTHESES 2 . $(\underline{\underline{F}}^o_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille croissante de tribus contenues dans $\underline{\underline{F}}^o$, et l'on a $\underline{\underline{F}}^o_{s+t}=\theta_t^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_s)$. La tribu $\underline{\underline{F}}^o_0$ est engendrée par une suite de fonctions continues sur le flot.

Comme plus haut, $\underline{\underline{F}}^o_0$ est séparable, et $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ est $\mathbb{R}_-\times\underline{\underline{F}}^o_0/\underline{\underline{F}}^o_0$ - mesurable.

Si f est continue sur le flot, on a $f=\lim_{t\to 0-} f\circ\theta_t$. On en déduit que $\underline{\underline{F}}^o_0=\underline{\underline{F}}^o_{0-}$.

EXEMPLE : LE FLOT D'UN P.A.I.

Soit Ω l'ensemble de toutes les applications ω de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\omega(0)=0$, continues à droite et pourvues de limites à gauche finies. On pose $\omega(t)=Z_t(\omega)$, on définit $\theta_t\omega$ par $Z_s(\theta_t\omega) = Z_{s+t}(\omega)-Z_t(\omega)$, et les tribus par

$$\underline{\underline{F}}^o = \underline{\underline{T}}(Z_s,s\in\mathbb{R}) \quad , \quad \underline{\underline{F}}^o_0=\underline{\underline{T}}(Z_s,s\leq 0) \quad , \quad \underline{\underline{F}}^o_t=\underline{\underline{T}}(Z_u-Z_v,\ u\leq t,\ v\leq t) =\theta_t^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_0)$$

La loi P est définie de la manière suivante : soit g(u) une fonction de LEVY sur $\mathbb{R}$ (fonction de type négatif). Pour $0\leq s_1\ldots<s_n$, définissons une mesure $\Pi(s_1,dx_1,\ldots.s_n,dx_n)$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\int e^{iu_1x_1+iu_2(x_2-x_1)+\ldots+iu_n(x_n-x_{n-1})}\Pi(s_1,dx_1,\ldots,s_n,dx_n)$$
$$= e^{-s_1g(u_1)-(s_2-s_1)g(u_2)-\ldots-(s_n-s_{n-1})g(u_n)}$$

La loi P est alors telle que, pour tous les $t_1<t_2\ldots<t_n$ (positifs ou non)

(1) $P\{Z_{t_2}-Z_{t_1}\in I_1,\ldots,Z_{t_n}-Z_{t_{n-1}}\in I_{n-1}\}=\Pi(t_2-t_1,I_1,\ldots t_n-t_{n-1},I_{n-1})$.

L'existence de P, et son invariance par les Θ_t , sont des résultats classiques. Le flot ainsi construit est appelé le <u>flot du P.A.I.</u> (processus à accroissements indépendants) <u>de fonction de LEVY g</u> . Ce flot est propre si et seulement si le P.A.I. est distinct d'un processus de translation uniforme (correspondant à $g(u)=iau$).

Les deux cas particuliers les plus importants sont le <u>flot brownien</u> ($g(u) = \exp(-u^2/2)$) et le <u>flot de Poisson</u> ($g(u)=e^{iu}-1$).

Nous introduisons la définition suivante :

DEFINITION. <u>Un flot</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ\ldots)$ <u>est dit</u> diffus <u>s'il possède la propriété suivante</u> : <u>il existe une v.a. réelle</u> J, <u>$\underline{\underline{F}}^\circ_0$-mesurable telle que</u>

- <u>pour toute v.a. $\underline{\underline{F}}^\circ_0$-mesurable</u> $T \geq 0$
- <u>pour toute v.a. réelle</u> H <u>$\underline{\underline{F}}^\circ_0$-mesurable</u>

<u>on ait</u> $P\{J\circ\Theta_T=H,\ 0<T<\infty\} = 0$.

Cela signifie qu'il est impossible de prédire exactement $J\circ\Theta_T$, pour T strictement positif, connaissant $\underline{\underline{F}}^\circ_0$. Si l'on a cela pour une $J\in \underline{\underline{F}}^\circ_0$, on a la même propriété pour toute $\Phi : \Omega\rightarrow\mathbb{R}$ engendrant la tribu séparable $\underline{\underline{F}}^\circ_0$. En effet, supposons que l'on ait

$$P\{\Phi\circ\Theta_T=K,\ 0<T<\infty\} > 0 \qquad (K\in \underline{\underline{F}}^\circ_0)$$

alors, J s'écrivant $f\circ\Phi$ puisque Φ engendre $\underline{\underline{F}}^\circ_0$, on a aussi $P\{J=f\circ K ,\ 0<T<\infty\} > 0$, en contradiction avec l'hypothèse.

Nous allons déterminer maintenant les flots de P.A.I. qui sont diffus. Pour cela, nous rappellerons certains résultats établis par LAZARO-MEYER dans le séminaire de Strasbourg VI (L.N. 258), p.109 , qui permettent de calculer les prédicteurs d'un P.A.I.. Notons par W^+ (tribu $\underline{\underline{G}}^+$, coordonnées X^+_t) l'ensemble des applications càdlàg. , nulles en 0, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et par W^- (tribu $\underline{\underline{G}}^-$, coordonnées X^-_t) l'ensemble des applications càdlàg. nulles en 0 de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}$. Etant donnés $w^-\in W^-$, $w^+\in W^+$, nous désignons par $w^-|w^+$ l'unique élément ω de Ω tel que

$$Z_t(\omega) = \begin{matrix} X^+_t(w^+) \text{ si } t\geq 0 \\ X^-_t(w^-) \text{ si } t\leq 0 \end{matrix}$$

Inversement, si $\omega\in\Omega$, il existe w^-, w^+ uniques tels que $\omega=w^-|w^+$. Nous les noterons $h^-(\omega)$, $h^+(\omega)$.

