Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Chantha Yoeurp

Décomposition des martingales locales et formules exponentielles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 432-480
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__432_0>

Université de Strasbourg 1974/75

Séminaire de Probabilités

DECOMPOSITIONS DES MARTINGALES LOCALES ET FORMULES EXPONENTIELLES

par

Ch. YOEURP

Nous présentons ici quelques résultats nouveaux sur les intégrales stochastiques. Nous faisons souvent référence au "cours sur les intégrales stochastiques" de P.A. Meyer ([4]) pour éviter de reprendre certains résultats.

Au § 1, après avoir précisé la décomposition orthogonale d'une martingale locale en partie continue, partie somme compensée de sauts accessibles et partie somme compensée de sauts totalement inaccessibles, nous examinerons, sous certaines conditions, des relations liant les martingales locales et les intégrales stochastiques avec les processus à variation finie. Pour deux martingales locales $M = (M_t)$ et $N = (N_t)$, nous définissons également le crochet $<M,N>$, et nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe.

Au § 2, comme application de la formule exponentielle de C. Doléans-Dade, nous donnons un théorème, connu sous le nom de théorème de Girsanov généralisé, sur la transformation de martingale locale par un changement de loi de probabilité, la nouvelle loi n'étant pas absolument continue par rapport à la loi initiale, mais seulement "localement" absolument continue.

Au § 3, nous introduisons une nouvelle notion d'exponentielle définie sur la classe $\mathcal{S}_p$ des semi-martingales spéciales. Elle est en général distincte de celle de C. Doléans-Dade et coïncide avec elle sur les martingales locales. C'est cette deuxième exponentielle qui nous permet d'obtenir très facilement la décomposition multiplicative des surmartingales positives dans le cas le plus général.

Définitions et notations

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante de sous-tribus $(\mathcal{F}_t)$. On suppose que $(\mathcal{F}_t)$ vérifie les conditions habituelles.

On adopte les notations suivantes :

$\mathcal{M}^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ désigne l'ensemble des martingales nulles en $t = 0$, bornées dans L^p, c'est-à-dire $\sup\limits_t E(|M_t|^p) < +\infty$.

$$\mathcal{M}^p_{loc} = \{M = (M_t) / \exists\, T_n \uparrow +\infty \text{ tels que } (M_{t\wedge T_n}) \in \mathcal{M}^p\}.$$

$\mathcal{V}^+$ est l'ensemble des processus adaptés, à trajectoires croissantes, continues à droite et nulles en $t = 0$. Un élément de $\mathcal{V}^+$ sera appelé <u>processus croissant</u>.

$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^+$ est l'ensemble des <u>processus à variation finie sur tout compact</u>.

$\mathcal{A}^+ = \{A = (A_t) \in \mathcal{V}^+ / \lim\limits_{t\to\infty} E(A_t) < +\infty\}$. Un élément de $\mathcal{A}^+$ sera appelé un <u>processus croissant intégrable</u>.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+$: ensemble des <u>processus à variation intégrable</u>.

$$\mathcal{A}_{loc} = \{V = (V_t) \in \mathcal{V} / \exists\, T_n \uparrow +\infty \text{ tels que } (\int_0^{t\wedge T_n} |dV_s|) \in \mathcal{A}\} :$$

ensemble des processus à <u>variation localement intégrable</u>.

$\mathcal{L}$: ensemble des martingales locales nulles pour $t = 0$.

§ 1. RESULTATS COMPLEMENTAIRES SUR LES MARTINGALES LOCALES.

DEFINITION (1-1).- Un t.a.R réduit la martingale locale $M = (M_t) \in \mathcal{L}$, si le processus $(M_{t \wedge R})$ est une martingale uniformément intégrable.

Il réduit fortement M, si de plus la martingale $E\{|M_R|/\mathcal{F}_t\}$ est bornée sur $[\![0,R[\![$.

Il résulte aussitôt du théorème d'arrêt de Doob que si R réduit (resp. réduit fortement) M, alors tout t.a.S tel que $S \leq R$, réduit (resp. réduit fortement) M.

Le lemme suivant est fondamental dans la suite. Pour sa démonstration, nous renvoyons à P.A. Meyer ([4] IV 7).

LEMME FONDAMENTAL (1-2).- Soit $M = (M_t) \in \mathcal{L}$. Alors, il existe des t.a. finis $R_n \uparrow +\infty$ réduisant fortement M.

La proposition suivante constitue une amélioration du théorème 8, IV [4].

PROPOSITION (1-3).- Soient $M = (M_t) \in \mathcal{L}$ et R un t.a. fini réduisant fortement M. Alors, la martingale arrêtée $(M_{t \wedge R})$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M_{t \wedge R} = H_t + V_t + W_t$$

où $H = (H_t)$ est une martingale dans $\mathcal{M}^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ et où $V = (V_t)$ et $W = (W_t)$ sont dans $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$, et V (resp. W) n'a que des sauts accessibles (resp. totalement inaccibles).

Démonstration : Désignons par S et T la partie totalement inaccessible et la partie accessible de R. Comme R est fini, on peut écrire :

$$M_R = M_S \, 1_{\{S < +\infty\}} + M_T \, 1_{\{T < +\infty\}} .$$

Donc :

(1) $$M_{t\wedge R} = E\{M_R|\mathcal{F}_t\} = E\{M_S\, 1_{\{S<+\infty\}}|\mathcal{F}_t\} + E\{M_T\, 1_{\{T<+\infty\}}|\mathcal{F}_t\}\,.$$

a) On va d'abord faire la décomposition de la martingale

$$E\{M_S\, 1_{\{S<+\infty\}}|\mathcal{F}_t\}\,.$$

Considérons la martingale positive $N_t^+ = E\{M_S^+\, 1_{\{S<+\infty\}}|\mathcal{F}_t\}$, où $M_S^+ = \mathrm{Sup}(0,M_S)$, et posons $Y_t^+ = N_t^+\, 1_{\{t<S\}}$.

Puisque S est un t.a. totalement inaccessible, la surmartingale (Y_t^+) est régulière. Elle est de plus bornée, en effet :

$$Y_t^+ = N_t^+\, 1_{\{t<R\}} + N_t^+\, 1_{\{R\le t<S\}} \qquad (R\le S)$$

$$= E\{M_S^+\, 1_{\{S<+\infty\}}|\mathcal{F}_t\}\, 1_{\{t<R\}} + E\{M_S^+\, 1_{\{S<+\infty\}} 1_{\{R\le t<S\}}|\mathcal{F}_t\}\,.$$

Au second membre de l'égalité, le premier terme est borné, car R réduit fortement M ; le deuxième terme est nul car sur $\{S<+\infty\}$, on doit avoir $R = S$.

(Y_t^+) est donc bornée et admet une décomposition de Doob :

(2) $$Y_t^+ = K_t^+ - A_t^+$$

où (K_t^+) est une martingale dans $\mathcal{M}^p$ $(1\le p<+\infty)$, et (A_t^+) est un processus croissant continu tel que $E((A_\infty^+)^p)<+\infty$ $(1\le p<+\infty)$, ([5] VII N° 59).

On considère de même la martingale $N_t^- = E\{M_S^-\, 1_{\{S<+\infty\}}|\mathcal{F}_t\}$ où $M_S^- = \mathrm{Sup}(0,-M_S)$ et on pose $Y_t^- = N_t^-\, 1_{\{t<S\}}$. On montre de même que (Y_t^-) est une surmartingale régulière bornée, elle admet donc une décomposition de Doob :

(3) $$Y_t^- = K_t^- - A_t^-$$

où (K_t^-) est une martingale dans $\mathcal{M}^p$ $(1 \le p < +\infty)$ et (A_t^-) est un processus croissant continu tel que $E((A_\infty^-)^p) < +\infty$ $(1 \le p < +\infty)$.

En retranchant membre à membre (2) et (3), on a :

$$E\{M_S 1_{\{S<+\infty\}} | \mathcal{F}_t\} 1_{\{t<S\}} = (K_t^+ - K_t^-) - (A_t^+ - A_t^-) .$$

Posons alors : $K_t = K_t^+ - K_t^-$ et $A_t = A_t^+ - A_t^-$.

On peut écrire successivement :

$$E\{M_S 1_{\{S<+\infty\}} | \mathcal{F}_t\} = K_t - A_t + E\{M_S 1_{\{S<+\infty\}} | \mathcal{F}_t\} 1_{\{S \le t\}}$$

$$= K_t - A_t + M_S 1_{\{S \le t\}} \quad (M_S 1_{\{S \le t\}} \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}) .$$

Donc finalement :

$$E\{M_S 1_{\{S<+\infty\}} | \mathcal{F}_t\} = K_t + (M_S 1_{\{S \le t\}} - A_t) \tag{4}$$

où (K_t) est une martingale dans $\mathcal{M}^p$ $(1 \le p < +\infty)$ et $(M_S 1_{\{S \le t\}} - A_t)$ est une martingale dans $\mathcal{A}$ ayant un seul saut en S.

b) On reprend la même démonstration pour la martingale $E\{M_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathcal{F}_t\}$ et on obtient :

$$E\{M_T 1_{\{T<+\infty\}} | \mathcal{F}_t\} = L_t + (M_T 1_{\{T \le t\}} - B_t) \tag{5}$$

où (L_t) est une martingale dans $\mathcal{M}^p$ $(1 \le p < +\infty)$ et $(M_T 1_{\{T \le t\}} - B_t)$ est une martingale dans $\mathcal{A}$ et à sauts accessibles.

Ajoutons membre à membre (4) et (5), nous obtenons en vertu de (1) :

$$M_{t \wedge R} = (K_t + L_t) + (M_S 1_{\{S \le t\}} - A_t) + (M_T 1_{\{T \le t\}} - B_t) .$$

Il suffit alors de poser :

$$H_t = K_t + L_t , \quad V_t = M_T 1_{\{T \le t\}} - B_t \quad \text{et} \quad W_t = M_S 1_{\{S \le t\}} - A_t .$$

C.Q.F.D. □

Nous en déduisons un théorème de décomposition orthogonale d'une martingale locale. On dira que deux martingales locales nulles en 0 sont orthogonales si leur produit est une martingale locale.

THEOREME (1-4).- Soit $M = (M_t)$ un élément de $\mathcal{L}$. Alors M peut s'écrire d'une manière unique, sous la forme :

$$M = M^c + M^{dp} + M^{dq}$$

où M^c , M^{dp} et M^{dq} sont des éléments de $\mathcal{L}$ et où M^c est à trajectoires continues, M^{dp} n'a que des sauts accessibles et est orthogonale à toute martingale locale n'ayant que des sauts totalement inaccessibles et M^{dp} n'a que des sauts totalement inaccessibles et est orthogonale à toute martingale locale n'ayant que des sauts accessibles.

Notation :

On désigne par $\mathcal{L}_c$, $\mathcal{L}_{dp}$ et $\mathcal{L}_{dq}$ les sous-espaces de $\mathcal{L}$ définis par cette décomposition. On dit que M^c est la partie continue de M , que M^{dp} (resp. M^{dq}) est la somme compensée de sauts accessibles (resp. totalement inaccessibles) de M , et que $M^{dp} + M^{dq}$ est la somme compensée de sauts de M . Le sous-espace de $\mathcal{L}$, constitué par les sommes compensées de sauts est noté $\mathcal{L}_d$.

