SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Convergence faible de processus, d'après Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 109-119
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__109_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

CONVERGENCE FAIBLE DE PROCESSUS, D'APRES MOKOBODZKI

par P.A. Meyer

D'après le théorème de section optionnel, un processus optionnel borné U est uniquement déterminé par les nombres $E[U_T I_{\{T<\infty\}}]$ associés à tous les temps d'arrêt T. En effet, si V est un second processus optionnel tel que $E[U_T I_{\{T<\infty\}}]=E[V_T I_{\{T<\infty\}}]$ pour tout T, un raisonnement familier montre que $E[U_T|\underline{\underline{F}}_T]=E[V_T|\underline{\underline{F}}_T]$ p.s. pour tout T, et alors $U_T=V_T$ p.s., et finalement le théorème de section optionnel montre que U et V sont indistinguables.

Il en résulte que si nous avons des processus optionnels uniformément bornés U^n, et si $E[U^n_T I_{\{T<\infty\}}]$ converge pour tout T, il existe <u>au plus</u> un processus optionnel U tel que $\lim_n E[U^n_T I_{\{T<\infty\}}] = E[U_T I_{\{T<\infty\}}]$ pour tout T. Une telle situation de convergence se rencontre en théorie des surmartingales - mais il s'agit alors de processus croissants, et l'<u>existence</u> de U ne pose aucun problème. Plus récemment, A. BENVENISTE, dans un problème de théorie des flots, a eu affaire à une situation de convergence où l'existence du processus limite U n'était absolument pas évidente. C'est lui qui a posé à MOKOBODZKI le problème de convergence faible dont voici la solution :

THEOREME 1 . <u>Soit</u> $(W,\underline{\underline{G}},P)$ <u>un espace probabilisé complet, muni d'une filtration</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>satisfaisant aux conditions habituelles. Soit</u> (U^n) <u>une suite de processus optionnels, uniformément bornée. On suppose que pour tout temps d'arrêt</u> T, $E[U^n_T I_{\{T<\infty\}}]$ <u>a une limite. Il existe alors un processus optionnel</u> U (unique) <u>tel que</u> $\lim_n E[U^n_T I_{\{T<\infty\}}] = E[U_T I_{\{T<\infty\}}]$ <u>pour tout temps d'arrêt</u> T.

Nous verrons au dernier paragraphe comment on peut affaiblir la condition que la suite soit uniformément bornée. Le théorème suivant se déduit aussitôt du théorème 1, appliqué aux $V^n= U^n/1+|U|^n$:

THEOREME 2. <u>Avec les mêmes notations, si la suite</u> (U^n) <u>est telle que</u> $U^n_T I_{\{T<\infty\}}$ <u>converge en probabilité pour tout</u> T (sans restriction de grandeur), <u>il existe un processus optionnel</u> U <u>tel que</u> $U_T I_{\{T<\infty\}} = \underset{p}{\lim}{}_n\, U^n_T I_{\{T<\infty\}}$ <u>pour tout</u> T .

Tout le reste de l'exposé va être consacré à la démonstration du théorème 1.

PREMIERE PARTIE : OÙ L'ON SE RAMENE À UNE SITUATION CANONIQUE

La démonstration du lemme 1 ci-dessous est importante : elle servira à nouveau dans la seconde étape .

La tribu optionnelle est engendrée sur $\mathbb{R}_+\times W$ par les processus adaptés à trajectoires càdlàg.. Il existe donc un processus (Φ_t), défini sur W et adapté, à valeurs dans le cube $\mathbb{I}=\bar{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, et à trajectoires càdlàg., tel que chacun des processus U^n soit mesurable par rapport à la tribu engendrée par Φ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. Soit M une constante majorant en module les U^n. D'après un théorème classique de DOOB (cf. PP[1] I.18), il existe des fonctions boréliennes u^n sur $\mathbb{I}$, bornées par M en module, et telles que

(1) $$U^n_t(w) = u^n(\Phi_t(w)) \qquad (t,w)\in\mathbb{R}_+\times W \quad .$$

Nous désignons par $(\underline{\underline{H}}_t)$ la famille de tribus $\underline{\underline{T}}(\Phi_s, s\leq t)$, complétée et rendue continue à droite de la manière habituelle. Nous montrons alors qu'il suffit de résoudre le problème relativement à $(\underline{\underline{H}}_t)$.