Soit P^+ la mesure sur W^+ pour laquelle le processus (X^+_t) est un P.A.I. de fonction de LEVY g .

LEMME 1 . <u>Nous définissons un noyau markovien</u> ε <u>de</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ_0)$ <u>dans</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ <u>en posant</u> , <u>pour</u> f <u>$\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable bornée</u>

$$\varepsilon(\omega,f) = \int_{W^+} f(h^-(\omega)|w^+)P^+(dw^+)$$

<u>et nous posons, pour tout</u> $t\geq 0$, $K_t f=\mathcal{E}(f\circ\Theta_t)$. <u>Alors nous avons</u>

(2) $$\mathcal{E}f = E[f|\underline{\underline{F}}^o_0] \quad \text{p.s.}$$

<u>et pour toute v.a.</u> T, <u>positive</u>, $\underline{\underline{F}}^o_0$<u>-mesurable, finie</u>

(3) $$E[f\circ\Theta_T|\underline{\underline{F}}^o_0] = \int K_{T(.)}(.,d\bar{\omega})f(\omega,\bar{\omega}) \ .$$

DEMONSTRATION. Pour démontrer (2), il suffit de prendre f de la forme

$$f(\omega) = a(h^-(\omega))b(h^+(\omega))$$

où a et b sont mesurables sur W^- et W^+ respectivement. Alors $E[f|\underline{\underline{F}}^o]=a(h^-(\omega))E^+[b]$, et c'est justement (2).

Il en résulte que $E[f\circ\Theta_t|\underline{\underline{F}}^o]=K_t f$, et on en déduit que (3) a lieu pour T étagée. Pour établir (3) en toute généralité, il nous faut trouver suffisamment de fonctions f telles que l'on puisse démontrer (3) en approchant T, du côté droit, par des v.a. étagées. Nous ne donnerons pas de détails, mais nous indiquerons seulement le choix des f :

$$f(\omega) = a(h^-(\omega))b(h^+(\omega))$$

$$a(w^-) = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s}u(X^-_s(w^-))ds \quad (\lambda>0,\ u \text{ continue à support compact dans }]-\infty,0[\ )$$

$$b(w^+) = \int_{0}^{\infty} e^{-\mu s}v(X^+_s(w^+))ds \quad (\mu>0,\ v \text{ continue à support compact dans }]0,\infty[\ )$$

Le point intéressant est que, pour de tels choix, a et b sont des fonctions bornées sur W^-,W^+, continues pour la topologie de la convergence compacte. D'autre part, les applications $t\longmapsto h^\pm(\Theta_t\omega)$ sont continues à droite pour la topologie de la convergence compacte. D'où il résulte que $t\mapsto f(h^-(\Theta_t\omega|w))$ est, pour ω,w fixés, continue à droite en t puis (th. de Lebesgue) que $\mathcal{E}(\omega,f\circ\Theta_t)$ est continu à droite en t.

Ce théorème s'étend aussitôt par classes monotones : soit $f(\omega,\omega')$ une fonction bornée, $\underline{\underline{F}}^o_0\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. Alors [T comme dans (3)]

(4) $$E[f(\omega,\Theta_T\omega)|\underline{\underline{F}}^o_0] = \int K_{T(.)}(.,\omega')f(.,\omega') \quad \text{p.s.}.$$

Rappelons qu'on appelle <u>processus de Poisson généralisé</u> un P.A.I. qui garde la valeur 0 pendant un intervalle de temps $[0,S[$ non réduit à 0 (la v.a. S a alors une loi exponentielle : $P\{S>t\}=e^{-\lambda t}$)

PROPOSITION. <u>Un flot de P.A.I. est diffus si et seulement si ce P.A.I. n'est pas un processus de Poisson généralisé.</u>

DEMONSTRATION. a) Soit Ψ une v.a. réelle engendrant la tribu $\underline{\underline{G}}^-$; alors $\Phi=\Psi\circ h^-$ engendre $\underline{\underline{F}}^o_0$. Soit $t>0$. Pour tout $w^-\in W^-$, soit $n_t(w^-)$ défini par

$$X^-_s(n_t w^-) = X^-_{s+t}(w^-) \text{ si } s<-t \quad , \quad X^-_s(n_t w^-)=0 \text{ si } s\geq -t$$

Si maintenant nous avons $\omega\in\Omega$ et $t<S(\omega)$, nous avons $h^-(\Theta_t\omega)=n_t(h^-(\omega))$,

donc $\Phi(\Theta_t\omega) = \Psi(n_t(h^-(\omega)) = H(\omega)$, où $H(\omega) = \Psi \circ n_t \circ h^-$ est $\underline{\underline{F}}_0^o$-mesurable. Alors $P\{\Phi\circ\Theta_t = H\} \geqq e^{-\lambda t}$, et le flot n'est pas diffus.