Démonstration du théorème :

a) Unicité :

Supposons qu'il existe deux décompositions du même type de M :

$$M = M^c + M^{dp} + M^{dq} = N^c + N^{dp} + N^{dq} .$$

Alors :

$$M^c - N^c = (N^{dp} - M^{dp}) + (N^{dq} - M^{dq})$$

ce qui montre que $M^c - N^c$ est orthogonale à elle-même, elle est donc nulle,(*) et l'on a :

$$M^c = N^c$$

$$N^{dp} - M^{dp} = M^{dq} - N^{dq} ,$$

ce qui montre à nouveau que $N^{dp} - M^{dp}$ est orthogonale à elle-même, elle est donc nulle et l'on obtient finalement :

$$M^c = N^c , M^{dp} = N^{dp} \quad \text{et} \quad M^{dq} = N^{dq} .$$

b) Existence :

D'après l'unicité de la décomposition, on peut procéder par recollement. Donc, d'après le lemme (1-2), il suffit de montrer le théorème pour la martingale $(M_{t \wedge R})$ où R est un t.a. *fini* réduisant fortement M.

La proposition (1-3) permet d'écrire :

$$M_{t \wedge R} = H_t + V_t + W_t$$

où $H = (H_t)$ est dans $\mathcal{M}^2$, $V = (V_t)$ est dans $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$ et à sauts accessibles, et $W = (W_t)$ est dans $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$ et à sauts totalement inaccessibles.

Mais, selon le théorème 4[2],H peut s'écrire en $H = H^c + H^{dp} + H^{dq}$, donc :

$$M_{t \wedge R} = H_t^c + (H_t^{dp} + V_t) + (H_t^{dq} + W_t) . \tag{6}$$

On pose alors :

$$M_{t \wedge R}^c = H_t^c , M_{t \wedge R}^{dp} = H_t^{dp} + V_t \quad \text{et} \quad M_{t \wedge R}^{dq} = H_t^{dq} + W_t .$$

Il nous reste à vérifier la propriété d'orthogonalité.

(*) Cela est bien connu pour les martingales de carré intégrable et s'étend aux martingales locales M par arrêt à des temps d'arrêt réduisant M^2.

i) On va montrer que $(M^{dp}_{t\wedge R})$ est orthogonale à toute martingale locale continue $N = (N_t)$. Par arrêt, on peut supposer que N est bornée. On a :

$$N_t M^{dp}_{t\wedge R} = N_t H^{dp}_t + N_t V_t \;.$$

Or $N H^{dp}$ est une martingale puisque N est dans $\mathcal{M}^2_c$ (*) et H^{dp} est dans $\mathcal{M}^2_{dp}$. D'autre part, NV est aussi une martingale, en effet, pour $s \leq t$, on a ([5] VII 15) :

$$E\{N_t V_t - N_s V_s | \mathcal{F}_s\} = E\{\int_{]s,t]} N_u dV_u | \mathcal{F}_s\}$$

$$= 0 \qquad \text{([4] I Théo. 12).}$$

Donc $(N_t M^{dp}_{t\wedge R})$ est une martingale, et $(M^{dp}_{t\wedge R})$ est orthogonale à N.

On démontre de même l'orthogonalité de $(M^{dq}_{t\wedge R})$ avec N.

ii) Montrons que $(M^{dp}_{t\wedge R})$ est orthogonale à toute martingale locale $N = (N_t)$ n'ayant que des sauts totalement inaccessibles. On peut choisir R de telle façon qu'il réduise fortement à la fois M et N. On a alors la décomposition de $(N_{t\wedge R})$ analogue à (6) :

$$N_{t\wedge R} = K^c_t + (K^{dq}_t + U_t)$$

où K^c est élément de $\mathcal{M}^2_c$, K^{dq} élément de $\mathcal{M}^2_{dq}$ et U élément de $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$ et à sauts totalement inaccessibles.

On a :

$$N_{t\wedge R} M^{dp}_{t\wedge R} = K^c_t M^{dp}_{t\wedge R} + K^{dq}_t H^{dp}_t + K^{dq}_t V_t + U_t H^{dp}_t + U_t V_t \;.$$

Au second membre de l'égalité, le premier terme est une martingale

(*) $\mathcal{M}^2_c$, $\mathcal{M}^2_{dp}$ et $\mathcal{M}^2_{dq}$ désignent les sous-espaces de $\mathcal{M}^2$ définis par la décomposition orthogonale $M = M^c + M^{dp} + M^{dq}$.

(démonstration faite dans i)), le deuxième terme aussi (orthogonalité de $\mathcal{M}^2_{dp}$ et $\mathcal{M}^2_{dq}$), les autres termes sont produits de deux processus sans discontinuité commune, dont l'un au moins est dans $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$. Ils sont aussi des martingales : faisons la démonstration pour UV par exemple.

Comme U et V sont sans discontinuité commune, l'intégrale de Stieljes $\int_0^t U_s \, dV_s$ est bien définie et est égale à $\int_0^t U_{s-} \, dV_s$. Donc, pour $s<t$, on a ([5], VII 15) :

$$\begin{aligned} E\{U_t V_t - U_s V_s | \mathcal{F}_s\} &= E\{\int_{]s,t]} U_u \, dV_u | \mathcal{F}_s\} \\ &= E\{\int_{]s,t]} U_{u-} \, dV_u | \mathcal{F}_s\} \\ &= 0 \quad ([4], \text{ I, théo. } 12). \end{aligned}$$

D'où l'orthogonalité désirée.

On démontre de la même façon que $(M^{dq}_{t \wedge R})$ est orthogonale à toute martingale locale n'ayant que des sauts accessibles.

□

Rappelons que $\mathcal{V}^d$ désigne l'ensemble des processus à variation finie purement discontinus et que $\mathcal{M}^2_d$ désigne l'ensemble des martingales de carré intégrable sommes compensées de sauts. On a le lemme suivant :

LEMME (1-5).-

1. <u>Toute</u> $M = (M_t) \in \mathcal{M}^2_d$ <u>vérifiant</u> $\sum_{s \le t} |\Delta M_s| < +\infty$ <u>p.s. pour tout</u> t, <u>appartient</u> à $\mathcal{V}$.

2. <u>Toute</u> $M = (M_t) \in \mathcal{M}^2_{dp}$ <u>vérifiant</u> $\sum_{s \le t} |\Delta M_s| < +\infty$ <u>p.s. pour tout</u> t, <u>appartient à</u> $\mathcal{V}^d$, <u>autrement dit, on a</u> :

$$M_t = \sum_{s \le t} \Delta M_s ,$$

<u>la série étant absolument convergente</u>.

<u>Démonstration</u> : Rappelons d'abord que pour tout processus $A = (A_t) \in \mathcal{A}$, il existe un processus prévisible unique appartenant à $\mathcal{A}$, noté $\tilde{A} = (\tilde{A}_t)$ tel

que $A-\tilde{A}$ soit une martingale (cf. [1] pour le cas où A appartient à $\mathcal{A}^+$. L'extension au cas où A appartient à $\mathcal{A}$ est immédiate).

1. Considérons d'abord les t.a. suivants :

$$S_n = \inf\{t / \sum_{s\leq t} |\Delta M_s| \geq n\} .$$

Les S_n tendent en croissant vers $+\infty$, du fait que $\sum_{s\leq t} |\Delta M_s|$ est finie pour tout t fini, par hypothèse. On peut écrire :

$$\sum_{s\leq S_n} |\Delta M_s| = \sum_{s<S_n} |\Delta M_s| + |\Delta M_{S_n}|$$

$$\leq n + |\Delta M_{S_n}| .$$

Mais, M appartient à $\mathcal{M}^2$, donc $|\Delta M_{S_n}|$ est de carré intégrable. Par conséquent, $\sum_{s\leq S_n} |\Delta M_s|$ appartient à L^2.

Ceci étant, rappelons la construction de M^d ([2], théorème 4) :

si (T_n) est une suite de t.a. de graphes disjoints, ou bien prévisibles, ou bien totalement inaccessibles, épuisant les sauts de M, on a :

$$M_t^d = \sum_n (\Delta M_{T_n} 1_{\{T_n\leq t\}} - \widetilde{\Delta M_{T_n} 1_{\{T_n\leq t\}}}) \tag{7}$$

où la série converge dans L^2 pour tout t fixé.

On va montrer que les deux séries $\sum_n \Delta M_{T_n} 1_{\{T_n\leq t\}}$ et $\sum_n \widetilde{\Delta M_{T_n} 1_{\{T_n\leq t\}}}$ convergent à la fois dans L^2 et presque sûrement vers des éléments de $\mathcal{V}$.

D'après ce qui précède, quitte à arrêter, on peut supposer que $\sum_{s\leq t} |\Delta M_s|$ appartient à L^2, pour tout t fixé. Alors, la série

$\sum_n |\Delta M_{T_n}| 1_{\{T_n \leq t\}}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers la même limite $\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|$. Donc, à fortiori, la série $\sum_n \Delta M_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}$ converge p.s. et dans L^2 vers $\sum_{s \leq t} \Delta M_s$, qui est élément de $\mathcal{V}$. Il en résulte que la série $\sum_n \widetilde{\Delta M_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}}$ converge dans L^2 et la relation (7) s'écrit aussi :

$$M_t^d = \sum_{s \leq t} \Delta M_s - \sum_n \widetilde{\Delta M_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}}$$

où la deuxième série converge au sens de L^2.

Enfin, pour montrer que $\sum_n \widetilde{\Delta M_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}}$ converge aussi p.s. vers un élément de $\mathcal{V}$, on adopte la notation suivante : pour deux éléments $A = (A_t)$ et $B = (B_t)$ de $\mathcal{V}$, on dit que B majore A fortement et on écrit $A \ll B$, si $B - A$ est un processus croissant. Ceci étant, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{k} (\Delta M_{T_n})^+ 1_{\{T_n \leq t\}} \ll \sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta M_{T_n}| 1_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{s \leq t} |\Delta M_s| .$$

Donc, en passant à la projection duale prévisible, on a :

$$\sum_{n=1}^{k} \widetilde{(\Delta M_{T_n})^+ 1_{\{T_n \leq t\}}} \ll \widetilde{\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|} .$$

La suite $\left(\sum_{n=1}^{k} \widetilde{(\Delta M_{T_n})^+ 1_{\{T_n \leq t\}}} \right)$ est croissante au sens fort et l'espérance mathématique de son terme général est majorée par $E\left(\widetilde{\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|} \right)$.

Donc, sa limite $\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{(\Delta M_{T_n})^+ 1_{\{T_n \leq t\}}}$ est encore un processus croissant ([5], VII 9 c).

Pour la même raison, $\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{(\Delta M_{T_n})^- 1_{\{T_n \leq t\}}}$ est aussi un processus croissant. Il en résulte que la série $\sum_n \widetilde{\Delta M_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}}$ converge p.s. vers un élément de $\mathcal{V}$; mais c'est aussi la limite pour la convergence au sens de L^2, on en conclut que M^d est dans $\mathcal{V}$. Or $M = M^d$.

C.Q.F.D.

2. Par hypothèse, M est un élément de $\mathcal{M}^2_{dp}$. Donc, en désignant par (T_n) une suite de t.a. prévisibles, de graphes disjoints, épuisant les sauts de M, on a ([2], théorème 4)

$$M_t = \sum_n \Delta M_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}$$

où la somme converge au sens de L^2.