LEMME 1. <u>Supposons qu'il existe un processus</u> V, <u>optionnel par rapport à</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$, <u>et tel que</u> $\lim_n E[U^n_T I_{\{T<\infty\}}] = E[V_T I_{\{T<\infty\}}]$ <u>pour tout t.d'a.</u> T <u>de</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$. <u>Alors</u> (V est optionnel par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$ et) $E[V_S I_{\{S<\infty\}}] = \lim_n E[U^n_S I_{\{S<\infty\}}]$ <u>pour tout temps d'arrêt</u> S <u>de</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$.

DEMONSTRATION. Le processus croissant $I_{\{t\geq S\}}$ admet une projection duale optionnelle (A_t) sur la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$, et l'on a (les U^n étant optionnels par rapport à $(\underline{\underline{H}}_t)$, ainsi que V)

$$E[U^n_S I_{\{S<\infty\}}] = E[\int_0^\infty U^n_s dA_s] \ , \ E[V_S I_{\{S<\infty\}}] = E[\int_0^\infty V_s dA_s]$$

Nous pouvons écrire $E[\int_0^\infty U^n_s dA_s] = E[\int_0^\infty U^n_{c_s} I_{\{c_s<\infty\}} ds]$, où $c_s = \inf\{t : A_t>s\}$ est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{H}}_t)$. Nous intervertissons les intégrations E et $\int ds$: $E[U^n_{c_s} I_{\{c_s<\infty\}}]$ converge vers $E[V_{c_s} I_{\{c_s<\infty\}}]$, avec domination par $MP\{c_s<\infty\}$, dont l'intégrale vaut $ME[A_\infty] \leq M$. Ainsi $E[\int U^n_s dA_s]$ tend vers $E[\int V_s dA_s] = E[V_S I_{\{S<\infty\}}]$. $\square$

NOTATION. Ω <u>est l'ensemble des applications càdlàg.</u> <u>de</u> $\mathbb{R}_+$ <u>dans</u> $\mathbb{I}$, <u>avec ses applications coordonnées</u> ι_t , <u>ses tribus</u> $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{T}}(\iota_s, s\in\mathbb{R}_+)$, $\underline{\underline{F}}^\circ_t = \underline{\underline{T}}(\iota_s, s\leq t)$.

1. Probabilités et potentiel, nouvelle édition des chap.I-IV .

Nous déménageons sur Ω : soit φ l'application de W dans Ω qui à $w\in W$ associe la trajectoire $\Phi_{\bullet}(w)\in\Omega$. Elle est $\underline{\underline{G}}/\underline{\underline{F}}$-mesurable, et nous notons λ la mesure image $\varphi(P)$.

Nous désignons par $(\underline{\underline{F}}_t)$ la famille obtenue en augmentant la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$ de tous les ensembles λ-négligeables ; elle satisfait aux conditions habituelles. Nous posons

$$(2) \qquad f^n_t(\omega) = f^n(t,\omega) = u^n(\imath_t(\omega))$$

(f^n) est donc un processus défini sur Ω, optionnel par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, et tel que $f^n_t(\varphi(w))=U^n_t(w)$. Le lemme suivant, à la fois nous transporte sur l'espace canonique Ω, et nous débarrasse des temps d'arrêt. Nous notons E, à la fois l'espérance $\int dP$ sur W et l'espérance $\int d\lambda$ sur Ω .

LEMME 2. a) Pour toute v.a. $\underline{\underline{F}}$-mesurable S sur Ω à valeurs dans $[0,\infty]$, $E[f^n_S I_{\{S<\infty\}}]$ converge. On peut même affirmer que $f_S I_{\{S<\infty\}}$ converge faiblement dans $L^1(\lambda)$.

b) Supposons qu'il existe un processus mesurable borné (f_t) sur Ω tel que pour toute v.a. S comme ci-dessus, $E[f^n_S I_{\{S<\infty\}}]$ converge vers $E[f_S I_{\{S<\infty\}}]$. Soit (g_t) la projection optionnelle de (f_t) sur la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Alors le processus $U_t(w)=f_t(\varphi(w))$ sur W satisfait à l'énoncé du théorème 1.

