MARC YOR

Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 481-500

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__481_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975

SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES OPTIONNELLES ET UNE SUITE REMARQUABLE DE FORMULES EXPONENTIELLES

par Marc YOR

INTRODUCTION

L'origine de ce travail a été la remarque suivante : si X est une martingale locale quasi continue à gauche, et dont les sauts sont uniformément bornés, on peut associer à X au moins deux formules exponentielles intéressantes, à savoir l'exponentielle de C. Doléans

$$E(X)_t = \exp \{ X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t \} \prod_{s \leq t} (1+\Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

et une seconde exponentielle

$$E_{\infty}(X)_t = \exp \{ X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t - \int \nu_t(dx)(e^x - 1 - x) \}$$

ν étant la " mesure de Lévy" de X, c'est à dire la projection (duale !) prévisible de la mesure $\eta(dt \times dx) = \sum_{s>0} I_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \varepsilon_s(dt) \varepsilon_{\Delta X_s}(dx)$.

On construit ci-dessous une suite de martingales locales $E_n(X)$ telle que $E_1(X) = E(X)$ et, au moins formellement, $E_n(X) \xrightarrow[n \to \infty]{} E_{\infty}(X)$. De plus, ces martingales locales permettent de caractériser le processus croissant $\langle X^c, X^c\rangle$ et la mesure prévisible ν .

On donne également une nouvelle expression de la formule d'Ito associée à X - sous une condition d'intégrabilité - où intervient de manière naturelle une intégrale stochastique optionnelle.

NOTATIONS.

Les notations utilisées sont principalement celles du " Cours sur les intégrales stochastiques" de P.A.Meyer, qui figure dans ce volume (référence [5] de la bibliographie). En particulier, on considère les espaces $\underline{\underline{M}}$ (martingales de carré intégrable), $\underline{\underline{W}}$ (martingales à variation intégrable), $\underline{\underline{L}}$ (martingales locales), $\underline{\underline{V}}$ (processus à variation finie)... définis à partir d'un espace probabilisé complet $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$, complet, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, vérifiant les conditions habituelles.

On dit que X vérifie localement la propriété (P) (le long de la suite (T_n)) s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt, $T_n \uparrow \infty$ p.s., telle que pour tout n $X^{T_n} = X_{.\wedge T_n}$ vérifie (P). Ainsi un processus X est dit localement borné dans L^p s'il existe des $T_n \uparrow \infty$ p.s. et tels que

$$\sup_{0 \leq s < \infty} E[\, |X_{s\wedge T_n}|^p \,] < \infty$$

Par exemple, $\underline{\underline{M}}_{loc}$ est l'espace des martingales locales, localement de carré intégrable. Enfin, la notation suivante permet de simplifier de nombreuses égalités entre semi-martingales : si X et Y sont adaptés, on dit qu'ils sont <u>associés</u> si $X-Y \in \underline{\underline{L}}$, et on note $X \equiv Y$ ($\underline{\underline{L}}$) (X est <u>congru</u> à Y modulo $\underline{\underline{L}}$) , ou simplement $X \equiv Y$.

1. UN LEMME FONDAMENTAL ET QUELQUES CONSEQUENCES

1.1. Les intégrales stochastiques optionnelles apparaîtront très souvent dans tout le travail. Montrons tout d'abord que l'extension de l'intégrale stochastique aux intégrands optionnels faite en [5] est "maximale".

Rappelons l'inégalité générale de Kunita-Watanabe obtenue en [5] : si H et K sont deux processus $\underline{\underline{F}}\otimes\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurables, et $M,N \in \underline{\underline{M}}$, on a

$$\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d[M,N]|_s \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d[N,N]_s\right)^{1/2} \text{ p.s.}$$

En particulier, si H est un processus <u>mesurable</u> vérifiant $E(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s) < \infty$, l'application $N \longrightarrow E(\int_0^\infty H_s d[M,N]_s)$ est continue sur $(\underline{\underline{M}}, \|\cdot\|_2)$, et donc il existe une unique martingale de carré intégrable, notée H.M, telle que

$$\forall\, N \in \underline{\underline{M}} \ , \ E(\, [(H\cdot M),N]_\infty \,) = E(\int_0^\infty H_s \, d[M,N]_s \,)$$

Pour continuer, nous énonçons le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> . L'application de projection optionnelle $H \longrightarrow {}^1H$ définie sur les processus mesurables bornés se prolonge de façon unique en une application linéaire contractante de $(L^2_m(M), {}_M\|\cdot\|_2)$ dans $(L^2_o(M), {}_M\|\cdot\|_2)$, où

$$L^2_m(M) = \{ H \text{ mesurable} : {}_M\|H\|_2^2 = E(\int_0^\infty H_s^2 \, d[M,M]_s) < \infty \}$$
$$L^2_o(M) = \{ H \text{ optionnel} : {}_M\|H\|_2^2 < \infty \}$$

On note encore $H \longrightarrow {}^1H$ ce prolongement.

<u>Démonstration</u> . Soit H un processus mesurable borné. On a pour tout temps d'arrêt T

$$({}^1H_T)^2 I_{\{T<\infty\}} = (E[H_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T])^2 \leqq E[H_T^2 I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T] = {}^1(H^2)_T I_{\{T<\infty\}}$$

D'après le théorème de section optionnel, on a donc $({}^1H)^2 \leqq {}^1(H^2)$ sauf sur un ensemble évanescent, et donc ${}_M\|{}^1H\|_2 \leqq {}_M\|H\|_2$. Les processus mesurables bornés sont denses dans $L^2_m(M)$, et le lemme est démontré.

<u>Proposition</u> 1 . Soit $H \in L^2_m(M)$. Alors $H\cdot M = {}^1H \cdot M$.

<u>Démonstration</u> . D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, l'application $H \longrightarrow H\cdot M$ définie sur $L^2_m(M)$, à valeurs dans $\underline{\underline{M}}$, est continue (et même contractante). Il en est de même de $H \longrightarrow {}^1H\cdot M$, à l'aide du lemme 1. Il suffit donc de montrer que $H\cdot M = {}^1H\cdot M$ pour H mesurable, borné. Or soit $N \in \underline{\underline{M}}$. Nous avons par définition de $H\cdot M$

$$E([H\cdot M,N]_\infty) = E(\int_0^\infty H_s d[M,N]_s) = E(\int_0^\infty {}^1H_s d[M,N]_s)$$

car le processus à variation intégrable [M,N] est optionnel. Or ceci est l'égalité caractéristique de l'intégrale stochastique optionnelle ${}^1H\cdot M$ ([5], chap.II, déf. 32).

On est ainsi ramené à la théorie de l'intégrale stochastique optionnelle de [5], II.31-35 pour $\underline{\underline{M}}$, et V.19 pour $\underline{\underline{L}}$.