Mais par hypothèse, la somme $\sum_{s\leq t} |\Delta M_s|$ converge p.s. pour tout t fini. Il en résulte que la somme $\sum_n \Delta M_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}$ converge à la fois presque sûrement et dans L^2 vers la même limite $\sum_{s\leq t} \Delta M_s$. Donc, $M_t = \sum_{s\leq t} \Delta M_s$.

C.Q.F.D.

Le théorème suivant donne des relations entre les martingales locales et les processus à variation finie.

THEOREME (1-6).-

1. Tout élément $M = (M_t)$ de $\mathcal{L}\cap\mathcal{V}$ est une somme compensée de sauts, autrement dit M est élément de $\mathcal{L}_d$.

2. Tout élément $M = (M_t)$ de $\mathcal{L}_d$ vérifiant presque sûrement $\sum_{s\leq t} |\Delta M_s| < +\infty$, pour tout t fini, appartient à $\mathcal{V}$.

3. Tout élément $M = (M_t)$ de $\mathcal{L}_{dp}$ vérifiant presque sûrement $\sum_{s\leq t} |\Delta M_s| < +\infty$, pour tout t fini, appartient à $\mathcal{V}^d$, donc $M_t = \sum_{s\leq t} \Delta M_s$, pour tout t fini.

Démonstration : En vertu du lemme (1-2), il suffit de démontrer pour la martingale $(M_{t\wedge R})$ où R est un t.a. réduisant fortement M .

Dans la démonstration du théorème (1-4), on a vu que :

$$M_{t\wedge R} = H_t + V_t + W_t \,,\; M^c_{t\wedge R} = H^c_t \,,\; M^{dp}_{t\wedge R} = H^{dp}_t + V_t \quad \text{et} \quad M^{dq}_{t\wedge R} = H^{dq}_t + W_t$$

où H est dans $\mathcal{M}^2$ et où V et W sont dans $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$ et V (resp. W) n'a que des sauts accessibles (resp. totalement inaccessibles).

1. Si M appartient à $\mathcal{V}$, il en est de même de H . Donc, $M^c_{t\wedge R} = H^c_t = 0$ ([4], II 15).

2. Le résultat découle immédiatement du lemme (1-5).

3. Toujours d'après le lemme (1-5), pour démontrer le point 3., on est ramené à prouver ceci :

Si V est une martingale à variation intégrable qui ne saute qu'en des temps d'arrêt accessibles, alors V est un processus purement discontinu en tant qu'élément de $\mathcal{V}$.

Pour un tel processus V , écrivons sa décomposition canonique ([1], IV, T 37) :

$$V = V^c + V^d \tag{8}$$

où V^c et V^d sont dans $\mathcal{A}$ et où V^c est continu et V^d est purement discontinu et n'a que des sauts accessibles. Il s'agit de montrer que $V^c = 0$. Prenons les compensatrices prévisibles de (8), en remarquant que $\widetilde{V} = 0$, V étant une martingale :

$$0 = V^c + \widetilde{V^d} \;,$$

ce qui entraîne que $V^c = 0$ et $\widetilde{V^d} = 0$, d'après le lemme suivant :

LEMME.- <u>Soit</u> $A = (A_t)$ <u>un élément de</u> $\mathcal{A}$, <u>purement discontinu et à sauts accessibles. Alors sa compensatrice prévisible</u> $\widetilde{A}$ <u>est aussi purement discontinue</u>.

Démonstration du lemme : Il suffit de le démontrer pour A processus croissant purement discontinu et à sauts accessibles.

Comme le graphe d'un t.a. accessible est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de t.a. prévisibles, on peut choisir une suite de t.a. (T_n) épuisant les sauts de A qui sont prévisibles. Posons $H = \bigcup_n [\![T_n]\!]$, c'est un ensemble prévisible. Si on appelle μ la mesure sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{F})$ engendrée par A et $\tilde{\mu}$ sa projection prévisible, on sait que $\tilde{\mu}$ est engendrée par $\tilde{A}$ ([1] V T 28).

La mesure μ étant portée par H, on a alors :

$$E\left(\int_0^{+\infty} 1_{H^c}(t,\omega)\, d\tilde{A}_t(\omega)\right) = \tilde{\mu}(H^c) = \mu(H^c) = 0 .$$

Donc, pour presque tout ω, $d\tilde{A}_t(\omega)$ charge au plus l'ensemble dénombrable $H(\omega)$. Ce qui montre que $\tilde{A}$ est purement discontinu.

C.Q.F.D.

Remarque : Il existe des martingales qui sont dans $\mathcal{L}_{dp}$, mais qui ne sont pas dans $\mathcal{V}$.

Exemple : On prend $\Omega = [0,1]$ et P : mesure de Lebesgue.

Désignons par (Z_n) une suite de v.a. indépendantes, équidistribuées, à valeurs dans $\{-1,+1\}$ et de moyenne nulle, (par exemple des fonctions de Rademacher). Posons :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_n), n \in \mathbb{N} \\ X_0 = 0 \\ X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{k}, n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

On vérifie que (X_n) est une martingale par rapport à $(\mathcal{G}_n)$.

De plus, elle est de carré intégrable, en effet :

$$\sup_n E(X_n^2) = \sup_n E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{k}\right)^2\right)$$

$$= \sup_n \sum_{k=1}^{n} \frac{E(Z_k^2)}{k^2} \qquad ((Z_k) \text{ indépendante})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty .$$

Par contre, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\Delta X_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty .$$

Pour terminer, considérons la suite $t_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, qui croît strictement vers 1, et posons :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_t = \mathcal{G}_n & \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[\\ \mathcal{F}_t = \mathcal{G}_\infty & \text{pour } t \geq 1 \\ M_t = X_n & \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[\\ M_t = X_\infty & \text{pour } t \geq 1 . \end{cases}$$

On voit alors que sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$, (M_t) est un élément de $\mathcal{M}^2_{dp}$, mais elle n'est pas dans $\mathcal{V}$, puisque $\sum_{s \leq 1} |\Delta M_s| = +\infty$.

□

Le théorème suivant qui définit l'intégrale stochastique d'un procesus prévisible par rapport à une martingale locale est emprunté à P.A. Meyer ([4] V Théorème 16).

THEOREME (1-7).- <u>Soit</u> $M = (M_t) \in \mathcal{L}$ <u>et soit</u> $H = (H_t)$ <u>un processus prévisible tel que le processus croissant</u>

$$\left(\int_0^t H_s^2 \, d[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>soit localement intégrable</u>. <u>Alors</u> :

a) <u>pour toute</u> $N = (N_t) \in \mathcal{L}$, <u>le processus croissant</u> $\int_0^t |H_s| |d[M,N]_s|$ <u>est à valeurs finies pour tout</u> t <u>fini</u>,

b) <u>il existe une martingale locale et une seule</u> $L = H.M$ <u>telle que l'on ait, pour toute</u> $N = (N_t) \in \mathcal{L}$:

$$[L,N] = H.[M,N]$$

c) <u>les processus</u> (ΔL_t) et $(H_t \Delta M_t)$ <u>sont indistinguables</u>.

<u>Remarque</u> : Les classes $\mathcal{L}_c$, $\mathcal{L}_{dp}$, $\mathcal{L}_{dq}$ et $\mathcal{L}_d$ sont stables par intégrale stochastique.

PROPOSITION (1-8).- <u>Soit</u> $M = (M_t) \in \mathcal{L}_{dp}$ <u>et soit</u> $H = (H_t)$ <u>un processus prévisible tel que le processus croissant</u>

$$\left(\int_0^t H_s^2 \, d[M,N]_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>soit localement intégrable</u>.

<u>Si l'on a pour presque tout</u> ω , $\sum_{s \leq t} |H_s| |\Delta M_s| < +\infty$, <u>pour tout</u> t <u>fini, alors l'intégrale stochastique</u> $H.M$ <u>est indistinguable du processus à variation finie</u> $\sum_{s \leq t} H_s \, \Delta M_s$:

$$H.M_t = \sum_{s \leq t} H_s \, \Delta M_s \text{ , \underline{pour tout} } t \text{ \underline{fini}.}$$

<u>Démonstration</u> : Cette proposition résulte immédiatement du théorème (1-6) et de la remarque ci-dessus.

□

On va maintenant définir, pour deux martingales locales $M = (M_t)$ et $N = (N_t)$, le crochet $<M , N>$.

DEFINITION (1-9).- <u>Soient</u> $M = (M_t)$ <u>et</u> $N = (N_t)$ <u>deux éléments de</u> $\mathcal{L}$. <u>Le</u>

processus $<M,N> = (<M,N>_t)$, s'il existe, est l'unique processus prévisible appartenant à $\mathcal{V}$ tel que $MN - <M,N>$ soit une martingale locale.

Vérifions qu'il y a bien unicité. Soient en effet deux processus prévisibles $A = (A_t)$ et $B = (B_t)$ appartenant à $\mathcal{V}$ tels que $MN - A$ et $MN - B$ soient des martingales locales. Alors $A - B$ est un élément de $\mathcal{L} \cap \mathcal{V}$. Par arrêt, on peut supposer que $A - B$ est une martingale uniformément intégrable. Comme $A - B$ est prévisible, elle est nécessairement une martingale continue à variation finie. Donc ([1] V T 39) :

$$A - B = 0 .$$

$\square$

Soit $A = (A_t)$ un processus croissant tel que pour chaque t fixé, A_t soit intégrable. On sait que ([1]) A admet alors une projection duale prévisible, notée $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_t)$, qui est caractérisée par le fait que $\widetilde{A}$ est un processus croissant prévisible et que $A - \widetilde{A}$ est une martingale.

On étend ici la définition au cas où A_t n'est pas forcément intégrable pour t fixé.

DEFINITION (1-10).- Soit $A = (A_t) \in \mathcal{V}^+$. On appelle projection duale prévisible de A (ou compensatrice prévisible de A) , si elle existe, l'unique processus prévisible appartenant à $\mathcal{V}^+$, noté $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_t)$, tel que $A - \widetilde{A}$ soit une martingale locale.

Par linéarité, on étend cette définition au processus $A = (A_t)$ appartenant à $\mathcal{V}$.

La vérification de l'unicité de $\widetilde{A}$ est immédiate et est déjà faite dans la définition (1-9).

On va maintenant donner une définition équivalente à la définition (1-9). Soient $M = (M_t)$ et $N = (N_t)$ deux éléments de $\mathcal{L}$. On sait que $[M,N]$ existe toujours et que $MN - [M,N]$ est une martingale locale (corollaire 22 IV [4]). On voit alors que si $<M,N>$ existe, $[M,N] - <M,N>$ est une martingale locale, en vertu de la définition (1-9). Donc, $[M,N]$ admet une projection duale prévisible qui n'est autre que $<M,N>$, et réciproquement. D'où :

DEFINITION (1-11).- Soient $M=(M_t)$ et $N=(N_t)$ deux éléments de $\mathcal{L}$. Le processus $<M,N>=(<M,N>_t)$, s'il existe, est la projection duale prévisible de $[M,N]$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de $\mathcal{V}$ admette une projection duale prévisible.

THEOREME (1-12).- Soit $A=(A_t)\in\mathcal{V}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. A admet une projection duale prévisible.
2. A appartient à $\mathcal{A}_{loc}$.
3. $(\sum_{s\le t}\Delta A_s)$ appartient à $\mathcal{A}_{loc}$.

Démonstration : Il suffit de la faire pour $A\in\mathcal{V}^+$.