DEMONSTRATION. b) . D'après le lemme 1, il suffit de vérifier que pour tout temps d'arrêt R de $(\underline{\underline{H}}_t)$, $E[U^n_R I_{\{R<\infty\}}]$ tend vers $E[U_R I_{\{R<\infty\}}]$. Or il est très facile de vérifier qu'il existe un emps d'arrêt T de $(\underline{\underline{F}}_t)$ tel que $R=T\circ\varphi$. Alors

$$\begin{aligned} E_P[U_R I_{\{R<\infty\}}] &= E_\lambda[g_T I_{\{T<\infty\}}] \quad (\text{ car } U_R=(g_T)\circ\varphi = \text{ et } \lambda=\varphi(P) \text{ }) \\ &= E_\lambda[f_T I_{\{T<\infty\}}] \quad (\text{ déf. de la proj. optionnelle }) \\ &= \lim_n E_\lambda[f^n_T I_{\{T<\infty\}}] \\ &= \lim_n E_P[U^n_R I_{\{R<\infty\}}] \text{ .} \end{aligned}$$

Pour prouver a), raisonnons en sens inverse : comme $E_P[U^n_R I_{\{R<\infty\}}]$ converge pour tout t.d'a. de $(\underline{\underline{H}}_t)$, $E_\lambda[f^n_T I_{\{T<\infty\}}]$ converge pour tout temps d'arrêt T de $(\underline{\underline{F}}_t)$. Alors $E_\lambda[f^n_S I_{\{S<\infty\}}]$ converge pour toute v.a. positive S : c'est le raisonnement du lemme 1, car celui-ci n'a pas utilisé le fait que S était un temps d'arrêt. La convergence faible dans L^1 s'obtient en remplaçant S par $SI_K+(+\infty)I_{K^c}$, K parcourant $\underline{\underline{F}}$.

Nous allons maintenant oublier la situation de départ.

SECONDE PARTIE : CHOIX DE BONNES TOPOLOGIES

Récapitulons les notations et les hypothèses.

Nous avons un espace mesurable canonique $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, muni d'une mesure de probabilité λ . Soit $(X,\underline{\underline{X}}) = \mathbb{R}_+\times\Omega$, muni de la tribu produit. Nous avons une suite uniformément bornée de fonctions mesurables $f^n(t,\omega)$ sur X. Nous conviendrons de poser $f^n(+\infty,\omega)=0$ pour éviter les $I_{\{\ \}}$ à l'avenir. Alors notre hypothèse est

(3) pour toute $S : \Omega\mapsto\overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable, $\lim_n \int f^n(S(\omega),\omega)\lambda(d\omega)$ existe .

et notre problème est : <u>existe t'il</u> f <u>mesurable sur</u> X <u>telle que cette limite soit égale</u>, <u>pour tout</u> S, <u>à</u> $\int f(S(\omega),\omega)\lambda(d\omega)$?

Les familles de tribus ont entièrement disparu. Nous adoptons les notations suivantes :

(4) λ_S est la mesure sur X, image de $\lambda I_{\{S<\infty\}}$ par l'application $\omega \mapsto (S(\omega),\omega)$ de $\{S<\infty\}$ dans X ,

(5) $\tilde{f}_S$ est la classe/λ , limite faible des v.a. $f^n(S(\omega),\omega)$ sur Ω .

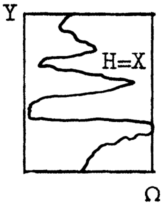
Nous choisissons maintenant des topologies sur Ω et X.

a) L'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est lusinien non dénombrable (PP IV.19, p.147), donc isomorphe à l'intervalle [0,1] muni de sa tribu borélienne (PP. III.80, p.249). Nous munissons Ω de la topologie de [0,1] - compacte métrisable - au moyen de cet isomorphisme.

b) En trois étapes, nous munissons X d'une topologie <u>polonaise</u> rendant continues les applications boréliennes f^n , et jouissant de quelques autres propriétés plaisantes .