b) Inversement, supposons que le flot ne soit pas un processus de Poisson généralisé, et montrons qu'il est diffus. Appliquons (4) en prenant (avec les notations suivant la définition des flots diffus)

$$f(\omega,\omega') = I_{\{0<T(\omega)<\infty\}} I_{\{\Phi(\omega')=H(\omega)\}}$$

D'après (4), pour montrer que $E[f(\omega,\Theta_T\omega)]=0$, il nous suffit de montrer que si l'on pose $T(\omega)=t$, $H(\omega)=h$, on a

$$K_t(\cdot,\{\Phi=h\}) = 0$$

Cela vaut aussi $\varepsilon(\cdot,\{\Phi\circ\Theta_t=h\})=0$. Comme Φ engendre $\underline{\underline{F}}_0^o$, les ensembles $\{\Phi=h\}$ sont les atomes de $\underline{\underline{F}}_0^o$, les ensembles $\{\Phi\circ\Theta_t=h\}$ les atomes de $\underline{\underline{F}}_t^o$. Il ne nous reste plus qu'à montrer ceci :

<u>pour tout couple</u> $(\omega,\tilde{\omega})$, <u>la mesure</u> $\varepsilon(\omega,\cdot)$ <u>attribue une masse nulle à l'atome de</u> $\underline{\underline{F}}_t^o$ <u>contenant</u> $\tilde{\omega}$.

Or nous avons calculé explicitement $\varepsilon(\omega,\cdot)$. La mesure de l'atome de $\underline{\underline{F}}_t^o$ contenant $\tilde{\omega}$ est

$$I_{\{\omega^-=\tilde{\omega}^-\}} P^+\{X_s^+(\cdot)=X_s^+(\tilde{\omega}^+) \text{ pour } 0\leqq s\leqq t\}$$

et tout revient à vérifier que P^+ ne charge pas les atomes de $\underline{\underline{G}}_t^+$, ce qui n'est pas difficile - et n'a plus rien à voir, en tout cas, avec la théorie des flots.

II. UTILISATION D'UN COMPTEUR FONDAMENTAL

La définition suivante est bien classique :

DEFINITION. <u>On appelle</u> compteur <u>un processus</u> $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ <u>tel que</u>

1) $N_0=0$. <u>Les trajectoires</u> $N_\cdot(\omega)$ <u>sont continues à droite, finies, croissantes, purement discontinues</u> , <u>à sauts unité</u>.

2) (N_t) <u>est une hélice du flot filtré</u> : <u>pour</u> $t\geqq 0$, <u>on a</u> $N_t \in \underline{\underline{F}}_t^o$ (ou, de manière équivalente[1], pour $t\leq 0$ on a $N_t \in \underline{\underline{F}}_0^o$), <u>et on a</u> $N_{s+t}=N_s+N_t\circ\Theta_s$.

<u>Le compteur</u> (N_t) <u>est dit</u> fondamental <u>si</u> $N_{+\infty}=+\infty$, $N_{-\infty}=-\infty$.

Le théorème classique d'AMBROSE-KAKUTANI, précisé dans [QF] p.24-27 et [B] p. 105 pour les flots filtrés, montre que tout flot propre admet un compteur (N_t) tel que $N_{\pm\infty} = \pm\infty$ p.s.. Si l'on se restreint à l'ensemble invariant, $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable et de mesure pleine $\{N_{\pm\infty} = \pm\infty\}$, on a donc un compteur fondamental. <u>Nous désignons par</u> (N_t), <u>dans toute la suite, un tel compteur</u>. Il faut cependant se rappeler que le compteur

1. Equivalente, en vertu de l'identité qui suit : $N_{-t}+N_t\circ\Theta_{-t}=N_0=0$.

fondamental n'est pas l'objet de notre étude, mais un outil pour l'étude des flots filtrés. Nous nous permettrons donc de le modifier plus loin.

NOTATIONS RELATIVES AU COMPTEUR FONDAMENTAL

Nous désignons par X l'ensemble $\{\omega : \Delta N_0(\omega)=1\}=\{\omega : N_{0-}(\omega)=1\}$ (qui appartient à $\underline{\underline{F}}^\circ_0$). Nous munissons X des tribus

$$\underline{\underline{X}}^\circ = \underline{\underline{F}}^\circ|_X \quad , \quad \underline{\underline{X}}^\circ_t = \underline{\underline{F}}^\circ_t|_X$$

Nous devons ensuite repérer les sauts du compteur fondamental. Nous le ferons de deux manières (cf. les deux notions de temps d'entrée en théorie des processus de Markov). D'abord, le numérotage

(4) $$V_1(\omega) = \inf \{t>0 : \Delta N_t(\omega)=1\}$$

poursuivi vers l'avant ($V_2(\omega) = \inf\{t>V_1(\omega) : \Delta N_t(\omega)=1\}\ldots$) et vers l'arrière ($V_0(\omega) = \sup\{t\leqq 0 : \Delta N_t(\omega)=1\}\ \ldots$). Ensuite,

(5) $$W_0(\omega) = \inf \{ t\geqq 0 : \Delta N_t(\omega)=1 \}$$

poursuivi vers l'avant et vers l'arrière ($W_{-1}(\omega)=\sup\{t<0 : \Delta N_t(\omega)=1\}$). Les notations sont choisies de telle sorte que $V_i=W_i$ sur X. D'une importance particulière :