Remarquons que l'on peut toujours écrire A sous la forme suivante :

$$A = A^c + A^d$$

où $$A^c = (A_t^c)\in\mathcal{V}^c \quad \text{et} \quad A^d = (A_t^d)\in\mathcal{V}^d .$$

Mais, A^c appartient à $\mathcal{A}_{loc}$ (considérer $T_n=\inf\{t/A_t^c\ge n\}$). Donc, la condition 2. est équivalente à la condition 3. Il nous reste à montrer l'équivalence entre les conditions 1. et 2.

a) 1. ⇒ 2.

On suppose que $\tilde{A}$ existe. Par définition $M=A-\tilde{A}$ est une martingale locale. Soit donc (T_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ et réduisant M. Si on appelle (S_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ telle que $\tilde{A}_{S_n}\le n$, alors $R_n=S_n\wedge T_n$ réduit M et on a encore

$\widetilde{A}_{R_n} \leq n$. L'égalité $A_{R_n} = M_{R_n} + \widetilde{A}_{R_n}$ montre alors que A_{R_n} est intégrable. Donc, A est élément de $\mathcal{A}_{loc}$.

b) <u>2. ⇒ 1.</u>

On suppose que A appartient à $\mathcal{A}_{loc}$. Soit donc (T_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ telle que $(A_t^n) = (A_{t \wedge T_n})$ soit intégrable. Alors, on sait que $\widetilde{A^n}$ existe et est unique. Par recollement, on obtient $\widetilde{A}$.

□

Par définition, on a pout tout t fini :

$$[M,N]_t = \langle M^c, N^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s .$$

Donc, le saut en s de $[M,N]$ est $\Delta M_s \Delta N_s$. Il résulte alors du théorème (1-12) que :

THEOREME (1-13).- <u>Soient</u> $M = (M_t)$ <u>et</u> $N = (N_t)$ <u>deux éléments de</u> $\mathcal{L}$. <u>Les trois conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1. $\langle M,N \rangle$ <u>existe</u>,
2. $[M,N]$ <u>appartient à</u> $\mathcal{A}_{loc}$,
3. $\left(\sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s\right)$ <u>appartient à</u> $\mathcal{A}_{loc}$.

On a le corollaire suivant qui dit que l'on ne peut pas définir le processus $\langle M,M \rangle$ en dehors de la classe des martingales de carré localement intégrable. On note par $\mathcal{M}^2_{loc}$ cette classe de martingales :

$$\mathcal{M}^2_{loc} = \{(M_t) \in \mathcal{L} / \exists\ T_n \uparrow +\infty \text{ tel que } (M_{t \wedge T_n}) \in \mathcal{M}^2\} .$$

COROLLAIRE (1-14).- <u>Soit</u> $M = (M_t)$ <u>un élément de</u> $\mathcal{L}$. <u>Alors, le processus croissant prévisible</u> $\langle M,M \rangle$ <u>existe si et seulement si</u> M <u>appartient à</u> $\mathcal{M}^2_{loc}$.

Démonstration :

a) Condition nécessaire.

On suppose que $<M,M>$ existe. D'après le théorème précédent, $(\sum_{s\le t} (\Delta M_s)^2)$ appartient à $\mathcal{A}_{loc}$. Soit donc (R_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ telle que $\sum_{s\le R_n} (\Delta M_s)^2$ soit intégrable et soit $S_n = \inf\{t/|M_t| \ge n\}$.

Posons : $T_n = R_n \wedge S_n$. On a :

$$|M_{T_n}| \le |M_{T_{n-}}| + |\Delta M_{T_n}|$$
$$\le n + |\Delta M_{T_n}| .$$

Mais, $(\Delta M_{T_n})^2 \le \sum_{s \le T_n} (\Delta M_s)^2$. Donc, M_{T_n} est de carré intégrable, et M appartient à $\mathcal{M}^2_{loc}$.

b) Condition suffisante.

On suppose que M appartient à $\mathcal{M}^2_{loc}$. Il existe donc une suite de t.a. (T_n) tendant en croissant vers $+\infty$ telle que $M^n = (M_{t\wedge T_n})$ soit dans $\mathcal{M}^2$. Alors, $<M^n,M^n>$ existe et est unique. Par recollement, on obtient $<M,M>$.

$\square$

Nous allons maintenant donner une condition suffisante importante pour qu'on puisse définir le processus $<M,N>$.

DEFINITION (1-15).- Une martingale $M = (M_t)$ est dite localement bornée, s'il existe une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ telle que la martingale arrêtée $(M_{t\wedge T_n})$ soit bornée par une constante, pour chaque n fixé.

PROPOSITION (1-16).- Soit $M = (M_t)$ une martingale localement bornée. Alors

<u>pour toute martingale</u> $N = (N_t) \in \mathcal{L}$, <u>le processus</u> $<M,N>$ <u>existe</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit une suite de t.a. $R_n \uparrow +\infty$ telle que $(M_{t \wedge R_n})$ soit

bornée par k_n , et soit $S_n \uparrow +\infty$, une suite de t.a. réduisant fortement N . Posons :

$$T_n = R_n \wedge S_n \wedge \inf\{t / \sum_{s \leq t} |\Delta M_s \, \Delta N_s| \geq n\} .$$

On a :

$$\sum_{s \leq T_n} |\Delta M_s \, \Delta N_s| = \sum_{s < T_n} |\Delta M_s \, \Delta N_s| + |\Delta M_{T_n} \, \Delta N_{T_n}|$$

$$\leq n + 2k_n |\Delta N_{T_n}| .$$

Mais, puisque T_n réduit aussi fortement N , la proposition (1-3) permet d'écrire que :

$$N_{t \wedge T_n} = H_t + U_t$$

où $H = (H_t)$ est dans $\mathcal{M}^2$ et $U = (U_t)$ est dans $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$.

Donc ,

$$\Delta N_{T_n} = \Delta H_{T_n} + \Delta U_{T_n} .$$

Ce qui montre que ΔN_{T_n} est intégrable. Il en résulte que $\sum_{s \leq T_n} |\Delta M_s \, \Delta N_s|$ est intégrable et le théorème (1-13) donne le résultat désiré.

<u>Remarque</u> : La définition (1-9) ou la définition (1-11) présente l'avantage de ne pas passer par la polarisation. Ainsi, pour deux martingales locales $M = (M_t)$ et $N = (N_t)$, le processus $<M,N>$ peut très bien exister sans que $<M,M>$ et $<N,N>$ existent. Par exemple, soit $M = (M_t)$ une martingale locale qui n'est pas dans $\mathcal{M}^2_{loc}$ (C. Doléans-Dade, Séminaire de Probabilités V. p. 138). D'après le corollaire (1-14), le processus $<M,M>$ n'existe pas. Par contre, le

processus $<M,N>$ existe pour toute martingale localement bornée $N = (N_t)$, selon la proposition (1-16).

§ 2. EXPONENTIELLE DE SEMI-MARTINGALES APPLICATION

1. Exponentielle de semi-martingales.

Soit $X = (X_t)$ une semi-martingale nulle pour $t = 0$. Considérons l'équation intégrale suivante :

$$Z_t = 1 + \int_o^t Z_{s-} \, dX_s \ .$$

Une solution de cette équation, si elle existe, est une semi-martingale puisque l'intégrale stochastique conserve les semi-martingales. On a le théorême suivant dû à Doléans-Dade.

THEOREME (2-1).- Etant donnée une semi-martingale $X = (X_t)$ nulle pour $t = 0$. Alors, il existe une semi-martingale et une seule qui vérifie l'équation

$$Z_t = 1 + \int_o^t Z_{s-} \, dX_s \ . \tag{1}$$

Elle est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} Z_o = 1 \\ Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2} < X^c, X^c >_t) \prod\limits_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}, t > 0 \end{cases}$$

où le produit infini converge presque sûrement pour tout t fini.

Notation : On notera par $\varepsilon(X)$ la solution de (1).

Démonstration : Cette démonstration, simplification de celle de C. Doléans, figure dans le cours [4], IV, 25, p. 59.

2. Transformation de martingale locale par un changement de probabilité.

Voici une application du théorème (2-1) :

PROPOSITION (2-2).- Soit $M = (M_t) \in \mathcal{L}$. Pour tout élément $X = (X_t)$ de $\mathcal{L}$ tel que $<X,M>$ existe, le processus $\varepsilon(M)(X - <X,M>)$ est une martingale locale dans $\mathcal{L}$.

Démonstration : Posons $Z = X - <X,M>$ et appliquons le corollaire 23 IV [4] aux semi-martingales $\varepsilon(M)$ et Z . On a, pour tout t fini :

$$\varepsilon(M)_t Z_t = \int_o^t \varepsilon(M)_{s-} dZ_s + \int_o^t Z_{s-} d\varepsilon(M)_s + [\varepsilon(M),Z]_t$$

$$\varepsilon(M)_t Z_t = (\int_o^t \varepsilon(M)_{s-} dX_s - \int_o^t \varepsilon(M)_{s-} d <X,M>_s) + \int_o^t Z_{s-} d\varepsilon(M)_s +$$

$$(\int_o^t \varepsilon(M)_{s-} d[X,M]_s - \int_o^t \varepsilon(M)_{s-} d[M, <X,M>]_s)$$

$$= \int_o^t \varepsilon(M)_{s-} dX_s + \int_o^t \varepsilon(M)_{s-} d([X,M]_s - <X,M>_s) + \int_o^t Z_{s-} d\varepsilon(M)_s$$

$$- \int_o^t \varepsilon(M)_{s-} d[M, <X,M>]_s .$$

Au second membre de l'égalité, les trois premiers termes sont des intégrales stochastiques par rapport à des martingales locales, ils sont donc des martingales locales. De même pour le dernier terme, cela résulte du lemme suivant :

LEMME (2-3).- Soient $M = (M_t) \in \mathcal{L}$ et $A = (A_t) \in \mathcal{V}$. Si A est prévisible, alors $[M,A]$ est une martingale locale.

Démonstration : On peut écrire successivement, pour tout t fini :

$$[M,A]_t = \sum_{s \le t} \Delta M_s \Delta A_s \quad \text{(définition)}$$

$$= \sum_{s \le t} \Delta A_s \Delta M_s^{dp} \quad \text{(A n'a que des sauts prévisibles).}$$

Mais le processus $(\Delta A_t) = (A_t - A_{t-})$ est différence de deux processus prévisibles localement bornés(*) donc l'intégrale stochastique $\int_0^t \Delta A_s \, dM_s^{dp}$ existe. La proposition (1-8) permet alors d'écrire :

$$[M,A]_t = \int_0^t \Delta A_s \, dM_s^{dp} \ .$$

Donc, $[M,A]$ est une martingale locale.

Dans la suite, on va introduire une autre loi de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$. Pour éviter des confusions, on adopte la notation suivante :

$M = (M_t)$ est $(P,\mathcal{F}_t)$ - martingale (resp. $(P,\mathcal{F}_t)$ - martingale locale) signifie que M est une martingale (resp. martingale locale) relativement à la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)$ et à la loi de probabilité P . On adopte aussi les notations $\mathcal{M}^2(P,\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{L}(P,\mathcal{F}_t)$,...