1.2. Comme cela apparaîtra dans la suite dans diverses applications, le lemme suivant permet de résoudre de nombreuses questions liées à la théorie des intégrales stochastiques. Il est dû à Ch. Yoeurp et figure, avec démonstration, dans son article [8] dans ce volume.

<u>Lemme fondamental</u> . Soit $A \in \underline{\underline{V}}$ prévisible, et soit $M \in \underline{\underline{M}}$. Alors $[A,M] = \Delta A\cdot M$. En particulier, [A,M] est une martingale locale.

1.3. Voici deux premières applications de ce lemme fondamental. On commence par une nouvelle démonstration de la formule de M. Pratelli et Ch. Yoeurp ([5], II.37 et V.21).

<u>Proposition 2</u> . Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$. Alors l'intégrale $\Delta M \cdot M$ et le processus $\langle M,M\rangle$ sont bien définis et

(1) $$\Delta M \cdot M = [M,M] - \langle M,M\rangle \ .$$

<u>Démonstration</u>. On renvoie à [5], V.21 pour le début de la proposition. Pour démontrer (1), on peut évidemment supposer $M^c=0$. Par la caractérisation des intégrales stochastiques optionnelles, il suffit de vérifier que pour toute martingale N bornée

$$[\ [M,M]-\langle N,N\rangle\ ,\ N\ ] \equiv \Delta M \cdot [M,N] \quad (\underline{\underline{L}})$$

Or le membre de gauche est égal à

$$\Sigma_{s\leqq \cdot}\ (\Delta M_s)^2 \Delta N_s - [\langle M,M\rangle ,N] \equiv \Sigma_{s\leqq \cdot}\ (\Delta M_s)^2 \Delta N_s = \Sigma_{s\leqq \cdot}\ \Delta M_s \Delta [M,N]_s$$

d'après le lemme fondamental. Cela démontre la proposition.

La proposition suivante montre que l'intégrale stochastique optionnelle H•M est la compensée de l'intégrale de Stieltjes H*M (1), lorsque celle-ci existe. L'énoncé est implicite dans la construction de [5], II.34, mais n'est explicité nulle part dans [5].

<u>Proposition 3</u> . Soient $M \in \underline{\underline{W}}_{loc}$, H un processus optionnel tel que $\int_0^\cdot |H_s||dM_s|$ soit localement intégrable. Alors $\left(\int_0^\cdot H_s^2\, d[M,M]_s\right)^{1/2}$ l'est aussi, et l'on a

(2) $$H \cdot M = H*M - (H*M)^3$$

(on rappelle que $(\ )^3$ désigne la projection duale prévisible).

<u>Démonstration</u> . M appartenant à $\underline{\underline{W}}_{loc}$ n'a pas de partie martingale continue, de sorte que la première phrase de l'énoncé se réduit à l'inégalité $\Sigma_{s\leqq t}\ H_s^2 \Delta M_s^2 \leqq (\ \Sigma_{s\leqq t}\ |H_s||\Delta M_s|)^2$. Vérifions que $H*M-(H*M)^3$ satisfait à la propriété caractéristique de l'intégrale stochastique optionnelle, c'est à dire que pour toute martingale bornée N

$$[H*M-(H*M)^3,N] \equiv H \cdot [M,N]^{(1)} \ (\underline{\underline{L}})$$

Or les deux membres diffèrent par $-[(H*M)^3,M]$, et le lemme fondamental s'applique encore.

(1). Nous employons la notation * au lieu de • pour les intégrales de Stieltjes, <u>seulement</u> lorsqu'il y a risque de confusion.

2. DIFFERENTES EXPONENTIELLES DE SEMI-MARTINGALES

2.1. Rappelons tout d'abord, pour notation et référence par la suite, le théorème suivant dû à C. Doléans, qui est valable pour tout X appartenant à l'espace $\underline{\underline{S}}_0$ des semi-martingales nulles en 0.

Théorème 1 . Soit $X \in \underline{\underline{S}}_0$. Il existe alors une et une seule semi-martingale $\Lambda = E(X)_.$ solution de

$$(e_X) \qquad \Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \Lambda_{s-} dX_s \ .$$

Elle est donnée par la formule

$$(3) \qquad E(X)_t = \exp \{ X_t - \frac{1}{2} < X^c, X^c >_t \} \prod_{s \leq t} (1+\Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \ .$$

La propriété fondamentale d'une exponentielle est sa multiplicativité. Etudions cette propriété pour E.

Proposition 4. Pour $X, Y \in \underline{\underline{S}}_0$ on a

$$(4) \qquad E(X)E(Y) = E(X+Y+[X,Y]) \ .$$

Démonstration . On peut obtenir la formule (4) par calcul direct à partir de la formule (3). On préfère ici appliquer la formule d'Ito à $U_t V_t$, où $U=E(X)$, $V=E(Y)$, ce qui revient à la formule d'intégration par parties $d(UV) = U_- dV + V_- dU + d[U,V]$. Ici on a $dV=V_- dY$, $dU=U_- dX$, $d[U,V] = U_- V_- d[X,Y]$, donc

$$d(UV) = U_- V_- dY + U_- V_- dX + U_- V_- d[X,Y]$$

et UV est donc l'unique solution de $(e_{X+Y+[X,Y]})$, d'où (4).

La proposition 4 permet de définir naturellement l'application bilinéaire $\{ \ , \ \}$ sur $\underline{\underline{S}}_0 \times \underline{\underline{S}}_0$ par

$$\{X,Y\} = X + Y + [X,Y]$$

Une notation d'opération telle que $X \perp Y$ serait d'ailleurs appropriée, car l'opération ainsi définie est associative :

$$X \perp Y \perp Z = X + Y + Z + [X,Y] + [Y,Z] + [Z,X] + \Sigma_{s \leq .} \Delta X_s \Delta Y_s \Delta Z_s \ .$$

On explicite dans la proposition suivante la suite $X^{(n)}$ d'éléments de $\underline{\underline{S}}_0$ déterminée par la relation de récurrence $X^{(1)} = X \in \underline{\underline{S}}_0$, $X^{(n)} = \{ X, X^{(n-1)} \}$ (les puissances de X pour l'opération $\perp$).

Proposition 5 . Pour tout $X \in \underline{\underline{S}}_0$ et $n \geqq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on a

(5) $X^{(n)} = nX + \frac{n(n-1)}{2}\langle X^c, X^c\rangle + \Sigma_{s\leqq\cdot} P_n(\Delta X_s)$ où $P_n(x)=(1+x)^n-1-nx$.