(6) $$\begin{array}{l} F(\omega) = V_1(\omega), \text{ toujours } >0 \text{ , et } \sigma(\omega)=\theta_{F(\omega)}(\omega)\in X \\ G(\omega) = W_{-1}(\omega), \text{ toujours } <0 \text{ , et } \tau(\omega)= \theta_{G(\omega)}(\omega)\in X \end{array}$$

Il faut faire dès maintenant quelques remarques simples.

a) Les V_i et W_i , $i\geqq 0$, sont des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)_{t\geqq 0}$, et leurs restrictions à X des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{X}}^\circ_t)_{t\geqq 0}$.

b) $(t,\omega)\longmapsto\theta_t\omega$ est mesurable $\mathbb{R}\times\underline{\underline{F}}^\circ/\underline{\underline{F}}^\circ_0$ et $\mathbb{R}_-\times\underline{\underline{F}}^\circ_0/\underline{\underline{F}}^\circ_0$. Il en résulte que σ est mesurable $\underline{\underline{F}}^\circ/\underline{\underline{F}}^\circ$, τ mesurable $\underline{\underline{F}}^\circ/\underline{\underline{F}}^\circ$ et $\underline{\underline{F}}^\circ_0/\underline{\underline{F}}^\circ_0$. D'autre part, sur X nous avons $\sigma\tau=\tau\sigma=\mathrm{Id}.$, de sorte que σ et τ sont des automorphismes de $(X,\underline{\underline{X}}^\circ)$, et que $\tau^{-1}(\underline{\underline{X}}^\circ)\subset\underline{\underline{X}}^\circ$. Nous définirons comme d'habitude σ^n,τ^n pour $n\in\mathbf{Z}$, et nous introduirons sur X la filtration discrète

(7) $$\underline{\underline{X}}^0 = \underline{\underline{X}}^\circ_0 \quad , \quad \underline{\underline{X}}^n = (\sigma^n)^{-1}(\underline{\underline{X}}^0)$$

(il n'y a pas de place ici pour le petit °).

Sur $\mathbb{R}_+\times X$, nous pouvons considérer la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$, engendrée (sans complétion) par les processus $(Y_s(x))_{s>0}$ adaptés à la famille $(\underline{\underline{X}}^\circ_s)_{s>0}$ et continus à gauche, et la tribu optionnelle, engendrée sans complétion par les processus $(Y_s(x))_{s>0}$, adaptés à $(\underline{\underline{X}}^\circ_{s+})_{s>0}$ et à trajectoires càdlàg. . Notons les points suivants, presque évidents.

LEMME 2. a) <u>Tout processus prévisible</u> $(Y_s(x))_{s>0}$ <u>est trace sur</u> $\mathbb{R}_+\times X$ <u>d'un processus prévisible</u> $(\overline{Y}_s(\omega))_{s>0}$ <u>sur</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$.
b) <u>Pour que</u> $(Y_s(x))_{s>0}$ <u>soit prévisible, il faut et il suffit qu'il existe</u> $j(s,\omega)\underline{\in}\mathcal{R}_+\times\underline{\underline{F}}^o_0$ <u>telle que</u> $Y_s(x)=j(s,\theta_s x)$.

DEMONSTRATION. a) est évident, à partir des processus prévisibles élémentaires.
Si $(\overline{Y}_s(\omega))$ est prévisible, nous vérifions que $j(s,\omega)=\overline{Y}_s(\theta_{-s}\omega)$ est $\mathcal{R}_+\times\underline{\underline{F}}^o_0$ - mesurable. Il suffit de traiter le cas où $\overline{Y}_s(\omega)=I_{]a,\infty[}(s)h(\omega)$, où h, $\underline{\underline{F}}^o_a$-mesurable, peut s'écrire $f\circ\theta_a$ $(f\underline{\in}\ \underline{\underline{F}}^o_0)$. Prenant alors f continue sur le flot, la démonstration est immédiate. Inversement, pour vérifier que si $j(s,\omega)\underline{\in}\ \mathcal{R}_+\times\underline{\underline{F}}^o_0$ on a $j(s,\theta_s\omega)\underline{\in}\ \underline{\underline{P}}$, il suffit de traiter le cas où $j(s,\omega) = a(s)f(\omega)$, $f\underline{\in}\ \underline{\underline{F}}^o_0$ continue sur le flot, et c'est immédiat.

LEMME 3. <u>On a</u> $\underline{\underline{X}}^1=\underline{\underline{X}}^o_{F-}$ (On rappelle que $F=V_1$ est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{X}}^o_s)_{s>0}$).

DEMONSTRATION. Nous rappelons que $\underline{\underline{X}}^1=\sigma^{-1}(\underline{\underline{X}}^o_0)$ (formule ( )), et que, pour <u>tout</u> temps d'arrêt T, les v.a. $\underline{\underline{X}}^o_{T-}$ - mesurables sont celles qui peuvent s'écrire Y_T, avec un processus $(Y_s)_{s\geq 0}$ prévisible. Compte tenu du lemme 1, ce sont donc celles qui peuvent s'écrire $j(T(x),\theta_T x)$ avec avec $j\underline{\in}\ \mathcal{R}_+\times\underline{\underline{F}}^o_0$.