Voici un lemme dont nous aurons besoin :

LEMME (2-4).- Soit P' une loi de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$ équivalente à P . Posons :

$$\begin{cases} \mu_t = E\{\frac{dP'}{dP}/\mathcal{F}_t\} \ , & \text{pour tout } t \text{ fini.} \\ \mu = (\mu_t) \ . \end{cases}$$

Alors, un processus adapté $Z = (Z_t)$ est une $(P',\mathcal{F}_t)$ martingale (resp. martingale locale) si et seulement si $Z\mu$ est une $(P,\mathcal{F}_t)$-martingale (resp. martingale locale).

(*) Soit (H_t) un processus adapté (resp. prévisible) continu à droite ayant des limites à gauche. Alors (H_{t-}) (resp. (H_t)) est localement borné. En effet, il suffit, dans le cas adapté, de considérer $T_n = \inf\{t/|H_t| \geq n\}$. Dans le cas prévisible, T_n est un t.a. prévisible, donc annoncé par (S_{nm}) ; considérer $S_k = \sup\limits_{\substack{n \leq k \\ m \leq k}} S_{nm}$.

Démonstration : Par arrêt, il suffit de démontrer le lemme pour une vraie martingale.

Soit $Z = (Z_t)$ un processus adapté. Alors, pour tout t fini et pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, on peut écrire :

$$\int_A Z_t \, dP' = \int_A Z_t \, \mu_\infty \, dP$$

$$= \int_A E\{Z_t \, \mu_\infty | \mathcal{F}_t\} dP$$

$$= \int_A Z_t \, \mu_t \, dP \, .$$

Donc :

$$\int_A Z_t \, dP' = \int_A Z_t \, \mu_t \, dP \, .$$

De cette égalité, on obtient immédiatement le résultat désiré.

Remarque : Si P' est seulement absolument continue par rapport à P , alors :

- dans le cas d'une martingale, le lemme subsiste,

- dans le cas d'une martingale locale, la condition reste suffisante, mais n'est plus nécessaire, car une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ P'-presque sûrement ne l'est pas en général pour P .

$\sqcap$

Soit $M = (M_t) \in \mathcal{L}$ telle que l'on ait pour presque tout ω , $\Delta M_s(\omega) \geq -1$, pour tout s fini, de façon que $\varepsilon(M)$ soit positif.

Si on suppose de plus que $\varepsilon(M)$ est une martingale uniformément intégrable, on peut introduire une autre loi de probabilité P' , absolument continue par rapport à P , en posant :

$$P' = \varepsilon(M)_\infty P \, .$$

Dans ces conditions, en appliquant la remarque ci-dessus et le lemme (2-4), on a le résultat suivant :

pour toute $X = (X_t) \in \mathcal{L}(P, \mathcal{F}_t)$ telle que $<X,M>$ existe (relativement à P) , le processus $X - \langle X,M \rangle$ est une $(P',\mathcal{F}_t)$ - martingale locale.

Mais, on ne connaît pas de bon critère sur M pour que $\varepsilon(M)$ soit une martingale uniformément intégrable. C. Doléans-Dade en a cité un qui est trop fort : si M est une martingale bornée dont tous les sauts sont à valeurs dans $[-1,+\infty[$, alors $\varepsilon(M)$ est une martingale (bornée).

On va donc travailler dans le cas où $\varepsilon(M)$ est seulement une martingale locale positive. On est alors amené à travailler sur un "bon espace" où les tribus ne sont pas complétées, et à introduire la notion de martingale locale jusqu'à un certain t.a. . Cette notion est introduite par H. Kunita pour étudier le même problème, mais sous un angle différent.

DEFINITION (2-5).- Soit T un t.a. et $X = (X_t)$ un processus défini sur $[\![0,T[\![$. On dit que X est une martingale locale jusqu'à T , s'il existe une suite croissante de t.a. (T_n) telle que $T_n < T$ p.s. pour tout n , $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ p.s. et $(X_{t\wedge T_n})$ soit une martingale, pour tout n fixé.

Choix d'un bon espace.

On désigne par :

E : un espace polonais.

Ω : l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E .

Y_t : l'application coordonnée d'indice t sur Ω .

$\mathcal{F}^\circ_t$: la tribu engendrée par les Y_s , $s \leq t$.

$\mathcal{F}^\circ = \bigvee_t \mathcal{F}^\circ_t$: la tribu engendrée par les $\mathcal{F}^\circ_t$.

$\mathcal{F}^\circ_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}^\circ_s$.

On munit $(\Omega,\mathcal{F}^\circ)$ d'une loi de probabilité P . On travaillera relativement à $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ (sans complétion). Les graphes de t.a. seront entendus "graphes dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$" et non pas dans $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. On note par $\mathcal{P}$ la tribu prévisible sur $\bar{R}_+ \times \Omega$; elle est engendrée par les processus continus à gauche, adaptés à $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$.

LEMME DE LA REGULARISATION (Föllmer).- Soit $X^\circ = (X^\circ_t)$ une surmartingale positive par rapport à $(P,\mathcal{F}^\circ_{t+})$. Supposons que la fonction $t \mapsto E(X^\circ_t)$ soit continue à droite.

Alors, X° admet une modification continue à droite $X = (X_t)$ adaptée à $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$, ayant des limites à gauche dans R_+ avant le premier instant où elle vaut 0 .

De plus, l'ensemble :

$$\{\omega / \exists\ t \text{ tel que } X_{t-}(\omega) \text{ n'existe pas dans } R_+\}$$

est mesurable et de mesure nulle par rapport à P .

Démonstration : Soit $H_{t,a,b}$ l'ensemble des ω tels que la fonction :

$$r \mapsto X^\circ_r(\omega)\ ,\ r \in Q \cap [0,t]$$

soit non bornée ou admette une infinité de montées sur l'intervalle $[a,b]$. L'ensemble $H_{t,a,b}$ est $\mathcal{F}^\circ_{t+}$ - mesurable.

Posons :

$$H_t = \bigcap_{s>t} \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b \in Q}} H_{s,a,b}$$

$$X_t(\omega) = \lim_{\substack{r \downarrow t \\ r>t \\ r \in Q}} X^\circ_r(\omega) \quad \text{si } \omega \notin H_t$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{si } \omega \in H_t \ .$$

Comme H_t croît avec t , le processus (X_t) admet des trajectoires continues à droite sur $[0,+\infty[$. D'après [5] VI T 4 , H_t est $\mathcal{F}^\circ_{t+}$ - mesurable et est P - négligeable, et (X_t) est une surmartingale, modification continue à droite de X° .

On peut écrire :

$$\{\omega / \exists\ t \text{ tel que } X_{t-}(\omega) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R}\} = \bigcup_t H_t .$$

C'est donc un ensemble mesurable P-négligeable.

$\sqcap$

Rappelons la définition de la mesure de Föllmer associée à une surmartingale positive :

LEMME (théorème de Föllmer).- Soit $Z = (Z_t)$ une surmartingale positive régularisée. Il existe alors une mesure et une seule P^Z définie sur $\mathcal{P}$ telle que :

$$P^Z(]\!]S,+\infty]\!]) = E(Z_S\, 1_{\{S<+\infty\}}) \text{ , pour tout t.a.S .}$$

Pour la démonstration, nous renvoyons à Föllmer ([3]) et à Stricker ([8]).

Remarques :

a) Puisque la mesure de Föllmer est uniquement déterminée sur les intervalles stochastiques $]\!]S,+\infty]\!]$, elle ne dépend pas du choix de la modification continue à droite de Z.

b) La surmartingale positive Z est de classe (D) si et seulement si P^Z ne charge pas les ensembles évanescents.

$\sqcap$

Soit $Z = (Z_t)$ une martingale locale positive telle que $E(Z_o) < +\infty$. Il résulte alors du lemme de Fatou que Z est aussi une surmartingale positive. On a le lemme suivant :

LEMME (2-6).- Soit $Z = (Z_t)$ une martingale locale positive régularisée telle que $E(Z_o) < +\infty$. Posons :

$$T = \inf\{t / Z_{t-} = +\infty\} .$$

Alors, la mesure de Föllmer P^Z associée à Z est portée par le graphe de T (dans $\bar{R}_+ \times \Omega$) .

Remarque : On notera que $T = +\infty$ P - presque sûrement.

Démonstration du lemme :

$$\text{Soit } \nu = \inf\{t / Z_t = 0\} .$$

Alors, pour presque tout ω , on a (Meyer [5] VI T 15)

$$Z_t = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq \nu(\omega) .$$

La mesure P^Z ne charge donc que $[\![0,\nu]\!]$, en effet :

$$P^Z(]\!]\nu,+\infty]\!]) = E(Z_\nu 1_{\{\nu<+\infty\}}) = 0 .$$

Posons :

$$T_n = \inf\{t / Z_t > n\} \wedge n .$$

C'est une suite de t.a. finis tendant en croissant vers $+\infty$ P - presque sûrement. Ces t.a. réduisent aussi la martingale locale Z . En effet, pour tout n fixé, on a :

$$Z_{t\wedge T_n} \leq n \vee Z_{T_n} \quad \text{, pour tout } t \text{ fini.}$$

Mais, $n \vee Z_{T_n}$ est intégrable du fait que Z est une surmartingale positive. Donc, $(Z_{t\wedge T_n})$ est une martingale locale uniformément intégrable, donc une martingale uniformément intégrable.

De plus, comme on a décidé de donner à Z la valeur 0 à partir du premier instant où sa limite à gauche n'existe pas dans R_+ , on voit que T est un t.a. prévisible annoncé par (T_n) et que $T \geq \nu$. Montrons que P^Z ne charge que $[\![T,+\infty]\!]$.

Du fait que $(Z_{t\wedge T_n})$ est une martingale uniformément intégrable, on peut écrire :

$$P^Z(]\!]T_n,+\infty]\!]) = E(Z_{T_n}) = E(Z_o) .$$

Ce qui montre que P^Z est portée par l'ensemble

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}]\!]T_n,+\infty]\!] = [\![T,+\infty]\!] .$$

Finalement, P^Z est portée par l'ensemble $[\![0,\nu]\!] \cap [\![T,+\infty]\!]$ qui est contenu dans le graphe de T .

C.Q.F.D.

Voici le théorème de transformation de martingale locale par changement de loi de probabilité.

THEOREME (2-7).- <u>Soit</u> $M = (M_t)$ <u>une</u> $(P,\mathcal{F}^\circ_{t+})$ <u>martingale locale telle que pour</u> P - <u>presque tout</u> ω , $\Delta M_s(\omega) \geq -1$ <u>pour tout</u> s <u>fini</u>. <u>Désignons par</u> $\varepsilon(M) = (\varepsilon(M)_t)$ <u>une version régularisée de la</u> $(P,\mathcal{F}^\circ_{t+})$ - <u>martingale locale positive</u>, <u>solution de l'équation</u> $Z_t = 1 + \int_o^t Z_{s-} dM_s$ (<u>cf. théorème</u> (2-1)).

<u>Posons</u> :

$$T_n = \inf\{t / \varepsilon(M)_t > n\} \wedge n$$

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n = \inf\{t / \varepsilon(M)_{t-} = +\infty\} .$$

<u>Alors, pour toute</u> $(P,\mathcal{F}^\circ_{t+})$ - <u>martingale locale</u> $X = (X_t)$ <u>telle que</u> $\langle X,M \rangle$ <u>existe (relativement à</u> P) , <u>il existe une mesure de probabilité</u> Q <u>sur</u> $(\Omega,\mathcal{F}^\circ)$ <u>telle que</u> :

a) $X - \langle X,M \rangle$ <u>soit une</u> $(Q,\mathcal{F}^\circ_{t+})$ - <u>martingale locale jusqu'à</u> T .

b) Q <u>soit pour tout</u> n <u>fixé absolument continue par rapport à</u> P <u>sur</u> $\mathcal{F}^\circ_{T_n+}$, <u>de densité</u> $\varepsilon(M)_{T_n}$.