Démonstration . Elle se fait par une succession de récurrences faciles. Nous commençons par vérifier la conséquence suivante de (5)

$$\Delta X^{(n)} = Q_n(\Delta X) \quad \text{où } Q_n(x) = (1+x)^n-1$$

En effet, la formule $X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + [X,X^{(n-1)}]$ nous donne la relation de récurrence $Q_n(x) = x+Q_{n-1}(x)+xQ_{n-1}(x)$ avec $Q_1(x)=x$, qui conduit bien à l'expression ci-dessus.

Nous posons ensuite $Y^{(n)} = [X,X^{(n)}]$. La formule $X^{(n)}=X+X^{(n-1)}+[X,X^{(n-1)}]$ nous donne

$$Y^{(n)} = [X,X] + Y^{(n-1)} + \Sigma_{s\leqq\cdot}\Delta X_s^2 \Delta X_s^{(n-1)}$$

$$= Y^{(n-1)} + \langle X^c,X^c\rangle + \Sigma_{s\leqq\cdot} R_n(\Delta X_s)$$

où $R_n(x)=x^2(1+Q_{n-1}(x)) = x^2(1+x)^{n-1}$. La solution de cette équation de récurrence est

$$Y^{(n)} = n\langle X^c,X^c\rangle + \Sigma_{s\leqq\cdot} T_n(\Delta X_s) \quad \text{où } T_n(x) = x\{(1+x)^n-1\}$$

car $T_n - T_{n-1} = R_n$. La relation de récurrence sur $X^{(n)}$ devient alors $X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + Y^{(n-1)}$, soit

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} + X + (n-1)\langle X^c,X^c\rangle + \Sigma_{s\leqq\cdot} T_{n-1}(\Delta X_s)$$

dont la solution est (5) , car $P_{n-1}+T_{n-1}=T_n$.

2.2. On donne maintenant une autre démonstration de la forme explicite de la solution d'une équation différentielle stochastique posée et résolue par Ch. Yoeurp ([8] et [5]).

Soit X une semi-martingale spéciale ([5], IV.31), dont la décomposition canonique est $X = X_0+M+A$ ($M \in \underline{\underline{L}}_0$, $A \in \underline{\underline{V}}_0$ et prévisible[1]). On note $\dot{X} = X_0+M_-+A$ la projection prévisible de X. D'après [8] ou [5], si le processus $1-\Delta A$ ne s'annule pas, il existe une unique semi-martingale spéciale $\Lambda=\dot{E}(X)$, solution de

$$(\dot{e}_X) \qquad \Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \dot{\Lambda}_s dX_s$$

donnée par $\dot{E}(X)=E(Y)$, où $Y_t=\int_{]0,t]}\frac{dX_s}{1-\Delta A_s}$.

1. En réalité, X_0 n'intervient pas.

<u>Proposition 6</u> . $\dot{E}(X) = \frac{E(M)}{E(-A)}$

<u>Démonstration</u> . Avec les notations précédentes, il s'agit de montrer $E(Y)E(-A)=E(M)$. D'après la proposition 4, cela revient à $Y-A-[Y,A] = M$. Or par définition de Y

$$dY - dA - d[Y,A] = \frac{dM+dA}{1-\Delta A} - dA - \frac{d[M,A]+d[A,A]}{1-\Delta A}$$

Nous remplaçons $d[A,A]$ par $\Delta A dA$, et $d[M,A]$ par $\Delta A dM$ (lemme fondamental). Il reste

$$\frac{dM}{1-\Delta A} + \frac{dA}{1-\Delta A} - dA - dM\frac{\Delta A}{1-\Delta A} - dA\frac{\Delta A}{1-\Delta A} = dM$$

Comme tous les processus sont nuls en 0, la proposition est établie.

2.3. L'existence des intégrales stochastiques optionnelles permet de poser le problème de la résolution de l'équation stochastique

$$(\overset{+}{e}_X) \qquad dZ_s = Z_s dX_s \ .$$

On le résoudra ci-dessous dans une sous-classe de l'espace des semi-martingales spéciales , formée des semi-martingales spéciales X admettant une décomposition canonique $X=X_0+M+A$, où la martingale locale M est <u>quasi-continue à gauche</u>. Nous dirons pour abréger qu'une telle semi-martingale est <u>très spéciale</u>. Il faudra aussi imposer une condition d'intégrabilité.

<u>Proposition 7</u> . Soit $X = X_o+M+A$ la décomposition canonique d'une semi-martingale très spéciale.[1] On suppose que $1-\Delta X$ ne s'annule jamais,[2] et que le processus croissant $\left(\Sigma_{s\leqq t}\frac{1}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{|1-\Delta M_s|<1/2\}}\right)^{1/2}$ est localement intégrable. Alors il existe une et une seule semimartingale Z telle que (les i.s. ci-dessous aient un sens et que) l'on ait

$$(\overset{+}{e}_X) \qquad Z_t = 1 + \int_{]0,t]} Z_s dX_s \quad (= 1 + \int_{]0,t]} Z_s dM_s + \int_{]0,t]} Z_s dA_s \ ) \ .$$

Cette solution est $\overset{+}{E}(X)=E(\overset{+}{X})$, où $\overset{+}{X}_t = \int_{]0,t]} \frac{dX_s}{1-\Delta X_s} = \int_{]0,t]} \frac{dM_s}{1-\Delta M_s} + \int_{]0,t]} \frac{dA_s}{1-\Delta A_s}$. De plus, $\overset{+}{X}$ et Z sont très spéciales.[3]

<u>Démonstration</u> . Nous commençons par quelques remarques sur la condition d'intégrabilité imposée. D'abord, A n'a que des sauts prévisibles, M que des sauts totalement inaccessibles, donc la condition que $1-\Delta X$ ne s'annule pas signifie que $1-\Delta M$ et $1-\Delta A$ ne s'annulent pas. Ensuite,

---

1. En réalité, X_o n'intervient pas. 2. Cela entraîne que $1-\Delta X_t(\omega)$ est borné inférieurement par un nombre >0 sur tout intervalle compact (ne pas confondre cela avec "localement borné inf^t" au sens des t.d'arrêt). 3.Ce théorème a été démontré indépendamment par Ch.Yoeurp (non publié)

il revient au même de dire que le processus croissant de l'énoncé est localement intégrable, ou que le processus croissant

$$\left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{|1-\Delta M_s|<1/2\}} \right)^{1/2}$$

est localement intégrable. Mais d'autre part, nous savons que $(\Sigma_{s\leqq t} \Delta M_s^2)^{1/2}$ est localement intégrable, donc le processus croissant

$$\left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{|\ \ |\geqq 1/2\}} \right)^{1/2}$$

est toujours localement intégrable, et l'intégrabilité locale de l'énoncé équivaut à celle du processus croissant

$$\alpha_t = \left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} \right)^{1/2}$$