On a alors $j(F(x),\theta_F x) = j(-G(\sigma x),\sigma x)$, donc $\underline{\underline{X}}^o_{F-}\subset\sigma^{-1}(\underline{\underline{X}}^o_0)$.

Inversement, si $j(x)\underline{\in}\ \underline{\underline{X}}^o_0$, $j\circ\sigma = Y_F$, où $(Y_s)_{s>0}$ est le processus prévisible $(\overline{j}\circ\theta_s)_{s>0}$, $\overline{j}$ étant $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable et telle que $\overline{j}|_X=j$. Donc $\sigma^{-1}(\underline{\underline{X}}^o_0)\subset\underline{\underline{X}}^o_{F-}$.

REPRESENTATION DU FLOT COMME FLOT SOUS F

Considérons l'espace $\mathbb{R}\times X$, et l'application $(s,x)\overset{}{\underset{i}{\mapsto}}\theta_s x$ de $\mathbb{R}\times X$ dans Ω, qui est mesurable $\mathcal{R}\times\underline{\underline{X}}^o/\underline{\underline{F}}^o$. Cette application est surjective, et deux éléments w,w' de $\mathbb{R}\times X$ ont même image par i si et seulement s'il existe un $n\in\mathbb{Z}$ tel que $\rho^n w = w'$, ρ étant définie par

(8) $\qquad \rho(s,x) = (s-G(x),\tau(x))$

On obtient un " domaine fondamental" en bijection avec Ω en posant

(9) $\qquad \hat{\Omega} = \{(s,x) : 0<s\leq F(x)\}$ (définition de [B], non de [QF])

L'application inverse de i est alors $\omega\underset{j}{\mapsto}(-G(\omega),\tau(\omega))$, qui est mesurable $\underline{\underline{F}}^o/\mathcal{R}\times\underline{\underline{X}}^o$, et prend ses valeurs dans $\hat{\Omega}$. Nous allons écrire ci-dessous comment se lisent sur $\hat{\Omega}$ les diverses notions relatives au flot sur Ω (sur $\hat{\Omega}$, on affectera les notations de chapeaux ^).

<u>Tribu</u> $\underline{\underline{F}}^o$: elle se lit suivant la tribu $\hat{\underline{\underline{F}}}^o=\mathcal{R}\times\underline{\underline{X}}^o|_{\hat{\Omega}}$.

<u>Flot</u> Θ_t : si ω correspond à $\hat{\omega}=(s,x)$, $\Theta_t\omega$ correspond à

(10) $\hat{\Theta}_t(s,x) = (s+t-V_n(x), \sigma^n(x))$

où n est déterminé par $V_n(x)<s+t\leq V_{n+1}(x)$ ([QF] p.12, légèrement modifié pour tenir compte du changement de définition de $\hat{\Omega}$).

<u>Mesure</u> P : elle se lit suivant la mesure

(11) $\hat{P}(ds,dx) = ds\times\mu(dx)|_{\hat{\Omega}}$

où μ est σ-finie, invariante par σ : c'est la <u>mesure de PALM</u> du compteur (cf. [QF] p.16). On a $1=\int P = \int_{\hat{\Omega}}\hat{P} = \int_X F\mu$. La fonction F est partout >0, et $\underline{\underline{X}}^1$-mesurable, donc μ est σ-finie sur $\underline{\underline{X}}^1$. Comme elle est invariante par σ, elle est σ-finie sur $\underline{\underline{X}}^n$ pour tout n .

<u>Filtration</u> : Il suffit de dire comment se lit $\underline{\underline{F}}^o_0$. On a en fait

(12) $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_0 = \underline{\underline{P}}|_{\hat{\Omega}}$

Vérifier (12) revient à voir que :

a. Si f est $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable sur Ω, $(s,x)\mapsto f(\Theta_s x)$ est trace sur $\hat{\Omega}$ d'un processus prévisible. C'est clair : prendre f continue sur le flot.

b. Si $(Y_s(x))_{s>0}$ est prévisible, alors $\omega\mapsto Y_{-G(\omega)}(\tau\omega)$ est $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable. C'est clair : on choisit $j\in \mathbb{R}_+\times\underline{\underline{F}}^o_0$ telle que $Y_s(x)=j(s,\Theta_s x)$ (lemme 2), et alors la fonction considérée vaut $j(-G(\omega),\omega)$, tandis que $-G\in\underline{\underline{F}}^o_0/\mathbb{R}_+$.

<u>Compteur fondamental</u> : X se lit suivant le graphe de F, et l'on a, par exemple, $\hat{W}_0(s,x) = -s$, $\hat{W}_1(s,x)=F(x)-s$

le compteur $(\hat{N}_t)$ sur $\hat{\Omega}$ comptant les rencontres du graphe de F .

CHOIX D'UN COMPTEUR AMÉLIORÉ

Nous allons modifier le compteur de telle sorte que <u>la v.a.</u> F <u>sur</u> X (qui a priori est $\underline{\underline{X}}^1$-mesurable : lemme 3) <u>soit</u> $\underline{\underline{X}}^{-1}$-<u>mesurable</u>.