<u>Démonstration</u> : Notons d'abord que la mesure de Föllmer $P^{\varepsilon(M)}$ associée à $\varepsilon(M)$ est une mesure de probabilité du fait que $\varepsilon(M)_o = 1$.

D'après le lemme précédent, $P^{\varepsilon(M)}$ est portée par $[\![T]\!]$. Soit donc Q la mesure sur $(\Omega,\mathcal{F}^\circ)$, image de $P^{\varepsilon(M)}$ par $(T(\omega),\omega)\longmapsto\omega$.

Q est évidemment une mesure de probabilité. Montrons que Q répond à la question.

b) Fixons n et prouvons que $Q = \varepsilon(M)_{T_n} P$ sur $\mathcal{F}^\circ_{T_{n+}}$.

Pour tout $A \in \mathcal{F}^\circ_{T_n+}$, T_{n_A} désigne le t.a. qui vaut T_n sur A et $+\infty$ sur A^c. On peut écrire, puisque $T_n < T$:

$$\begin{aligned} Q(A) &= P^{\varepsilon(M)}(]\!]T_{n_A},+\infty]\!]) \\ &= E(\varepsilon(M)_{T_n} 1_A) \\ &= \int_A \varepsilon(M)_{T_n}\, dP . \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

a) D'après la proposition (2-2), le processus $\varepsilon(M)(X-\langle X,M\rangle)$ est une $(P,\mathcal{F}^\circ_{t+})$-martingale locale. Soit (S_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ P-presque sûrement, et réduisant cette martingale locale. Posons : $R_n = S_n \wedge T_n$. Alors, (R_n) est une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ P-presque sûrement, et réduisant à la fois les martingales locales $\varepsilon(M)(X-\langle X,M\rangle)$ et $\varepsilon(M)$.

Le raisonnement précédent fait au b) s'applique aussi à la suite (R_n), on a donc :

$$Q = \varepsilon(M)_{R_n} P \quad \text{sur } \mathcal{F}^\circ_{R_n+}, \text{ pour tout } n \text{ fixé.}$$

Alors, le lemme (2-4), appliqué au processus arrêté

$(X_{t\wedge R_n} - \langle X,M\rangle_{t\wedge R_n})$, nous permet de conclure que ce processus est une $(Q,\mathfrak{F}^\circ_{t\wedge R_n+})$ - martingale uniformément intégrable. Il en résulte que $(X_{t\wedge R_n} - \langle X,M\rangle_{t\wedge R_n})$ est aussi une $(Q,\mathfrak{F}^\circ_{t+})$ - martingale uniformément intégrable.(*) Donc, $X - \langle X,M\rangle$ est une $(Q,\mathfrak{F}^\circ_{t+})$ - martingale locale jusqu'à $R = \lim_{n\to\infty} R_n$. Il nous reste à prouver que $R = T$, Q - presque sûrement.

Par définition même, on a $R \leq T$. On a, d'autre part :

$$\begin{aligned} Q(R<T) &= P^{\varepsilon(M)}(]\!]R_{\{R<T\}},+\infty]\!]) \\ &= E(\varepsilon(M)_R 1_{\{R<T\}}) \\ &= \int_{\{R<T\}} \varepsilon(M)_R \, dP = 0 , \end{aligned}$$

car R et T sont égaux à $+\infty$ P - presque sûrement.

C.Q.F.D.

§ 3. UNE SECONDE EXPONENTIELLE DE SEMI-MARTINGALE APPLICATION A LA DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE D'UNE SURMARTINGALE POSITIVE

On se donne un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ muni d'une famille croissante de sous-tribus $(\mathfrak{F}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles.

1. Une deuxième exponentielle de semi-martingale.

Soit (X_t) une semi-martingale nulle pour $t = 0$. On s'intéresse

---

(*) Si Z est une v.a. intégrable, le théorème d'arrêt de Doob permet d'écrire pour tout couple de t.a. S et T :

$$E\{Z/\mathfrak{F}_S/\mathfrak{F}_T\} = E\{Z/\mathfrak{F}_T/\mathfrak{F}_S\} = E\{Z/\mathfrak{F}_{S\wedge T}\} .$$

à la résolution de l'équation intégrale suivante :

(1)
$$Z_t = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s \, dX_s$$

où $\dot{Z}$ désigne la "projection prévisible" de $Z = (Z_t)$. Comme la projection prévisible n'existe pas pour n'importe quel processus, on voit apparaître déjà une certaine restriction sur (X_t). On se limite donc à travailler sur la classe de semi-martingales suivantes :

DEFINITION (3-1).- $\mathcal{S}_p$ <u>est la classe des semi-martingales</u> (X_t) <u>admettant une décomposition de la forme</u> :

$$X_t = X_o + M_t + A_t$$

<u>où</u> X_o <u>est</u> $\mathcal{F}_o$<u>-mesurable</u>, (M_t) <u>est un élément de</u> $\mathcal{L}$ <u>et</u> (A_t) <u>est un élément de</u> $\mathcal{A}_{loc}$. <u>Un élément de</u> $\mathcal{S}_p$ <u>sera aussi appelé une semi-martingale spéciale</u>.

PROPOSITION (3-2).- <u>Toute semi-martingale</u> $X = (X_t) \in \mathcal{S}_p$, <u>admet une décomposition</u> :

$$X_t = X_o + M_t + A_t$$

<u>pour laquelle</u> $A = (A_t)$ <u>est prévisible et donc dans</u> $\mathcal{A}_{loc}$.

<u>Cette décomposition est unique et est appelée</u> décomposition canonique de X.

<u>Démonstration</u> : Soit $X_t = X_o + M_t + A_t$ une décomposition de X, avec $A = (A_t)$ appartenant à $\mathcal{A}_{loc}$.

D'après le théorème (1-12), A admet une projection duale prévisible $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_t)$. On peut écrire :

$$X_t = X_o + (M_t + A_t - \widetilde{A}_t) + \widetilde{A}_t .$$

$M + A - \widetilde{A}$ est bien sûr une martingale locale et $\widetilde{A}$ est prévisible.

Pour prouver que $\tilde{A}$ est un élément de $\mathcal{A}_{loc}$, il suffit de l'écrire comme différence de deux processus croissants prévisibles et le résultat désiré résulte du fait qu'un processus croissant prévisible est localement borné (cf. la note qui suit le lemme (2-3)).

Passons à l'unicité. Supposons que X admet deux décompositions :

$$X_t = X_o + M_t + A_t = X_o + N_t + B_t ,$$

avec M et N éléments de $\mathcal{L}$ et A et B éléments de $\mathcal{A}_{loc}$ prévisibles.
Alors :

$$M - N = B - A .$$

C'est une martingale locale appartenant à $\mathcal{A}_{loc}$ prévisible, elle est donc nulle : $M - N = B - A = 0$ (cf. unicité dans la définition (1-9)).

<u>Remarques</u> :

1. Un processus (X_t) est un élément de $\mathcal{S}_p$ si et seulement s'il existe une suite de t.a. $T_n \uparrow +\infty$ telle que : $(X_{t\wedge T_n})$ soit une quasi-martingale au sens de Rao [7] pour chaque n fixé.

2. L'intégrale stochastique d'un processus prévisible localement borné par rapport à une semi-martingale dans $\mathcal{S}_p$, est une semi-martingale dans $\mathcal{S}_p$.

□

Nous allons définir la projection prévisible d'une semi-martingale appartenant à $\mathcal{S}_p$.

Soit $X = (X_t)$, une semi-martingale appartenant à $\mathcal{S}_p$, nulle pour $t = 0$, de décomposition canonique :

$$X = M + A$$

avec $M = (M_t) \in \mathcal{L}$ et $A = (A_t) \in \mathcal{A}_{loc}$ prévisible.

Soit (T_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$, qui réduisent fortement M et qui sont tels que $\int_0^{T_n} |dA_s|$ soit intégrable, pour chaque n fixé. D'après la proposition (1-3), la martingale arrêtée $M^{T_n} = (M_{t \wedge T_n})$ est bornée par une variable aléatoire intégrable. Le processus arrêté $X^{T_n} = M^{T_n} + A^{T_n}$ est donc dominé par une variable aléatoire intégrable. Il admet alors une projection prévisible, notée $\dot{X}^{T_n}$, donnée par ([1], V T 15) :

$$\dot{X}_t^{T_n} = M_{t-}^{T_n} + A_t^{T_n} \text{ , pour tout } t \text{ fini.}$$

Il est facile de voir que ces projections prévisibles se recollent bien en un processus prévisible $\dot{X} = (\dot{X}_t)$ qui est appelé <u>projection prévisible</u> de X et on a :

$$\dot{X}_t = M_{t-} + A_t \text{ , pour tout } t \text{ fini.}$$

Dans le cas où X_0 n'est pas nul, la projection prévisible de X est :

$$\dot{X}_t = X_0 + M_{t-} + A_t \text{ , pour tout } t \text{ fini,}$$

car la projection prévisible de X_0 est X_0, X_0 étant $\mathcal{F}_0$-mesurable.

On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION (3-3).- <u>Soit</u> $X = (X_t)$ <u>un élément de</u> $\mathcal{S}_p$, <u>de décomposition canonique</u> :

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \text{ .}$$

<u>Alors</u>, X <u>admet une projection prévisible</u> $\dot{X} = (\dot{X}_t)$ <u>et une seule, donnée par</u> :

$$\dot{X}_t = X_0 + M_{t-} + A_t = X_{t-} + \Delta A_t \text{ , } \underline{\text{pour tout}} \ t \ \underline{\text{fini}}.$$

Il résulte de la proposition ci-dessus que si X_0 est borné, alors $\dot{X}$ est un processus prévisible localement borné, et on peut parler de l'intégrale stochastique de $\dot{X}$ par rapport à une semi-martingale.

Voici le théorème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation (1) :

THEOREME (3-4).- Soit $X = (X_t)$ une semi-martingale appartenant à $\mathcal{S}_p$, nulle pour $t = 0$, de décomposition canonique :

$$X = M + A$$

avec $M = (M_t) \in \mathcal{L}$ et $A = (A_t) \in \mathcal{A}_{loc}$ prévisible.

Supposons que, pour presque tout ω , on ait $\Delta A_s \neq 1$, pour tout s . Alors, il existe une semi-martingale $Z = (Z_t)$ et une seule appartenant à $\mathcal{S}_p$, qui vérifie l'équation :

(1) $$Z_t = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s \, dX_s \ .$$

Elle est donnée explicitement par la formule :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2} < X^c, X^c >_t) \prod_{s \leq t} (\frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s}) e^{-\Delta X_s} \ , \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

où le produit infini converge presque sûrement pour tout t fini.

Notation :

On notera par $\eta(X)$ la solution de (1).

Démonstration : Pour chaque t fixé, définissons $Y_t = \int_0^t \frac{dX_s}{1-\Delta A_s}$, et prouvons que l'équation (1) admet une solution unique, laquelle est indistinguable de $\varepsilon(Y)$.