- d'où il résulte en particulier que $I_{\{|\ \ |<1/2\}}$ aurait pu être remplacé par $I_{\{|\ |<\varepsilon\}}$ pour n'importe quel $\varepsilon\in]0,1[$. Une autre remarque, qui interviendra par la suite : le processus croissant

$$\beta_t = \Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{|1-\Delta M_s|} \quad \text{(fini : note 2 page précédente)}$$

est localement intégrable, si la condition de l'énoncé est satisfaite . En effet, choisissons des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$, réduisant fortement la martingale locale M, et tels que $\beta_{T_n-} \leqq n$, $\alpha_{T_n} \in L^1$. Montrons que $\beta_{T_n} \in L^1$, ce qui revient à dire que $\Delta\beta_{T_n} = \Delta M_{T_n}^2/|1-\Delta M_{T_n}|$ est intégrable. Comme T_n réduit fortement M, ΔM_{T_n} est intégrable, donc $\Delta\beta_{T_n} I_{\{|1-\Delta M_{T_n}|\geqq 1/2\}}$ est intégrable. D'autre part, on a

$$\frac{|\Delta M_{T_n}|}{|1-\Delta M_{T_n}|} \leqq \alpha_{T_n} \in L^1$$

et le côté gauche majore $\frac{2}{3}|\Delta\beta_{T_n}| I_{\{|1-\Delta M_{T_n}|\leqq 1/2\}}$ (car $|\Delta M_{T_n}|^2 I_{\{\}} \leqq \frac{3}{2}|\Delta M_{T_n}|$). On pourra comparer ce raisonnement à celui de [5] , IV. n°32 .

Par un raisonnement tout à fait analogue, mais plus simple, on démontre que la condition de l'énoncé est équivalente à l'intégrabilité locale du processus croissant à valeurs finies

$$\delta_t = \Sigma_{s\leqq t} \frac{1}{|1-\Delta M_s|} I_{\{|1-\Delta M_s|< 1/2\}}$$

Enfin, une dernière remarque : dans ces conditions d'intégrabilité, on peut partout faire disparaître la décomposition[1], en remplaçant M par X . En effet, les processus croissants analogues relatifs aux sauts prévisibles de X, par exemple

$$\left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{1}{(1-\Delta A_t)^2} I_{\{|1-\Delta A_t|\leqq 1/2\}} \right)^{1/2}$$

sont prévisibles à valeurs finies, donc toujours localement intégrables.

Passons à la démonstration proprement dite. Vérifions d'abord que l'on peut définir $\overset{+}{X}$. L'intégrale de Stieltjes $\int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta X_s}$ est bien définie, car la fonction $|1-\Delta X_s(\omega)|$ est bornée inférieurement sur tout intervalle compact. D'autre part, $1-\Delta M$ n'est $\neq 0$ qu'en des temps totalement inaccessibles, donc $1-\Delta M = 1$ p.p. pour la mesure dA, et $\int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta X_s} = \int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta A_s}$, ce qui montre que ce processus à variation finie est prévisible.

En ce qui concerne l'intégrale stochastique optionnelle $\int_0^t \frac{dM_s}{1-\Delta X_s}$, nous remarquons de même que $1-\Delta A$ n'est $\neq 1$ qu'en des temps d'arrêt prévisibles, donc que $1-\Delta A = 1$ p.p. pour la mesure $d[M,M]$. L'intégrale stochastique est donc égale à $\int_0^t \frac{dM_s}{1-\Delta M_s}$. Pour vérifier que celle-ci a un sens, il nous faut examiner si le processus croissant $\left(\int \frac{d[M,M]_s}{(1-\Delta M_s)^2}\right)^{1/2}$ est localement intégrable. Comme $1-\Delta M_s$ ne diffère de 1 que pour des s en infinité dénombrable , il n'y a aucune difficulté quant à l'intégrale relative à $\langle M^c,M^c\rangle$, et il suffit de voir si

$$\left(\Sigma_{s\leqq t}\frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} \right)^{1/2}$$

est localement intégrable. Nous avons vu plus haut que c'est bien le cas. Ainsi $\overset{+}{X}$ est bien définie, et il apparaît sur sa décomposition que c'est une semi-martingale très spéciale.

1. Désormais, nous supposons que $X_0=0$.

Pour prouver l'unicité, nous remarquons que $(\overset{+}{e}_X)$ entraîne, comme X est très spéciale ([5], II.35 et V.20) que $\Delta Z_t = Z_t \Delta X_t$, et donc que $Z_t = Z_{t-}/(1-\Delta X_t)$. D'autre part, si H est prévisible localement borné, K optionnel tel que l'intégrale $K\cdot X$ ($= K\cdot M + K\cdot A$) ait un sens , l'intégrale optionnelle $(HK)\cdot X$ a un sens et l'on a $(HK)\cdot X = H\cdot(K\cdot X)$. Ici, prenant $H = Z_-$, $K = 1/1-\Delta X$, $(\overset{+}{e}_X)$ devient

$$(*) \qquad Z_t = 1 + \int_{]0,t]} Z_{s-} \frac{dX_s}{1-\Delta X_s} = 1 + \int_{]0,t]} Z_{s-} d\overset{+}{X}_s$$

dont nous savons que la seule solution est $E(\overset{+}{X})$. Inversement, soit $Z = E(\overset{+}{X})$, montrons qu'elle satisfait à $(\overset{+}{e}_X)$. Nous avons $\Delta Z_t = Z_{t-}\Delta\overset{+}{X}_t$, donc – à nouveau grâce au caractère très spécial de X – $\Delta Z_t = Z_{t-}\Delta X_t/1-\Delta X_t$, et enfin $Z_{t-} = Z_t(1-\Delta X_t)$. Ainsi

$$Z_t = 1 + \int_{]0,t]} Z_{s-}\left(\frac{1}{1-\Delta X_s} dX_s\right) = 1 + \int_{]0,t]} \frac{Z_{s-}}{1-\Delta X_s} dX_s$$

$$= 1 + \int_{]0,t]} Z_s dX_s$$

de sorte que Z satisfait à $(\overset{+}{e}_X)$.

Donnons maintenant une forme plus explicite de $\overset{+}{E}(X)$.

<u>Proposition 8</u> . Sous les hypothèses de la proposition 7, on a

$$\overset{+}{E}(X) = \frac{\exp(-\gamma - \langle X^c, X^c\rangle)}{E(-X)}$$

où γ est la projection prévisible duale de $\Sigma_{s\leq t} \frac{\Delta M_s^2}{1-\Delta M_s}$.