Nous partons du compteur fondamental (N^1_t), et nous nous donnons un nombre h>0. A chaque saut V^1_n de ce compteur ($n\in\mathbf{Z}$) nous mettons en route une horloge H_n , que nous arrêtons juste avant l'instant V^1_{n+1}, et qui sonne aux instants V^1_n, V^1_n+h , V^1_n+2h (une sonnerie à l'instant V^1_{n+1} , si par hasard $V^1_{n+1}-V^1_n$ est un multiple de h, ne sera pas comptée pour l'horloge H_n, mais bien sûr H_{n+1} sonne à l'instant V^1_{n+1}).

Le nouveau compteur N^2_t compte toutes les sonneries entendues entre 0 et t . Nous laissons le lecteur vérifier qu'il s'agit bien d'un compteur (cela peut aussi se voir sur la représentation comme flot sous une fonction, donnée plus bas). Il est clair que deux sauts successifs de ce compteur sont séparés par un temps $\leqq h$.

Nous posons ensuite $N_t=N_t^2\circ\theta_{-2h}$, qui sera notre nouveau compteur fondamental ; ce sera à lui que se réfèreront les notations précédentes : X,V_1 , etc . Ce compteur est adapté à la filtration $(\underline{\underline{G}}_t^\circ)=(\underline{\underline{F}}_{t-2h}^\circ)$ pour $t\geqq 0$. Alors sur Ω

V_1 , $V_2=V_1+V_1\circ\theta_{V_1}$ sont des t.d'a. de $(\underline{\underline{G}}_t^\circ)$, donc $V_1,V_2\in\underline{\underline{G}}_{V_2-}^\circ$
$V_2\leqq 2h$, donc $\underline{\underline{G}}_{V_2-}^\circ\subset\underline{\underline{G}}_{2h}^\circ=\underline{\underline{F}}_0^\circ$

Par restriction à X , on a que $F,F+F\circ\sigma$ sont $\underline{\underline{X}}^\circ$-mesurables, donc $F\in\sigma^{-1}(\underline{\underline{X}}^0)=\underline{\underline{X}}^{-1}$.

III. LA CONSTRUCTION DE BENVENISTE

Nous supposons désormais que le compteur fondamental a été choisi comme on vient de le dire, <u>et que le flot est diffus</u>. Nous nous proposons de construire une hélice $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ - c'est à dire, rappelons le, un processus càdlàg. réel tel que $Z_0=0$, $Z_t\in\underline{\underline{F}}_t^\circ$ pour $t\leqq 0$, $Z_{t+s}=Z_s+Z_t\circ\theta_s$ - admettant même loi que le P.A.I. de fonction de LEVY g, c'est à dire

pour $s_1,\dots,s_n\geqq 0$ $P\{Z_{s_1}\in I_1,\dots,Z_{s_n}\in I_n\}=\Pi(s_1,I_1,\dots s_n,I_n)$ (cf. (1))

Cela signifie que le flot "contient" le flot du P.A.I. considéré.

PREMIERE ETAPE. Elle consiste à se ramener à un problème analogue, mais consistant à construire un processus <u>sur</u> X, <u>non sur</u> Ω .

Supposons que nous ayons pu construire sur X un processus $(Z_t(x))_{t\in\mathbb{R}}$ à trajectoires càdlàg., nul pour t=0, satisfaisant à

(13) $\boxed{Z_{t-G(x)}(\tau x) = Z_t(x)-Z_{G(x)}(x)}$

(ou d'une manière équivalente, si l'on remplace x par σx : $Z_{t+F(x)}(x)=Z_{F(x)}(x)+Z\ (\sigma x)$). Nous pouvons prolonger de manière unique ce processus en un processus $(Z_t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$ satisfaisant à l'identité des hélices. Celle ci nous impose en effet

(14) $Z_t(\theta_s x) = Z_{t+s}(x)-Z_s(x)$

Tout ω se représente de plusieurs manières sous la forme $\theta_s x$, différant par l'application d'une puissance de l'application ρ (formule (8)), et (13) nous dit justement que le second membre de (14) ne dépend pas de la représentation choisie. Après quoi, l'identité des hélices est évidente.

Nous établirons ensuite la propriété

(15) $\boxed{Z_{s\wedge F}\in\underline{\underline{X}}^0 \text{ sur } X \text{ , pour tout } s\in\mathbb{R}}$

(qui entraîne, par continuité à droite, que $(s,x)\mapsto Z_{s\wedge F(x)}(x)$ est

$\mathbb{R}\times\underline{\underline{X}}^0$-mesurable). Montrons que (15) entraîne que <u>pour</u> $t\leqq 0$, Z_t <u>est</u> $\underline{\underline{F}}_0^o$ -<u>mesurable sur</u> Ω . Nous avons par (14) ($\omega = \theta_{-G(\omega)}(\tau\omega)$)

$$\begin{aligned} Z_t(\omega) &= Z_{t-G(\omega)}(\tau\omega)-Z_{-G(\omega)}(\tau\omega) \\ &= Z_{(t-G(\omega))\wedge F(\tau\omega)}(\tau\omega) - Z_{F(\tau\omega)}(\tau\omega) \end{aligned}$$

Regardons le premier terme de cette somme (le second s'y réduit pour $t=0$). Nous l'obtenons par composition de $\omega \mapsto (t-G(\omega),\tau\omega) \in \underline{\underline{F}}_0^o/\mathbb{R}\times\underline{\underline{X}}^0$ et de $(s,x)\mapsto Z_{s\wedge F(x)}(x) \in \mathbb{R}\times\underline{\underline{X}}^0/\mathbb{R}$, d'où la mesurabilité cherchée.