Pour donner un sens à Y_t , montrons que le processus $(\frac{1}{1-\Delta A_t})$ est prévisible localement borné. Soit en effet :

$$T_n = \inf\{t / |1-\Delta A_t| \leq \frac{1}{n}\} \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Ces t.a. tendent en croissant vers $+\infty$, du fait que $1-\Delta A_t \neq 0$ pour tout t. D'autre part, l'ensemble :

$H_n = \{(t,\omega)/|1-\Delta A_t(\omega)| \leq \frac{1}{n}\}$ est un ensemble prévisible dont les coupes n'ont pas de point d'accumulation dans $\mathbb{R}_+$; il contient donc le graphe de son début T_n. Par conséquent, T_n est un t.a. prévisible. Si (S_{nm}) est une suite de t.a. annonçant T_n, en posant $S_n = \sup\limits_{\substack{p \leq n \\ q \leq n}} S_{p,q}$, on a :

$$\left|\frac{1}{1-\Delta A_t}\right| \leq n \text{ , sur } [\![0,S_n]\!] .$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{1-\Delta A_t}\right)$ est bien localement borné.

a) Soit $Z = (Z_t)$ une solution de (1), montrons que $Z = \varepsilon(Y)$. Z est une semi-martingale dans $\mathcal{S}_p$, de décomposition canonique :

$$Z_t = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s \, dM_s + \int_0^t \dot{Z}_s \, dA_s .$$

Sa projection prévisible est donc (proposition (3-3)) :

$$\dot{Z}_t = Z_{t-} + \dot{Z}_t \Delta A_t .$$

D'où :

$$\dot{Z}_t = \frac{Z_{t-}}{1-\Delta A_t} .$$

L'équation (1) devient alors :

$$Z_t = 1 + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} \, dX_s = 1 + \int_0^t Z_{s-} \, dY_s ,$$

ce qui montre que $Z = \varepsilon(Y)$.

b) Réciproquement, montrons que $Z = \varepsilon(Y)$ est solution de l'équation (1). Par définition de $\varepsilon(Y)$, Z vérifie l'équation suivante :

$$(2) \qquad Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} \, dY_s = 1 + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} \, dX_s .$$

Donc, $Z_t = 1+\int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s}\, dM_s + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s}\, dA_s$.

Ce qui montre que Z est un élément de $\mathcal{S}_p$ avec sa décomposition canonique. La projection prévisible de Z est donc :

$$\dot{Z}_t = Z_{t-} + \frac{Z_{t-}}{1-\Delta A_t}\,\Delta A_t$$
$$= \frac{Z_{t-}}{1-\Delta A_t} .$$

L'équation (2) devient alors :

$$Z_t = 1+\int_0^t \dot{Z}_s\, dX_s .$$

C'est bien l'équation (1).

De a) et b), on conclut que l'équation (1) admet une solution et une seule dans $\mathcal{S}_p$, donnée par $Z = \varepsilon(Y)$.

Passons à l'expression explicite de Z . D'après le théorème (2-1), on a :

$$Z_t = \varepsilon(Y)_t = (\exp(Y_t - \tfrac{1}{2} < Y^c, Y^c >_t)) \prod_{s\le t} (1+\Delta Y_s)\exp(-\Delta Y_s)$$
$$= (\exp(\int_0^t \frac{dX_s}{1-\Delta A_s} - \tfrac{1}{2}\int_0^t \frac{d<X^c,X^c>_s}{(1-\Delta A_s)^2})) \prod_{s\le t} (1+\frac{\Delta X_s}{1-\Delta A_s})\exp(-\frac{\Delta X_s}{1-\Delta A_s}) .$$

Mais, on peut écrire :

$$\prod_{s\le t} (1+\frac{\Delta X_s}{1-\Delta A_s})\exp(-\frac{\Delta X_s}{1-\Delta A_s}) = \prod_{s\le t} (\frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s})\exp(-\Delta X_s - \frac{\Delta A_s \Delta X_s}{1-\Delta A_s})$$

$$= (\prod_{s\le t} (\frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s})\exp(-\Delta X_s))(\prod_{s\le t} \exp(-\frac{\Delta A_s\Delta X_s}{1-\Delta A_s})) ,$$

car chacun de ces deux produits infinis sont convergents p.s.

$$= (\prod_{s\le t} (\frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s})\exp(-\Delta X_s))\exp(-\sum_{s\le t} \frac{\Delta A_s \Delta X_s}{1-\Delta A_s}) .$$

D'autre part, puisque (ΔA_t) est nul sauf sur une réunion dénombrable de t.a., on peut écrire :

$$\int_0^t \frac{d<X^c,X^c>_s}{(1-\Delta A_s)^2} = \int_0^t d<X^c,X^c>_s = <X^c,X^c>_t \ .$$

Donc :

$$Z_t = (\exp(\int_0^t \frac{dX_s}{1-\Delta A_s} - \sum_{s\le t} \frac{\Delta A_s \Delta X_s}{1-\Delta A_s} - \tfrac{1}{2}<X^c,X^c>_t)) \prod_{s\le t} (\frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s})\exp(-\Delta X_s) \ .$$

Or, puisque le processus (ΔA_t) est nul sauf sur une réunion dénombrable de graphes de t.a. prévisibles, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\Delta A_s}{1-\Delta A_s}\, dX_s &= \int_0^t \frac{\Delta A_s}{1-\Delta A_s}\, d(M_s^c + M_s^{dp} + M_s^{dp} + A_s) \\
&= \int_0^t \frac{\Delta A_s}{1-\Delta A_s}\, dM_s^{dp} + \sum_{s\le t} \frac{\Delta A_s}{1-\Delta A_s}\,\Delta A_s \\
&= \sum_{s\le t} \frac{\Delta A_s \Delta M_s^{dp}}{1-\Delta A_s} + \sum_{s\le t} \frac{\Delta A_s \Delta A_s}{1-\Delta A_s} \quad \text{(proposition (1-8))} \\
&= \sum_{s\le t} \frac{\Delta A_s(\Delta M_s^{dp}+\Delta A_s)}{1-\Delta A_s} = \sum_{s\le t} \frac{\Delta A_s \Delta X_s}{1-\Delta A_s} \ .
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$Z_t = (\exp(X_t - \tfrac{1}{2}<X^c,X^c>_t)) \prod_{s\le t} (\frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s})\, e^{-\Delta X_s} \ .$$

□

De l'expression explicite de η , on déduit le résultat suivant :

PROPOSITION (3-5).- Soient $M = (M_t) \in \mathcal{L}$ et $A = (A_t) \in \mathcal{A}_{loc}$ prévisible tel que, pour presque tout ω , $\Delta A_s \neq 1$, pour tout s .

Alors, on a la relation suivante :

$$\eta(M+A) = \eta(M)\eta(A) \ .$$

La proposition ci-dessous nous donne des relations entre η et ε , quand η est défini.

PROPOSITION (3-6).- Soit $X = (X_t)$ une semi-martingale appartenant à $\mathcal{S}_p$, de décomposition canonique $X = M+A$.

1. Si, pour presque tout ω , $\Delta A_s \neq 1$, pour tout s , alors $\eta(X)$ est défini et on a :

$$\eta(X) = \frac{\varepsilon(M)}{\varepsilon(-A)} .$$

2. Si, A est continu, alors, on a :

$$\eta(X) = \varepsilon(X) .$$

En particulier, pour tout élément $M = (M_t)$ de $\mathcal{L}$, on a :

$$\eta(M) = \varepsilon(M)$$

et pour tout processus $A = (A_t) \in \mathcal{A}_{loc}$ prévisible tel que $\Delta A_s \neq 1$, pour tout s , on a :

$$\eta(A) = \frac{1}{\varepsilon(-A)} .$$

La démonstration de cette proposition est immédiate, il suffit en effet d'écrire les expressions explicites de η et de ε .

2. Décomposition multiplicative d'une surmartingale positive.

Le théorème de la décomposition multiplicative d'une surmartingale positive est dû à Itô-Watanabé dans le cas où la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche. Il est ensuite étendu au cas général par P.A. Meyer ([6]). Ici, on va en donner une démonstration dans le cas général, en utilisant l'exponentielle η .

On aura besoin du lemme suivant qui donne la décomposition additive d'une surmartingale positive.

LEMME (3-7) (Décomposition de Doob-Itô).- Soit $X = (X_t)$ une surmartingale positive. Elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X = M - A$$

où $M = (M_t)$ est une martingale locale positive et $A = (A_t)$ est un processus croissant prévisible intégrable.

La décomposition est unique.

Démonstration :

1. Unicité

L'unicité résulte tout simplement du fait que si l'on peut écrire $X = M - A$, alors X est un élément de $\mathcal{S}_p$ et $M - A$ est sa décomposition canonique.

2. Existence

Posons $T_n = \inf\{t | X_t \geq n\}$ et $X_t^n = X_{t \wedge T_n}$.

Pour chaque n fixé, $X^n = (X_t^n)$ est une surmartingale positive majorée par la variable aléatoire intégrable $n \vee X_{T_n}$. X^n admet alors une décomposition de Doob ([5]) :

$$X^n = M^n - A^n$$

où $M^n = (M_t^n)$ est une martingale uniformément intégrable positive et $A^n = (A_t^n)$ est un processus croissant prévisible intégrable.

Comme $(X_{t \wedge T_n}^{n+1}) = (X_t^n)$, l'unicité de la décomposition permet d'écrire :

$$M_{t \wedge T_n}^{n+1} = M_t^n \quad \text{et} \quad A_{t \wedge T_n}^{n+1} = A_t^n .$$

On définit alors A et M par :

$$A_t = A_t^n \quad \text{si} \quad t \leq T_n$$

$$M_t = M_t^n \quad \text{si} \quad t \leq T_n .$$

Par définition même, M est une martingale locale et A est un processus croissant prévisible. Montrons que A_∞ est intégrable. On a, pour tout t fini :

$$E(A_t^n) = E(M_t^n) - E(X_t^n)$$

$$\leq E(M_t^n) = E(M_o^n) = E(X_o^n) = E(X_o) \ .$$

En faisant tendre n, puis t vers $+\infty$, on obtient :

$$E(A_\infty) \leq E(X_o) < +\infty \ .$$

C.Q.F.D.

□

Soit $X = (X_t)$ une surmartingale positive. Désignons par $\dot{X} = (\dot{X}_t)$ sa projection prévisible et posons :

$$\nu = \inf\{t/X_t = 0\} \ .$$

On a le lemme suivant :

LEMME (3-8).- <u>Pour presque tout</u> ω , <u>on a</u> :

$$\dot{X}_t(\omega) \geq 0 \quad \underline{\text{pour tout } t \text{ fini}}$$

$$\text{et} \quad \dot{X}_t(\omega) > 0 \quad \underline{\text{pour } t < \nu(\omega)} \ .$$

<u>Démonstration</u> :

a) On sait que la projection prévisible $\dot{X}$ de X est caractérisée par ([1] V T 15) :

pour tout t.a. prévisible fini T , $\dot{X}_T = E\{X_T | \mathcal{F}_{T-}\} \geq 0$.

Le théorème de section permet de conclure que $\dot{X}$ est positif.

b) On vient de voir que :

$\dot{X}_T = E\{X_T | \mathcal{F}_{T-}\}$, pour tout t.a. prévisible fini T .