<u>Démonstration</u> . Nous savons que γ existe (étude du processus croissant β dans la démonstration précédente). Comme M est quasi-continue à gauche, γ est continu, et la formule s'écrit

$$\overset{+}{E}(X)E(-X) = E(-\gamma - \langle X^c, X^c\rangle)$$

Comme $\overset{+}{E}(X) = E(\overset{+}{X})$, cette formule s'écrit, d'après la prop.4

$$\overset{+}{X} - X - [X, \overset{+}{X}] = -\gamma - \langle X^c, X^c\rangle$$

Nous remplaçons X par M+A , $\overset{+}{X}$ par $\frac{1}{1-\Delta M}\cdot M + \frac{1}{1-\Delta A}\cdot A$, de sorte que $\overset{+}{X} - X = \frac{\Delta M}{1-\Delta M}\cdot M + \frac{\Delta A}{1-\Delta A}\cdot A$. Quant à $[X, \overset{+}{X}]$, nous avons vu que $\overset{+}{X}{}^c = X^c$, et que $\Delta\overset{+}{X} = \frac{\Delta X}{1-\Delta X} = \frac{\Delta M}{1-\Delta M} + \frac{\Delta A}{1-\Delta A}$. Ainsi, comme $[M,A]=0$

$$\overset{+}{X} - X - [X, \overset{+}{X}] = \left(\frac{\Delta M}{1-\Delta M}\cdot M - \Sigma_{s\leq\cdot} \frac{\Delta M_s^2}{1-\Delta M_s}\right) - \left(\frac{\Delta A}{1-\Delta A}\cdot A - \Sigma_{s\leq\cdot} \frac{\Delta A_s^2}{1-\Delta A_s}\right) - \langle X^c, X^c\rangle$$

La seconde parenthèse est nulle, car c'est un processus à variation finie purement discontinu dont les sauts sont nuls. Il reste seulement à vérifier que

$$\frac{\Delta M}{1-\Delta M}\cdot M = \Sigma_{s\leqq\cdot}\frac{\Delta M_s^2}{1-\Delta M_s} - \gamma$$

Or les deux membres sont des martingales locales sans partie continue, qui ont les mêmes sauts.

3. MESURE DE LEVY ET FORMULE D'ITO POUR UNE MARTINGALE LOCALE QUASI--CONTINUE A GAUCHE.

3.1. Contrairement à ce qui se passe pour les processus de Markov, la notion de "mesure de Lévy" d'une martingale locale n'a été utilisée que très rarement (voir cependant [2] et [3]).

Nous avons tout d'abord besoin de quelques généralités sur les mesures aléatoires.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable lusinien. On note $\tilde{\Omega} = \Omega\times[0,\infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\otimes\mathcal{E}$ ($\mathcal{P}$ est la tribu prévisible sur $\Omega\times[0,\infty[$), ainsi que $\tilde{E} =]0,\infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{B}(]0,\infty[)\otimes\mathcal{E}$.

On appelle <u>mesure aléatoire</u> tout noyau positif $\eta(\omega\ ;\ dt\times dx)$ de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(\tilde{E},\tilde{\mathcal{E}})$. Une mesure aléatoire η est dite <u>prévisible</u> si, pour tout $Y\in\tilde{\mathcal{P}}_+$ le processus ηY suivant est prévisible

$$(\eta Y)_t(\omega) = \int_{]0,t]}\int_E Y(\omega,s,x)\eta(\omega\ ;\ ds,dx)\ .$$

D'après [1] (lemme 2.2) on a la

<u>Proposition 9</u> . Soit η mesure aléatoire telle que la mesure M_η définie sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{P}})$ par

$$\forall\ Y\in\tilde{\mathcal{P}}_+\quad M_\eta(Y) = E[\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta(.;dt,dx)]$$

soit σ-finie. Il existe alors une unique mesure prévisible, notée η^3, telle que

$$\forall\ Y\in\tilde{\mathcal{P}}_+,\ E[\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta(.;dt,dx)] = E[\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta^3(.;dt,dx)]$$

Nous appliquons ce résultat dans la situation suivante : $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$, X est une martingale locale réelle, et

$$\eta(\omega\ ;\ dt\times dx) = \Sigma_{s>0}\ I_{\{\Delta X_s(\omega)\neq 0\}}\ \varepsilon_s(dt)\varepsilon_{\Delta X_s(\omega)}(dx)$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 9, on établit le

<u>Lemme 2</u> . La mesure M_η est σ-finie.

Démonstration . Le processus croissant $\Sigma_{s\leq t}(\Delta X_s^2\wedge 1) \leq [X,X]_t$ est à valeurs finies et à sauts bornés par 1. Il est donc localement intégrable. Cela signifie qu'il existe des temps d'arrêt $T_n\uparrow+\infty$, des constantes $a_n>0$, tels que la fonction

$$H(\omega,s,x) = \Sigma_n \ a_n 1_{]0,T_n]}(s,\omega)\ x^2\wedge 1$$

soit M_η-intégrable. Comme H est strictement positive sur $\tilde{\Omega}$, M_η est σ-finie. $\square$

On appelle mesure de Lévy de X, et on note $\nu(\omega, ds\times dx)$, la mesure prévisible η^3. Elle interviendra pour nous de la manière suivante : si $f(s,x)$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*$, la projection duale prévisible du processus croissant $\Sigma_{s\leq t} f(s,\Delta X_s)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}$ est le processus croissant $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*} \nu(ds\times dx)f(s,x)$. On passe de là au cas des fonctions f, non nécessairement positives, telles que le processus $\Sigma_{s\leq t} |f(s,\Delta X_s)|I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}$ soit localement intégrable. On note pour $f \in \underline{\underline{B}}_+(\mathbb{R})$ $\nu_t(.,f) = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*} \nu(.,ds\times dx)I_{]0,t]}(s)f(x)$.

3.2. Voici, à l'aide de la mesure ν - sous des hypothèses convenables - une nouvelle écriture de la formule d'Ito.

Théorème 2 . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche, et f fonction de classe C^2 telle que le processus $\Sigma_{s\leq t} |f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s|$ soit localement intégrable. Alors,

$$(6)\ f(X_t) = f(X_0) + \int_{]0,t]} \delta f(X_{s-},X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s$$

$$+ \int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*} \nu(ds\times dx)[f(X_{s-}+x)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})x\ ]$$

où ν est la mesure de Lévy de X, et $\delta f(x,y)= \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $y\neq x$, et $f'(x)$ si $y=x$.