Dernier résultat que nous prouverons sur X : que quels que soient $A\in\underline{\underline{X}}^{-1}$, quels que soient $s_1,\dots,s_n \geqq 0$, on a

$$(16) \qquad \boxed{\mu\{A,\ Z_{s_1}\in I_1,\dots,Z_{s_n}\in I_n\} = \mu(A)\Pi(s_1,I_1,\dots,s_n,I_n)}$$

Supposant alors que $0<\mu(A)<\infty$, et considérant la loi de probabilité $\overline{\mu}(B)=\mu(A\cap B)/\mu(A)$, nous remarquons que pour celle ci $(Z_s(x))_{s\geqq 0}$ est un P.A.I., de sorte que pour tout s on a aussi

$$\overline{\mu}\{Z_{s+s_1}-Z_s\in I_1,\dots,Z_{s+s_n}-Z_s\in I_n\} = \Pi(s_1,I_1,\dots,s_n,I_n)$$

après quoi on revient à μ. Cette remarque étant faite, rappelons que F est $\underline{\underline{X}}^{-1}$-mesurable, et calculons

$$\begin{aligned} & P\{Z_{s_1}(\omega)\in I_1,\dots,Z_{s_n}(\omega)\in I_n\} \\ = & \int I_{\{Z_{s_1}(\theta_s x)\in I_1,\dots,Z_{s_n}(\theta_s x)\in I_n\}}\hat{P}(ds,dx) \\ = & \int\mu(dx)ds\ I_{\{0<s\leqq F(x)\}}I_{\{Z_{s+s_1}(x)-Z_s(x)\in I_1,\dots,Z_{s+s_n}(x)-Z_s(x)\in I_n\}} \\ = & \int_0^\infty ds \int_X \mu(dx)I_{\{F(x)\geqq s\}}I_{\{Z_{s+s_1}(x)-Z_s(x)\in I_1,\dots\}} \\ = & \int_0^\infty ds\ \mu\{F\geqq s\}\Pi(s_1,I_1,\dots,s_n,I_n) \\ = & \int F\mu\ .\ \Pi(s_1,I_1,\dots,s_n,I_n) \quad = \Pi(s_1,I_1,\dots,s_n,I_n) \end{aligned}$$

Ceci ne concerne que les $s_i\geqq 0$, mais comme on sait que $(Z_t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$ est une hélice, la quantité

$$E[\exp(iu_1(Z_{t_2}-Z_{t_1})+iu_2(Z_{t_3}-Z_{t_2})+\dots+iu_n(Z_{t_{n+1}}-Z_{t_n}))]$$

ne dépend que des différences $t_2-t_1,\dots,t_{n+1}-t_n$, et il en résulte aussitôt que l'hélice (Z_t) " reproduit" dans Ω le flot du P.A.I. de fonction de LEVY g, ce qui est le but de l'exposé. Soulignons que (Z_t) n'est pas, pour t positif, un <u>P.A.I. de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t^o)_{t\geqq 0}$. En définitive, on voit que la clef du théorème de BÈNVENISTE se trouve dans une construction sur X donnant (13), (15) et (16).

SECONDE ETAPE : CONSTRUCTION SUR X .

Nous reprenons la définition des flots diffus : soit Φ une fonction à valeurs dans $[0,1]$, engendrant $\underline{\underline{F}}_0^o$. Nous lui associons sur $\mathbb{R}\times X$ $\hat{\Phi}(s,x) = \Phi(\Theta_s x)$, et sur X $\varphi = \Phi|_X$, qui engendre $\underline{\underline{X}}^0$. Alors $\varphi\circ\sigma$ engendre $\underline{\underline{X}}^1$ et

LEMME 3. <u>Pour toute v.a.</u> H , $\underline{\underline{X}}^0$<u>-mesurable</u>, <u>à valeurs dans</u> $[0,1]$, <u>on a</u>

(17) $\qquad \mu\{\varphi\circ\sigma = H\} = 0$

DEMONSTRATION. Nous nous plaçons sur $\hat{\Omega}$. La fonction $(s,x)\mapsto H(x)$ est trace sur $\hat{\Omega}$ d'un processus prévisible ; elle est donc $\hat{\underline{\underline{F}}}_0^o$-mesurable. Nous la noterons pour un instant $H(\hat{\omega})$. Par construction, le temps d'arrêt V_1 est $\underline{\underline{F}}_0^o$-mesurable (choix du compteur fondamental, fin du § II). Nous lisons sur $\hat{\Omega}$ $\hat{\Theta}_{V_1}(s,x)=(F(x),x)$, donc $\hat{\Phi}(\hat{\Theta}_{V_1}(s,x))=\hat{\Phi}(F(x),x) = \Phi(\Theta_{F(x)}x) = \varphi(\sigma x)$. Si nous écrivons que le flot est diffus, i.e.

$$P\{\Phi\circ\Theta_{V_1} = H\} = 0 \qquad (\text{ noter que } V_1 \text{ est partout } >0)$$

et que nous lisons cela sur $\hat{\Omega}$, il vient

$$\int\mu(dx)ds\, I_{\{0<s\leq F(x)\}}I_{\{\varphi(\sigma x)=H(x)\}} = 0$$

ce qui nous donne (17).