- Nous munissons d'abord X de la topologie produit de $\mathbb{R}_+\times\Omega$.
- Nous considérons l'application $g(t,\omega)=(f^n(t,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans l'espace polonais $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Le graphe G de g dans $X\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un borélien du produit (PP I.12, p.15), et l'application $x\mapsto(x,g(x))$ est une bijection de X sur G, donc un isomorphisme borélien entre X et G (PP III.21, p.77). Si nous transportons sur X la topologie de G par cet isomorphisme, nous avons une topologie plus fine que la topologie produit, lusinienne, et rendant continues les applications f^n .
- Nous renforçons cette topologie, pour la rendre polonaise . D'après PP III,79, p.247, il existe un <u>fermé</u> Y de l'espace $\Sigma=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

et une application continue bijective q de Y sur X . Notons p la projection $(t,\omega) \mapsto \omega$ de X sur Ω (continue) et h l'application continue $p \circ q$ de Y sur Ω . Soit H le graphe de h ; faisons un dessin (ci-contre).



L'application $(y,\omega) \mapsto q(y)$ est une bijection de H sur X, dont la bijection réciproque est $(t,\omega) \mapsto (q^{-1}(t,\omega),\omega)$. Si nous identifions H à X par ces bijections, la topologie de H est plus **forte** que la topologie de X (seconde étape) , donc les f^n sont encore continues. D'autre part, H est fermé dans $Y \times \Omega$ polonais, donc polonais. Ainsi, nous avons sur X une topologie définitive, polonaise, et rendant continues les f^n et p.

Nous établissons maintenant un lemme important :

LEMME 3. <u>Soit</u> $(B_i)_{i\in I}$ <u>une famille quelconque de boréliens de</u> X, <u>telle que pour tout</u> $\omega\in\Omega$ <u>la coupe</u> $B_i(\omega)$ <u>soit fermée dans</u> X. <u>Il existe alors une partie dénombrable</u> J <u>de</u> I <u>telle que</u>, <u>pour</u> λ-<u>presque tout</u> ω, <u>on ait</u>

$$\cap_{i\in I} B_i(\omega) = \cap_{i\in J} B_i(\omega) \quad .$$

DEMONSTRATION. Nous nous sommes débrouillés plus haut de telle manière, que les B_i sont simplement des boréliens à coupes fermées dans $Y \times \Omega$. Imaginons pour un instant que Y soit la demi-droite $\mathbb{R}_+$. Alors un borélien à coupe fermées B est uniquement déterminé par la connaissance des "débuts" après r :

$$D^r(\omega) = \inf \{ t \geqq r : (t,\omega)\in B \} \quad \text{pour r rationnel ,}$$

et le théorème est alors classique : pour chaque rationnel r on choisit un ensemble dénombrable J_r tel que (D_i^r désignant le début après r pour B_i)

$$\inf_{i\in J_r} D_i^r = \operatorname{inf\,ess}_{i\in I} D_i^r$$

et on pose $J = \bigcup_r J_r$. Le lemme 4 se démontre alors exactement de la même manière : il faut seulement remplacer les rationnels par un ensemble dénombrable dense dans Y, et les débuts par des débuts <u>lexicographiques</u> dans $Y \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Voici le second lemme fondamental. Nous rappelons que si X est polonais, une partie de X est polonaise si et seulement si elle est intersection d'une suite d'ouverts de X (Bourbaki, Top.Gén. chap.IX, § 6, n°1, th.1 - cf. aussi PP III.17, p.73, mais c'est la moitié non démontrée dans PP qui est ici la plus utile).

LEMME 4. <u>Soient</u> F <u>polonais dans</u> X, <u>et</u> A=p(F). <u>Soit</u> K(F) <u>l'ensemble des mesures sur</u> X <u>de la forme</u> λ_S , <u>où</u> S <u>est une application borélienne</u>

<u>de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que</u>

$S(\omega)<\infty \Rightarrow (S(\omega),\omega)\in F$ (le graphe de S passe dans F)

$S(\omega)<\infty$ λ-<u>p.p. dans</u> A

<u>Alors</u> K(F) <u>est polonais pour la topologie étroite des mesures bornées</u> <u>sur</u> X .

DEMONSTRATION. Il s'agit d'un résultat déjà ancien de MOKOBODZKI, démontré pour l'essentiel (lorsque $A=\Omega=[0,1]$ et λ est la mesure de Lebesgue) dans PP IV.42-43, p. 174. L'idée est très simple.