Démonstration . On écrit la formule d'Ito usuelle, dans laquelle le dernier terme est

$$S(f)_t = \Sigma_{s\leq t} \ \{\ f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s\ \}\ .$$

D'après l'hypothèse d'intégrabilité que l'on vient de faire, S(f) admet pour projection duale prévisible le processus suivant, continu du fait que X est quasi-continue à gauche

$$S(f)^{3}_{t} = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*} \nu(ds\times dx)[f(X_{s-}+x)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})x]$$

Le processus $\overset{c}{S}(f) = S(f)-S(f)^3$ est donc une martingale locale, somme compensée de sauts. De plus

$$\Delta\overset{c}{S}(f)_s = (f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}$$
$$= \left(\frac{f(X_s)\ f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\Delta X_s$$

D'autre part, on a

$$\left(\int_{]0,t]}\left[\frac{f(X_s)-f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right]^2 I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}d[X,X]_s\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\Sigma_{s\leqq t}\left[\frac{f(X_s)-f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right]^2 I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\ \Delta X_s^2\right)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq \quad \Sigma_{s\leqq t}\ |f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s|$$

qui est un processus localement intégrable par hypothèse. L'intégrale stochastique

$$M^f_t = \int_{]0,t]}\left(\frac{f(X_s)-f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}dX_s$$

est donc bien définie. De plus, l'intégrale relative à X^c est nulle, donc M^f est une somme compensée de sauts. Comme M^f et $\overset{c}{S}(f)$ ont les mêmes sauts, elles sont égales. Ajoutant alors M^f à l'intégrale stochastique qui figure dans la formule d'Ito usuelle, on obtient

$$M^f_t + \int_{]0,t]} f'(X_{s-})dX_s = \int_{]0,t]}\delta f(X_{s-},X_s)dX_s$$

et le théorème est établi.

Remarquons que, dans le cadre des martingales quasi-continues à gauche, la formule d'Ito que l'on vient d'obtenir étend la formule de Pratelli et Yoeurp rappelée dans la proposition 2. En effet, X appartient à $\underline{\underline{M}}_{loc}$ si et seulement si $f(x)=x^2$ vérifie la condition du théorème 1, et on peut écrire la proposition 2

$$X^2_t = X^2_0 + \int_{]0,t]}(X_{s-}+X_s)dX_s + \langle X,X\rangle_t$$

Or $\langle X,X\rangle_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \langle X^d,X^d\rangle_t$, et $\langle X^d,X^d\rangle_t=\int \nu_t(dx)x^2$.

4. UNE SUITE REMARQUABLE DE FORMULES EXPONENTIELLES

4.1. Rappelons tout d'abord l'extension du théorème de Girsanov obtenue par J. Van Schuppen et E. Wong en [7] :

Soient U et X deux martingales locales nulles en 0 telles que $[U,X]$ soit localement intégrable, ce qui est équivalent , d'après [8], à supposer l'existence de $\langle U,X\rangle$. Supposons de plus $1+\Delta U \geqq 0$, de sorte que la martingale locale $E(U)$ est positive, et soit T un temps d'arrêt tel que $E(U)^T$ soit uniformément intégrable. On définit la probabilité P_U^T sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_T)$ par $dP_U^T = E(U)_T dP|_{\underline{\underline{F}}_T}$. Alors, d'après [7], ${}^U X = X-\langle X,U\rangle$ arrêtée à T est une P_U^T-martingale locale. Ou encore (sans arrêt à T), $E(X)^U X$ est une P-martingale locale ([8]), variante pour laquelle la condition $1+\Delta U \geqq 0$ n'est plus nécessaire. Le point clé de la démonstration est encore le lemme fondamental.

Il en est de même pour la variante que nous proposons maintenant[1]

<u>Proposition 10</u> . Soient U et X deux martingales locales nulles en 0 telles que $[U,X]$ soit localement intégrables. Alors $E({}^U X)E(U)$ est une martingale locale.

<u>Démonstration</u> . $E({}^U X)E(U) = E({}^U X+U+[{}^U X,U])$. Il suffit donc de démontrer que

$${}^U X+U+[{}^U X,U] = X-\langle X,U\rangle + U + [X,U] - [\langle X,U\rangle,U]$$

est une martingale locale. Or X,U, $[X,U]-\langle X,U\rangle$ sont des martingales locales, et $[\langle X,U\rangle,U]$ est une martingale locale d'après le lemme fondamental.

4.2. Soit X martingale locale nulle en 0 et <u>quasi-continue à gauche</u>.

La proposition précédente va permettre d'obtenir de façon naturelle une suite de formules exponentielles associées à X.

Supposons tout d'abord que X soit localement de carré intégrable. En remplaçant dans la proposition précédente X et U par $\frac{1}{2}X$, on obtient

---

1. Elle contient, au moins formellement, les autres résultats. En effet, remplaçant X par tX on a que $E(t{}^U X)E(U)$ est une martingale locale, et tous les coefficients du développement de Taylor en t sont des martingales locales ; ${}^U X E(U)$ est le premier.

$$E_2(X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{4}\langle X,X\rangle)\mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X) \in \underline{\underline{L}}$$

Comme X est quasi-continue à gauche, $\langle X,X\rangle$ est continu, $[\langle X,X\rangle,X]=0$, et la proposition 4 nous donne

$$E_2(X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X)\mathcal{E}(-\tfrac{1}{4}\langle X,X\rangle)\mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X)^2\exp(-\tfrac{1}{4}\langle X,X\rangle)$$

Plus généralement, nous allons calculer un processus prévisible $A^{(n)}$ (continu) tel que

$$E_n(X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{n}X)^n \exp(-A^{(n)}) \in \underline{\underline{L}}$$

Le calcul est fait dans l'énoncé suivant, avec des notations un peu différentes.

<u>Théorème 3</u> . Soit X martingale locale nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $\lambda\geqq 2$. On suppose que $1+\Delta X$ est un processus $\geqq 0$ (restriction inutile si λ est entier) et que X est localement bornée dans L^λ. Alors si l'on pose

$$(7)\qquad A_t = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t + \int_{\mathbb{R}} \nu_t(dx)\{(1+x)^\lambda-1-\lambda x\}$$

le processus

$$\Lambda_t = \mathcal{E}(X)^\lambda\exp(-A)$$

est une martingale locale.

<u>Démonstration</u> . Nous vérifions d'abord que A_t est fini, et continu. Nous traiterons le cas où $\lambda=n$ est entier, sans l'hypothèse de positivité de $1+\Delta X$, ce qui est un peu plus délicat. Il s'agit de vérifier que le processus croissant quasi-continu à gauche

$$\Sigma_{s\leqq t}\ |(1+\Delta X_s)^n -1-n\Delta X_s|$$

est localement intégrable . Nous le coupons en deux morceaux, l'un relatif aux s tels que $|\Delta X_s|<1$, pour lequel on a une majoration de la forme $c\Sigma_{s\leqq t}\ \Delta X_s^2 I_{\{|\Delta X_s|<1\}}$, processus localement intégrable , et l'autre, relatif aux s tels que $|\Delta X_s|>1$. Pour ce second processus, nous utilisons une majoration de la forme

$$c\Sigma_{s\leqq t}\ |\Delta X_s|^n \leqq c\Sigma_{s<t}\ |\Delta X_s|^n + c2^n \sup_{s\leqq t} |X_s|^n$$

le premier terme au second membre est un processus croissant localement borné, car fini et continu à gauche, et le second terme un processus croissant localement intégrable, d'après l'inégalité de Doob.