Construisons alors - la mesure μ étant σ-finie sur $\underline{\underline{X}}^0$ - une fonction $A(x,t)$ sur $X\times[0,1]$, croissante et continue à droite en t, mesurable sur $\underline{\underline{X}}^0\times\underline{\underline{B}}([0,1])$, telle que

$$\text{pour tout } U\in\underline{\underline{X}}^0 \text{ et tout } t \;,\; \mu\{U,\ \varphi\circ\sigma\leq t\} = \int_U A(x,t)\mu(dx)$$

La condition (17) entraîne que $A(x,.)$ est p.s. continue (prendre pour H le premier saut de $A(x,.)$ d'amplitude $\geq\varepsilon$, ou 0 s'il n'en existe pas). Quitte à remplacer $A(x,t)$ par t sur un ensemble de mesure nulle, nous pouvons supposer que $A(x,.)$ est continue pour tout x, et que pour tout x $A(x,0)=0$, $A(x,1)=1$. Soit alors pour $t\in[0,1]$

$$B(x,t) = \inf\{s : A(x,s)\geq t\}$$

et soit $c(x) = B(x,\varphi\circ\sigma(x))$. Pour tout $U\in\underline{\underline{X}}^0$, pour tout t, nous avons

(18) $\qquad \mu\{U,\ c\leq t\} = t\mu(U)$

Nous savons que l'intervalle $[0,1]$, muni de la mesure de Lebesgue, est un espace probabilisé suffisamment riche pour que l'on puisse y construire un P.A.I. $(\zeta_s(t))_{s\geq 0}$, à trajectoires càdlàg. , de fonction de LEVY g . Nous poserons sur X

$$(19) \qquad \zeta^1_s(x) = \zeta_s(c(x)) \qquad (s \geqq 0)$$

Les v.a. ζ^1_s sont toutes $\underline{\underline{X}}^1$-mesurables, puisque $\varphi\circ\sigma$, c , sont $\underline{\underline{X}}^1$-mesurables ; conditionnellement à $\underline{\underline{X}}^0$, le processus (ζ^1_s) est un P.A.I., i.e.

$$(20) \qquad \text{si } A\in\underline{\underline{X}}^0 \;,\; \mu\{A,\ \zeta^1_{s_1}\in I_1,\dots,\zeta^n_{s_n}\in I_n\}=\mu(A)\,\Pi(s_1,I_1,\dots,s_n,I_n)$$

Maintenant, nous définissons $\zeta^0_s(x)=\zeta^1_s(\tau x)$, $\zeta^2_s(x)=\zeta^1_s(\sigma x)$, et ainsi de suite vers l'avant et vers l'arrière. Pour tout n, (ζ^n_s) est un processus nul pour s=0, $\mathcal{R}\times\underline{\underline{X}}^n$-mesurable , indépendant de $\underline{\underline{X}}^{n-1}$, avec une loi conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{X}}^{n-1}$ qui est celle d'un P.A.I.. Cela résulte de l'invariance de la mesure μ par σ !

Cette construction étant faite, rien n'est plus facile que de construire le processus $(Z_t(x))_{t\in\mathbb{R}}$. Faisons le pour $t\geqq 0$. Rappelons que $V_0(x) = 0$, $V_n(x)=F(x)+F(\sigma x)+\dots+F(\sigma^{n-1}x)$. Soit n l'entier défini par

$$V_n(x)<t\leqq V_{n+1}(x)$$

Nous posons alors

$$Z_t(x) = \zeta^0_{V_1}(x)+\zeta^1_{V_2-V_1}(x)+\dots+\zeta^{n-1}_{V_n-V_{n-1}}(x)+\zeta^n_{t-V_n(x)}(x)$$

La construction vers l'arrière se fait de même. Il faut se rappeler ici que ζ^0 est $\underline{\underline{X}}^0$-mesurable, V_1 $\underline{\underline{X}}^{-1}$-mesurable, donc V_1 et ζ^0 sont indépendants, et de même ζ^1 est indépendant de V_1, V_2-V_1, ζ^0, etc. Nous laissons alors au lecteur la vérification de (13), (15) et (16), qui ne présente aucun mystère. C'est la propriété de Markov forte des P.A.I. !

CONCLUSION ET PROBLEMES OUVERTS

Nous avons vu que tous les flots diffus contiennent tous les flots de P.A.I.. Par exemple, le flot brownien (coordonnées B_t , $t\in\mathbb{R}$) contient un compteur $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$, tel que

$$\underline{\underline{T}}(N_t, t\leqq 0) \subset \underline{\underline{T}}(B_t, t\leqq 0)$$

et qui est un compteur de Poisson . Il est facile de voir que l'inclusion des tribus doit être <u>stricte</u> . Mais en revanche, on ignore si l'on peut avoir à l'infini

$$\underline{\underline{T}}(N_t, t\in\mathbb{R}) = \underline{\underline{T}}(B_t, t\in\mathbb{R}) .$$

D'autre part, le problème inverse, de savoir si le flot de Poisson contient une hélice brownienne, n'est pas résolu par la méthode de BENVENISTE, le flot de Poisson n'étant pas diffus.