Supposons d'abord que F soit <u>compact métrisable</u> , et soit μ la mesure λI_A . Regardons l'ensemble L des mesures $\theta\geq 0$ sur F dont l'image $p(\theta)$ sur Ω est égale à λI_A : c'est pour la topologie étroite sur F un ensemble convexe compact métrisable, et l'on montre sans peine[1] que l'ensemble des mesures λ_S portées par un graphe de v.a. S est l'ensemble des points extrémaux de L , donc un $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans L (PP 1e éd., chap.XI, T.24), donc polonais. On conclut en remarquant que la topologie de L est bien la topologie étroite sur X : en effet (PP III.58, p.115), sur un ensemble de mesures positives portées par F, la topologie étroite de F et celle de X coïncident.

Lorsque F est seulement polonais, c'est un peu plus délicat. Nous nous débrouillons avec des astuces locales, sans chercher une théorie générale (possible, mais plus compliquée). Rappelons que $X\subset Y\times\Omega$: nous plongeons Y dans un compact métrisable $\overline{Y}$, et notons $\overline{F}$ l'adhérence de F dans $\overline{Y}\times\Omega$, qui est compacte. L'ensemble L des mesures sur $\overline{F}$ dont la projection est λI_A est encore compact métrisable convexe, pour la topologie étroite sur $\overline{F}$; K(F) est l'intersection de l'ensemble ∂_L des points extrémaux de L avec l'ensemble des mesures sur $\overline{F}$ portées par F . Mais F est polonais, donc un $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans $\overline{F}$, et cet ensemble est donc un $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans $\underline{\underline{M}}^+(\overline{F})$ (cf. PP III.60, p.118). Donc K(F) est l'intersection de deux $\underline{\underline{G}}_\delta$, il est polonais dans $\underline{\underline{M}}^+(\overline{F})$, et on revient comme ci-dessus de la topologie étroite sur $\overline{F}$ à celle sur F, puis sur X.

TROISIEME PARTIE : DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Rappelons qu'il s'agit de construire une fonction borélienne f sur X connaissant pour chaque v.a. S la classe $\tilde{f}_S$ de la fonction $f(S(\omega),\omega)$ pour la mesure λ . La méthode consiste à construire des solutions approchées dans certaines parties de X, qu'on recollera en une solution approchée à ε près sur tout X, et enfin on fait tendre ε vers 0 .

1. Pour les détails, cf. PP p.175 .

Rappelons une convention faite au début : toute fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+\times\Omega = X$ est prolongée en une fonction borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, nulle sur $\{+\infty\}\times\Omega$. En particulier les classes $\tilde{f}_S$ sont nulles sur $\{S=\infty\}$, d'après leur définition comme limites faibles des $f^n(S(\omega),\omega)$. Nous notons $[S]$ le graphe d'une v.a. positive S (finie ou non) : $[S] = \{(t,\omega) : t=S(\omega)<\infty\}$.

DEFINITION. Soient g une fonction borélienne sur X, A une partie borélienne de X. Nous disons que g est une minorante (majorante) dans A si, pour toute v.a. S sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ dont le graphe S est contenu dans A, on a $g(S(\omega),\omega) \leqq \tilde{f}_S(\omega)$ λ-p.s. (resp. $\geqq$).

On dit que g est une solution à ε près dans A si $g-\varepsilon I_A$ est une minorante dans A, $g+\varepsilon I_A$ une majorante dans A .

Il existe toujours des minorantes (majorantes) dans A. D'abord $-M$ et $+M$, puisque nous sommes dans le cas borné. Mais aussi $\underline{j}_A$ ainsi définie (

$$\underline{j}_A(t,\omega) = \text{inf ess } \tilde{f}_S(\omega) \quad ([S]\subset A \text{ , S fini p.p. sur } p(A))$$

qui ne dépend que de ω en réalité, et $\overline{j}_A$, le sup ess analogue.

Le lemme suivant est facile.

LEMME 5 . Si g est une majorante dans A, h une minorante dans A, alors pour presque tout ω on a $g(t,\omega) \leqq h(t,\omega)$ pour tout t tel que $(t,\omega)\in A$.

Si des g_n sont des minorantes (majorantes) dans des ensembles A_n disjoints, alors $\Sigma_n g_n I_{A_n}$ est une minorante (majorante) dans $\cup_n A_n$.