Revenant à λ quelconque, nous écrivons la formule d'Ito pour $F(E(X),A)$ où $F(u,v)= u^\lambda e^{-v}$. Il vient après quelques calculs

$$\Lambda_t = 1 + \lambda\int_{]0,t]} \Lambda_{s-}dX_s - \int_{]0,t]}\Lambda_{s-}dA_s + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\int_0^t \Lambda_s d<X^c,X^c>_s$$

$$+ \Sigma_{s\leqq t} \{\Lambda_s-\Lambda_{s-}-\lambda\Lambda_{s-}\Delta X_s\} ,$$

(on a tenu compte ici de la continuité de A, mais non de son expression explicite (7)). On a $\Lambda_s=\Lambda_{s-}(1+\Delta X_s)^\lambda$, donc la dernière somme s'écrit $\Sigma_{s\leqq t}\ \Lambda_{s-}((1+\Delta X_s)^\lambda-1-\lambda\Delta X_s)$, qui est une intégrale stochastique par rapport au processus $C_t= \Sigma_{s\leqq t}((1+\Delta X_s)^\lambda-1-\lambda\Delta X_s)$, localement intégrable par hypothèse. Il reste donc

$$\Lambda_t \underset{(\underline{\underline{L}})}{\equiv} \int_{]0,t]} \Lambda_{s-}(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} d<X^c,X^c>_s + dC_s - dA_s)$$

et si l'on remplace maintenant A par sa valeur (7), la parenthèse est une martingale locale , car $\int\nu_t(dx)\{(1+x)^\lambda-1-\lambda x\}$ est la projection duale prévisible de C.

<u>Remarques</u> . a) Si $1+\Delta X \geqq 0$ (i.e. si E(X) est positive), on peut étendre ce résultat à toutes les valeurs de $\lambda > 1$. Cela exige un passage à la limite pour vérifier la validité de la formule d'Ito utilisée ci-dessus, car $u^\lambda e^{-v}$ n'est plus de classe C^2, et il faut considérer $(u+\varepsilon)^\lambda e^{-v}$, et faire tendre ε vers 0.

Si $\lambda>1$, et $1+\Delta X$ ne s'annule pas, un calcul analogue donne la compensation multiplicative de $|E(X)|^\lambda$.

b) Le processus A est <u>unique</u> si $1+\Delta X$ ne s'annule pas. En effet, soit $Y=E(X)^\lambda$, et soit $B=\exp(-A)$. Notons les propriétés : Y est une semimartingale, et Y et Y_- ne s'annulent jamais (le produit infini de E(X) est absolument convergent et sans facteur nul) ; B est un processus à variation finie prévisible, $B_0=1$, B et B_- ne s'annulent jamais ; YB est une martingale locale. Y <u>étant donnée</u>, <u>cela caractérise uniquement</u> B. En effet, d'après la formule d'intégration par parties de Yoeurp ([5], V.38 : c'est une autre forme du lemme fondamental) $d(YB)=BdY+Y_-dB$, donc $\frac{dY}{Y_-} + \frac{dB}{B}$ est la différentielle d'une martingale locale. Cela caractérise uniquement le processus à variation finie prévisible $C_t= \int_{]0,t]} \frac{dB_s}{B_s}$, puis on a $B=1/E(-C)$. Voir le chapitre de [8] sur les décompositions multiplicatives.

c) Considérons la martingale locale

$$\hat{X}_t^{(\lambda)} = \lambda X_t + \Sigma_{s\leqq t}\ \{(1+\Delta X_s)^\lambda - 1 - \lambda\Delta X_s\} - \int \nu_t(dx)\{(1+x)^\lambda - 1 - \lambda x\}$$

Nous avons vu au cours de la démonstration que $\Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \Lambda_{s-} d\hat{X}_s^\lambda$, donc $\Lambda = \mathcal{E}(\hat{X}^{(\lambda)})$.

Revenons alors aux notations précédant l'énoncé du théorème 3. Le processus

$$A_t^{(n)} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})<X^c,X^c>_t + \int \nu_t(dx)\{(1+\frac{x}{n})^n - 1 - x\}$$

est l'unique processus prévisible à variation finie tel que

$$E_n(X) = E(\frac{1}{n}X)^n \exp(-A^{(n)})$$
$$= \exp\{X_t - \frac{1}{2}<X^c,X^c> - \int \nu_{\bullet}(dx)[(1+\frac{x}{n})^n - 1 - x]\}\prod_{s\leqq \bullet}(1+\frac{\Delta X_s}{n})^n e^{-\Delta X_s}$$

soit une martingale locale. De plus, nous avons vu que $E_n(X) = \mathcal{E}(\hat{X}^n)$, avec

$$\hat{X}_t^n = X_t + \Sigma_{s\leqq t}\ Q_n(\Delta X_s) - \int \nu_t(dx) Q_n(x) \quad \text{où } Q_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n - 1 - x$$
$$= X_t + \int_0^t U_n(\Delta X_s) dX_s \quad \text{où } U_n(x) = \frac{Q_n(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ , } 0 \text{ si } x = 0$$

Lorsque $n \to \infty$, $Q_n(x)$ tend vers $e^x - 1 - x$, et on a de même le théorème suivant :

<u>Théorème 4</u> . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche, telle que le processus $\Sigma_{s\leqq t}\ |e^{\Delta X_s} - 1 - \Delta X_s|$ soit localement intégrable (condition qui est en particulier réalisée si les sauts de X sont uniformément bornés). Le processus $A_t^{(\infty)} = \int \nu_t(dx)(e^x - 1 - x)$ est l'unique processus prévisible, à variation finie tel que

$$E_\infty(X) = \exp\{ X - \frac{1}{2}<X^c,X^c> - A^{(\infty)}\}$$

soit une martingale locale.

La démonstration est identique à celle du théorème 3. On a $E_\infty(X) = \mathcal{E}(\hat{X}^\infty)$, avec

$$\hat{X}_t^\infty = X_t + \Sigma_{s\leqq t}\ (e^{\Delta X_s} - 1 - \Delta X_s) - \int \nu_t(dx)(e^x - 1 - x)$$
$$= X_t + \int_{]0,t]} f(\Delta X_s) dX_s \quad \text{où } f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x} \text{ , } f(0) = 0 \text{ .}$$

L'application E_∞ a été utilisée en [4] et [6] pour la résolution du problème des martingales lié aux opérateurs intégro-différentiels qui sont générateurs infinitésimaux de processus de Markov sur $\mathbb{R}^n$. Toutes les applications E_i (i=n ou ∞) sont des "exponentielles", en ce sens que si X et Y sont quasi-continues à gauche et $[X,Y]=0$ on a $E_i(X+Y)=E_i(X)E_i(Y)$.