DEMONSTRATION. Si l'ensemble $\{(t,\omega)\in A : g(t,\omega)>h(t,\omega)\}$ n'est pas λ-évanescent, il admet une section par une v.a. S non p.s. égale à $+\infty$, et l'on obtient une contradiction.

Soit S une v.a. telle que $[S]\subset A$, et soit $S_n(\omega)=S(\omega)$ si $(S(\omega),\omega)\in A_n$, $S(\omega)=+\infty$ sinon. Alors $g(S_n(\omega),\omega) \leqq \tilde{f}_{S_n}(\omega)$ p.s.. Les ensembles $\{S_n<\infty\}$ étant disjoints, on somme sur n.

DEFINITION. Un borélien $A\subset X$ est ε-adéquat s'il existe dans A une solution à ε près, et si A est un F_σ (réunion dénombrable de fermés) à coupes $A(\omega)$ ouvertes dans $X(\omega)$ (pour la topologie définitive de X).

Nous allons démontrer le lemme crucial suivant :

LEMME 6 . Tout ensemble F polonais dans X, non évanescent, contient un ensemble ε-adéquat A non évanescent.

La démonstration du lemme 6 est une pure merveille. Avant de la donner, montrons comment le lemme 6 entraîne le théorème 1.

Considérons une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles ε-adéquats deux à deux disjoints non évanescents. D'après le lemme 3, il existe une partie dénombrable J de I telle que $\cup_{i\in J} A_i = \cup_{i\in I} A_i$ à ensemble évanescent près. Donc les A_i, $i\in I\setminus J$ sont évanescents, et donc I=J. Autrement dit, I est dénombrable. On a utilisé ici le fait que les coupes des ensembles adéquats sont ouvertes. On utilise maintenant le fait que les ensembles adéquats sont des F_σ, pour dire ceci : le complémentaire F de $\cup_i A_i$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$, donc polonais. S'il n'est pas évanescent, il contient un ensemble ε-adéquat non évanescent (lemme 6) et la famille $(A_i)_{i\in I}$ n'est pas maximale.

Le résultat de dénombrabilité indiqué ci-dessus permet d'appliquer le théorème de Zorn, et d'en déduire l'existence d'une famille maximale $(A_k)_{k\in K}$. D'après ce qui précède, $\cup_k A_k = X$ à ensemble évanescent près. Si g_k est solution à ε près dans A_k, $g_\varepsilon = \Sigma_k g_k I_{A_k}$ est solution à ε près dans $\cup_k A_k$, donc dans X . Faisons cela pour tout ε. Comme $g_\varepsilon-\varepsilon$ est une minorante, $g_{\varepsilon'}+\varepsilon'$ une majorante, on a $g_\varepsilon-\varepsilon \leqq g_{\varepsilon'}+\varepsilon'$ à ensemble évanescent près, d'où en intervertissant $|g_\varepsilon-g_{\varepsilon'}|\leqq \varepsilon+\varepsilon'$ à ensemble évanescent près, et lorsque $\varepsilon \to 0$ convergence uniforme, à ensemble évanescent près, vers une fonction f qui résout notre problème.

DEMONSTRATION DU LEMME 6 . Nous supposerons que F=X pour simplifier un peu. Dans le cas général, K(F) a une définition un peu plus compliquée (lemme 4), et $\varepsilon/4$ doit être remplacé par $\varepsilon\lambda(p(F))/4$ dans la formule (6).

Rappelons que l'ensemble K(X) de toutes les mesures λ_S, où S est finie λ-p.p., est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ (lemme 4). Les f^n étant continues bornées sur X , la fonction qui à $\lambda_S\in K(X)$ associe $\ell(\lambda_S)= \lim_n \int f^n(S(\omega),\omega)\lambda(d\omega)$ est une limite de fonctions continues sur K(X), donc une fonction de première classe de Baire. D'après le théorème de Baire, IL EXISTE S TELLE QUE λ_S SOIT UN POINT DE CONTINUITE DE ℓ SUR K(X).

Qu'est ce que cela signifie ? Qu'il existe un voisinage de λ_S pour la topologie étroite, tel que si $\lambda_T\in K(X)$ appartient à ce voisinage, on ait

$$|\ell(\lambda_S)-\ell(\lambda_T)| \leqq \varepsilon/4 \tag{6}$$

Un tel voisinage peut toujours être pris de la forme

(7) $\{\ \mu\in K(X) : |\mu(c_i)-\lambda_S(c_i)|<1,\ i=1,2,\dots,n\ \}$

où $c_1,\dots,c_n$ sont des fonctions continues bornées sur X. Soit alors V le "voisinage tubulaire" autour de $[S]$ dans X

(8) $V = \{(t,\omega) : |c_i(t,\omega)-c_i(S(\omega),\omega)|<1\ ,\ i=1,\dots,n\ \}$.

Si T est finie p.p., avec un graphe passant dans V p.p., λ_T satisfait à (7), donc $|\ell(\lambda_S)-\ell(\lambda_T)| < \varepsilon/4$. Considérons maintenant la fonction sur Ω

(9) $\bar{j}_V(\omega) = \text{sup ess } \tilde{f}_T(\omega)(\ [T]\subset V\ ,\ T \text{ fini p.p. sur } p(V))$

et $\underline{j}_V$ qui se définit de manière analogue. On a $\bar{j}_V \geqq \tilde{f}_S$ p.s.. Il existe une suite de graphes $[T_n]$ passant dans V (avec $T_n<\infty$ p.p.) tels que $\bar{j}_V = \sup_n \tilde{f}_{T_n}$ p.s.. Soit $\eta > 0$; utilisant une section convenable de l'ensemble $\cup_n[T_n]$, on construit une v.a. T (finie p.s., à graphe dans V) telle que $\tilde{f}_T \geqq \bar{j}_V-\eta$ p.s.. Comme on a $\int\tilde{f}_T d\lambda = \ell(\lambda_T) \leqq \ell(\lambda_S)+\varepsilon/4$ $= \int\tilde{f}_S d\lambda + \varepsilon/4$, et comme η est arbitraire, on a

$$\int\bar{j}_V d\lambda \leqq \int\tilde{f}_S d\lambda + \varepsilon/4 \quad \text{et de même} \quad \int\tilde{f}_S d\lambda - \varepsilon/4 \leqq \int\underline{j}_V d\lambda$$

Donc $\int(\bar{j}_V-\underline{j}_V)d\lambda \leqq \varepsilon/2$, et l'ensemble où $\bar{j}_V-\underline{j}_V \leqq \varepsilon$ n'est pas évanescent.

D'après la propriété de Lusin, il contient un compact L non évanescent <u>sur lequel</u> S <u>est continue</u> , et nous posons $A=V\cap p^{-1}(L)$. C'est l'ensemble ε-adéquat cherché. En effet,

$\bar{j}_V(t,\omega)=\bar{j}_V(\omega)$ est une majorante dans V, donc dans A, et de même $\underline{j}_V(t,\omega)=\underline{j}_V(\omega)$ est une minorante dans A , et ces deux fonctions diffèrent de moins de ε dans A, donc chacune d'elles est solution à ε près.

A est un borélien à coupes ouvertes.

A est un $\underline{\underline{F}}_\sigma$: en effet, V est réunion des ensembles

$$\{(t,\omega) : |c_i(t,\omega)-c_i(S(\omega),\omega)| \leqq 1-1/n\ ,\ i=1,\dots,n\ \}$$

dont l'intersection avec $p^{-1}(L)$ est fermée, du fait que S est continue sur L compact. $\square$

QUATRIEME PARTIE : SUITES NON UNIFORMEMENT BORNEES

Il nous faut revenir aux hypothèses du début : suite (U^n) de processus optionnels telle que pour tout t.d'a. T, $U^n_T I_{\{T<\infty\}}$ converge faiblement dans L^1 , et recherche d'un processus optionnel U " recollant" toutes ces limites faibles.

MOKOBODZKI fait une première remarque, qui allège les problèmes d' intégrabilité : les v.a. $U^n_T I_{\{\ \}}$ convergent faiblement, et sont donc uniformément intégrables (PP II.25, p.43 : encore une application du théorème de Baire !). Donc si nous tronquons chaque U^n à n, en le remplaçant par $U_t^n I_{\{|U_t^n|<n\}}$, nous avons encore convergence faible, vers la même limite. On ne perd donc pas de généralité en supposant que chaque processus U^n (chaque fonction f^n) est borné.