4.3. On peut maintenant caractériser de plusieurs manières le processus croissant $<X^c,X^c>$ et la mesure aléatoire $\nu(ds\times dx)$ d'une martingale locale quasi-continue à gauche, dont on supposera en général les sauts uniformément bornés.

Caractérisons tout d'abord le processus $<X^c,X^c>$.

Théorème 5 . Soit X martingale locale telle que $1+\Delta X$ ne s'annule jamais. $A = <X^c,X^c>$ est l'unique processus croissant prévisible tel que

$$\Lambda^1(X,A) = \exp\{X_t - \tfrac{1}{2}A_t\}\prod_{s\leqq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} \in \underline{\underline{L}}$$

Démonstration . Si Y est la semimartingale $\exp(X_t)\prod(\ \ )$, le produit infini est absolument convergent et aucun de ses facteurs n'est nul, donc Y_- ne s'annule jamais. On applique alors le principe général d'unicité des décompositions multiplicatives , remarque b) suivant le théorème 3.

On caractérise maintenant la mesure de Lévy ν .

Théorème 6 . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche telle que $|\Delta X|\leqq 1$. La mesure de Lévy $\nu(ds\times dx)$ est caractérisée par les propriétés suivantes

- elle est prévisible , portée par $]0,\infty[\ \times\ ([-1,+1]\setminus\{0\})$,
- le processus $\int\nu_t(dx)x^2$ est à valeurs finies,
- pour tout entier n, $2\leqq n<\infty$

$$\Lambda^n(X,\nu)=\exp\{X_t - \tfrac{1}{2}<X^c,X^c>_t - \int\nu_t(dx)Q_n(x)\}\prod_{s\leqq t}(1+\tfrac{1}{n}\Delta X_s)^n e^{-\Delta X_s}$$

est une martingale locale, où $Q_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n-1-x$.

Démonstration . Soit $\bar{\nu}(\omega\ ;\ ds\times dx)$ une seconde mesure aléatoire prévisible possédant les mêmes propriétés. Nous définissons de manière évidente $\bar{\nu}_t(\omega,dx)$ et $\Lambda^n(X,\bar{\nu})$. Nous introduisons la semimartingale $Y^n= \exp\{X_t - \frac{1}{2}<X^c,X^c>_t\}\prod_{s\leqq t}(1+\frac{1}{n}\Delta X_s)^n e^{-\Delta X_s}$, et les processus à variation finie prévisibles $B_t^n = \exp(-\int\nu_t(dx)Q_n(x))$, et $\bar{B}_t^n$ de même. Comme Y^nB^n et $Y^n\bar{B}^n$ sont des martingales locales, le principe général d'unicité (remarque b) suivant le th.3) entraîne que $B^n=\bar{B}^n$, ou encore $\int\nu_t(dx)Q_n(x)=\int\bar{\nu}_t(dx)Q_n(x)$ pour tout n, donc par combinaison linéaire $\int\nu_t(dx)x^n = \int\bar{\nu}_t(dx)x^n$ pour tout $n\geqq 2$, puis par le théorème de Weierstrass $\int\nu_t(dx)x^2f(x) = \int\bar{\nu}_t(dx)x^2f(x)$ pour toute f continue sur $[-1,1]$.

Donc les mesures $\nu_t(dx)x^2$ et $\bar{\nu}_t(dx)x^2$ sont égales, et comme $\nu_t(dx)$ $\bar{\nu}_t(dx)$ ne chargent pas 0, elles sont aussi égales. On en déduit aisément l'égalité de ν et de $\bar{\nu}$ elles mêmes.

On a de même, avec l'application E_∞, des théorèmes analogues aux précédents, permettant de caractériser $\langle X^c,X^c\rangle$ et ν.

Théorème 7 . Soit X processus càdlàg., à valeurs dans $\mathbb{R}$, adapté, quasi-continu à gauche, et tel que $|\Delta X|\leq 1$.

1) Si X est une martingale locale, la mesure de Lévy ν de X est uniquement caractérisée par les propriétés suivantes :

- elle est prévisible, portée par $]0,\infty[\times([-1,1]\setminus\{0\})$,
- le processus $\int\nu_t(dx)x^2$ est à valeurs finies,
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le processus

$$\Lambda^{(\infty)}(\alpha,X,\nu) = \exp\{\alpha X_t - \tfrac{1}{2}\alpha^2\langle X^c,X^c\rangle_t - \int\nu_t(dx)(e^{\alpha x}-1-\alpha x)\}$$

est une martingale locale.

2) Supposons seulement que le processus croissant $\Sigma_{s\leq t}\ \Delta X_s^2$ soit localement intégrable, et soit ν la projection duale prévisible[1] de la mesure aléatoire $\Sigma_u\ I_{\{\Delta X_u\neq 0\}}\varepsilon_u(ds)\varepsilon_{\Delta X_u}(dx)$. Soit A un processus croissant nul en 0, adapté et continu. Pour que X soit une martingale locale et que l'on ait $\langle X^c,X^c\rangle=A$, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Lambda^{(\infty)}(\alpha,X,A) = \exp\{\ \alpha X_t - \tfrac{1}{2}\alpha^2 A_t - \int\nu_t(dx)(e^{\alpha x}-1-\alpha x)\ \}$$

soit une martingale locale.

Démonstration . 1) La démonstration est identique à celle du théorème 6, si l'on développe $e^{\alpha x}-1-\alpha x$ en série entière.

2) Avec les hypothèses faites, $\frac{d}{d\alpha}\Lambda^{(\infty)}(\alpha,X,A)|_{\alpha=0}=X$ est une martingale locale. On montre ensuite que $A=\langle X^c,X^c\rangle$ de même qu'au théorème 5.

1. Elle existe d'après la prop.9.

REFERENCES

[1]. J. Jacod. Multivariate point processes, predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z.f.W. 31, 1975, 235-246.

[2]. J. Jacod et J. Mémin. Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales. A paraître.

[3]. N. El Karoui et J.P. Lepeltier. Processus de Poisson ponctuel associé à un processus ponctuel, représentation des martingales de carré intégrable quasi-continues à gauche (à paraître).

[4]. J.P. Lepeltier . Thèse de 3e Cycle, Université de Paris VI.

[5]. P.A.Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. Dans ce vol.

[6]. D.W. Stroock. Diffusion processes associated with Lévy generators. Z.f.W. 32, 1975, 209-244.

[7]. J.H. Van Schuppen et E. Wong. Transformations of local martingales under a change of law. Annals of Prob. 2, 1974, p. 879-888.

[8]. Ch. Yoeurp . Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Dans ce volume.