Maintenant, il s'offre à nous deux possibilités.

a) La première consiste à reprendre toute la démonstration, et d'abord à établir la convergence de $E[U_S^n I_{\{S<\infty\}}]$ pour toute v.a. S, à la manière des lemmes 1 et 2. Soit A la projection duale optionnelle du processus croissant $I_{\{t\geqq S\}}$. Nous avons avec les notations du lemme 1

$$E[U_S^n I_{\{S<\infty\}}] = \int_0^\infty E[U_{c_s}^n I_{\{c_s<\infty\}}]\,ds$$

Nous avons que $\{c_s<\infty\} = \{A_\infty > s\}$, et que savons nous sur A_∞ ? Que[1] $E[e^{pA_\infty}] < \infty$ pour p<1. Ainsi, pour tout p<1 il existe une constante M_p telle que $P\{c_s<\infty\} \leqq M_p e^{-ps}$. Supposons alors qu'il existe un module d'intégrabilité uniforme pour la famille (U^n) : une fonction croissante φ sur $\mathbb{R}_+$, continue et nulle en 0, telle que pour tout n et tout temps d'arrêt T

$$\int U_T^n I_{\{T<\infty\}} dP \leqq \varphi(P\{T<\infty\})$$

Nous supposons aussi que $\sup\limits_{n,T} E[U_T^n I_{\{T<\infty\}}] \leqq C$. Majorant alors

$E[U_{c_s}^n I_{\{c_s<\infty\}}]$ par C sur [0,1], par $\varphi(P\{c_s<\infty\})$ sur $[1,\infty[$, nous aurons le résultat voulu par convergence dominée si nous savons que

$$\int_1^\infty \varphi(M_p e^{-ps})ds < \infty$$

ou, sous une forme plus agréable, dès que

$$\int_0^1 \varphi(u)\,\frac{du}{u} < \infty$$

Par exemple, dès que $\sup_{n,T} E[(U_T^n I_{\{T<\infty\}})^r]$ est borné par une constante M pour un r>1, Hölder nous dit que (q étant l'exposant conjugué)

$$E[U_T^n I_{\{T<\infty\}}] \leqq M(P\{T<\infty\})^{1/q}$$

et $\varphi(u)=Mu^{1/q}$ satisfait à la propriété précédente. On pourrait raffiner de bien des manières.

1. $E[A_\infty^n] \leqq n!$. Ce sont des inégalités connues depuis longtemps pour le cas prévisible (PP 1e éd., VII.59). Pour le cas optionnel, cf. le sém.X, cours sur les intégrales stochastiques, chap.V.

On voit que le passage de la première partie aux hypothèses de la seconde partie ne s'effectue pas sans restriction. En revanche, le reste de la démonstration n'exige plus que la suite soit bornée, et s'étend sans changement.

b) Il est plus intéressant de remarquer que la convergence des $E[U^n_S I_{\{S<\infty\}}]$, pour S non optionnel, n'est pas une condition indispensable. Supposons par exemple qu'il existe une martingale uniformément intégrable $Y_t=E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ qui majore tous les $(|U^n_t|)$ - si Y n'appartient pas à $\underline{\underline{H}}^1$, Y_S n'est pas nécessairement intégrable pour S non optionnel.

Quitte à ajouter $\varepsilon > 0$ à la v.a. positive Y, nous pouvons supposer que la mesure Q=YP est équivalente à P. Appliquant alors le théorème 1 aux processus optionnels bornés U^n_t/Y_t et à la mesure Q, nous obtenons une réponse positive à notre problème initial, sans savoir qu'il y a convergence des $E[U^n_S I_{\{S<\infty\}}]$ pour S non optionnel.

Avec un peu plus de travail, on peut avoir le même résultat en supposant simplement que les U^n sont majorés en module par une surmartingale positive Y : il y a une localisation et un recollement à faire.

BIBLIOGRAPHIE

G. MOKOBODZKI. Limite faible d'une suite de fonctions boréliennes. Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, 1975. A paraître .

La référence exacte est : Séminaire de théorie du potentiel de Paris. Volume n°2. p.219-259. Lecture Notes in M. 563. Springer-Verlag 1976.