Intégrons les deux membres de l'égalité sur $\{\dot{X}_T = 0\}$ qui est $\mathcal{F}_{T-}$ - mesurable, on obtient :

$$\int_{\{\dot{X}_T=0\}} X_T \, dP = 0 .$$

Par conséquent, on a $X_T = 0$, donc $T \geq \nu$, sur $\{\dot{X}_T = 0\}$. Ce qui est équivalent à dire que : $\dot{X}_T > 0$ sur $\{T < \nu\}$. D'où le résultat désiré d'après le théorème de section.

□

Voici le théorème de décomposition multiplicative d'une surmartingale positive.

THEOREME (3-9).- Soient $X = (X_t)$ une surmartingale positive et $\dot{X} = (\dot{X}_t)$ sa projection prévisible. Définissons :

$$\nu = \inf\{t / X_t = 0\} \quad \text{et} \quad \nu' = \inf\{t / \dot{X}_t = 0 \quad \text{et} \quad t = \nu\} .$$

Alors, X peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X = N D$$

où $N = (N_t)$ est une martingale locale positive jusqu'à ν' et $D = (D_t)$ un processus décroissant prévisible qui vaut 1 pour $t = 0$.

La décomposition est unique sur $[\![0, \nu'[\![$.

Démonstration : Le cas où $X_o = 0$ p.s. est exclu, puisque X serait alors, indistinguable de 0 .

Dans le cas où X_o n'est pas presque sûrement nul, en travaillant sur l'ensemble $\{X_o > 0\}$ et en considérant $\frac{X}{X_o}$ au lieu de X , on peut toujours supposer que $X_o = 1$.

a) Unicité.

Supposons que l'on ait deux décompositions du même type :

$$X = ND = N'D' .$$

La formule de changement de variables permet d'écrire, pour tout t fini :

$$X_t = N_t D_t = 1 + \int_o^t D_{s-} dN_s + \int_o^t N_{s-} dD_s + \sum_{s \leq t} \Delta D_s \Delta N_s .$$

Mais, puisque (ΔD_t) est un processus prévisible borné par 1, nul sauf sur une réunion dénombrable de graphes de t.a. prévisibles, on peut écrire (proposition (1-8)) :

$$\int_o^t \Delta D_s dN_s = \int_o^t \Delta D_s dN_s^{dp} = \sum_{s \leq t} \Delta D_s \Delta N_s^{dp} = \sum_{s \leq t} \Delta D_s \Delta N_s .$$

Il vient donc :

(3) $$X_t = 1 + \int_o^t D_s dN_s + \int_o^t N_{s-} dD_s .$$

On a de même :

(4) $$X_t = 1 + \int_o^t D'_s dN'_s + \int_o^t N'_{s-} dD'_s .$$

On remarque que (3) et (4) sont des décompositions de Doob-Itô de X. L'unicité de cette décomposition permet alors d'écrire :

$$\int_o^t N_{s-} dD_s = \int_o^t N'_{s-} dD'_s .$$

(5) Donc

$$N_{s-} dD_s = N'_{s-} dD'_s .$$

D'autre part, la projection prévisible $\dot{X}$ de X s'écrit aussi :

$$\dot{X}_s = N_{s-} D_s = N'_{s-} D'_s .$$

Comme sur $]\!]0,\nu'[\![$, $\dot{X}$ est strictement positif, on peut diviser les deux membres de (5) par $\dot{X}$ et on obtient :

$$\frac{dD_s}{D_s} = \frac{dD'_s}{D'_s} \quad \text{sur} \quad]\!]0,\nu'[\![.$$

Donc :

$$\int_0^t \frac{dD_s}{D_s} = \int_0^t \frac{dD'_s}{D'_s} \quad \text{sur} \quad [\![0,\nu'[\![\,.$$

Puisque $\left(\int_0^t \frac{dD_s}{D_s}\right)$ et $\left(\int_0^t \frac{dD'_s}{D'_s}\right)$ sont des processus prévisibles à variation finie sur $[\![0,\nu'[\![$ et à sauts négatifs, le théorème (3-4) s'applique, et on a :

$$D_t = \eta\left(\int \frac{dD_s}{D_s}\right)_t = \eta\left(\int \frac{dD'_s}{D'_s}\right)_t = D'_t \quad \text{sur} \quad [\![0,\nu'[\![\,.$$

Par conséquent, on a aussi $N_t = N'_t$ sur $[\![0,\nu'[\![$ puisque D et D' sont strictement positifs sur $[\![0,\nu'[\![$ (sinon $\dot{X}$ pourrait s'annuler sur $[\![0,\nu']\!]$) .

b) <u>Existence</u>.

LEMME (3-10).- <u>Soit S un t.a. tel que sur $[\![0,S]\!]$, $\dot{X}$ soit strictement positif. Alors, on a le théorème d'existence de décomposition multiplicative de la surmartingale arrêtée</u> $(X_{t\wedge S})$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $X = M - A$ la décomposition de Doob-Itô de X . D'après la proposition (3-3), la projection prévisible $\dot{X}$ de X est donnée par :

$$\dot{X}_t = X_{t-} - \Delta A_t \text{ , pour tout } t \text{ fini.}$$

Notons au passage que $X_{t-} \geq \dot{X}_t$. Donc, X_{t-} est aussi strictement positif sur $[\![0,S]\!]$.

Considérons le processus prévisible $\frac{1}{\dot{X}}\, 1_{[\![0,S]\!]}$ et montrons qu'il est localement borné. On peut écrire :

$$\frac{1}{\dot{X}_t}\, 1_{[\![0,S]\!]} = \frac{1}{X_{t-} - \Delta A_t}\, 1_{[\![0,S]\!]}$$

$$= \frac{\frac{1}{X_{t-}}}{1 - \frac{\Delta A_t}{X_{t-}}} 1_{[\![0,S]\!]} \, .$$

Or le processus $\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta A_t}{X_{t-}}} 1_{[\![0,S]\!]}\right)$ est localement borné (cf. la démonstration du théorème (3-4)), et le processus $\left(\frac{1}{X_{t-}} 1_{[\![0,S]\!]}\right)$, adapté et continu à gauche, est aussi localement borné. D'où le résultat désiré.

Définissons alors pour tout t fini :

$$W_t = \int_0^{t \wedge S} \frac{dX_s}{\dot{X}_s}$$

$$U_t = \int_0^{t \wedge S} \frac{dM_s}{\dot{X}_s}$$

$$V_t = - \int_0^{t \wedge S} \frac{dA_s}{\dot{X}_s} \, .$$

Comme $U = (U_t)$ est une martingale locale et $V = (V_t)$ est un élément de $\mathcal{A}_{loc}$ prévisible, à sauts différents de 1 (car ils sont négatifs), la proposition (3-5) permet d'écrire :

$$\eta(W) = \eta(U+V) = \eta(U)\eta(V) \, .$$

$\eta(U)$ est évidemment une martingale locale et $\eta(V)$ un processus décroissant prévisible qui vaut 1 pour $t = 0$.

Il nous reste à vérifier que $\eta(W) = (X_{t \wedge S})$.

Par définition de η, $\eta(W)$ est l'unique solution de l'équation suivante :

$$Z_t = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s \, dW_s$$

$$= 1 + \int_0^t \frac{\dot{Z}_s}{\dot{X}_{s \wedge S}} \, dX_{s \wedge S} \, .$$

Mais, on vérifie que $(X_{t\wedge S})$ satisfait aussi à cette équation. Donc, $\eta(W)$ et $(X_{t\wedge S})$ sont indistinguables.

C.Q.F.D.

Passons à la démonstration du théorème d'existence. Pour cela, on va montrer que le t.a. ν' est prévisible.

Par définition, ν' est le début de l'ensemble suivant :

$$E = \{(t,\omega) | \dot{X}_t(\omega) = 0 , t = \nu(\omega)\}$$

$$= \{(t,\omega) | \dot{X}_t(\omega) = 0 , t = \nu(\omega) , X_{t-}(\omega) = 0\} \cup \{(t,\omega) | \dot{X}_t(\omega) = 0 , t = \nu(\omega) , X_{t-}(\omega) > 0\} .$$

Posons :

$$F = \{(t,\omega) | \dot{X}_t(\omega) = 0, t = \nu(\omega) , X_{t-}(\omega) = 0\}$$

$$G = \{(t,\omega) | \dot{X}_t(\omega) = 0, t = \nu(\omega) , X_{t-}(\omega) > 0\} .$$

Comme $\dot{X}_t \leq X_{t-}$ pour tout t *fini*, F est réduit à :

$$F = \{(t,\omega) | t = \nu(\omega) , X_{t-}(\omega) = 0\} .$$

Alors, on voit que le début S de l'ensemble F , annoncé par $S_n = \inf\{t | 0 < X_t \leq \frac{1}{n}\} \wedge n$, est un t.a. prévisible.

D'autre part, on sait que ([5] VI T 15) :

$$X_{t-} = 0 \quad \text{pour} \quad t > \nu .$$

Donc, compte tenu du lemme (3-8), G est réduit à :

$$G = \{t,\omega) | \dot{X}_t(\omega) = 0 , X_{t-}(\omega) > 0\}$$

qui est un ensemble prévisible contenu dans le graphe de ν . Par conséquent, le début T de G est un t.a. prévisible.

Puisque $\nu' = S \wedge T$, ν' est aussi un t.a. prévisible. Soit (ν'_n) une suite de t.a. annonçant ν' . Alors, pour tout n fixé, $\dot{X}$ est strictement positif sur $[\![0,\nu'_n]\!]$. D'après le lemme (3-10), il existe pour tout n fixé, une martingale locale positive (N^n_t) arrêtée à ν'_n et un processus décroissant prévisible (C^n_t) arrêté à ν'_n qui vaut 1 pour $t = 0$, tels que :

$$X_{t\wedge\nu'_n} = N^n_t C^n_t \text{ , pour tout } t \text{ fini.}$$

Le théorème d'unicité sur $[\![0,\nu'[\![$ permet d'écrire :

$$N^{n+1}_{t\wedge\nu'_n} = N^n_t \quad \text{et} \quad C^{n+1}_{t\wedge\nu'_n} = C^n_t \text{ , pour tout } t \text{ fini.}$$

On peut alors définir :

$$N_t = N^n_t \quad \text{sur} \quad t \le \nu'_n \text{ .}$$

$$C_t = C^n_t \quad \text{sur} \quad t \le \nu'_n \text{ .}$$

Dans ces conditions, on a :

$$X_t = N_t C_t \quad \text{sur} \quad t < \nu' \text{ .}$$

Or $X_t = 0$ sur $t \ge \nu'$. On peut donc écire, pour tout t fini :

$$X_t = N_t C_t 1_{\{t<\nu'\}} \text{ .}$$

Pour finir, il suffit de poser $D_t = C_t 1_{\{t<\nu'\}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE — Capacités et processus stochastiques, Springer-Verlag, Berlin 1972.

[2] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER — Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Séminaire de Probabilités IV, Université de

Strasbourg, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[3] H. FÖLLMER — The exit measure of a supermartingale, Z . Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 21, 154-166.

[4] P.A. MEYER — Un cours sur les intégrales stochastiques, dans le même volume de Séminaire de Probabilités.

[5] P.A. MEYER — Probabilités et potentiel, Paris, Hermann 1966.

[6] P.A. MEYER — On the multiplicative decomposition of positive supermartingales, in Markov processes and Potential theory ed. by J. Chover (J. Wiley and sons, New-York, 1967, 103-116).

[7] K.M. RAO — Quasi-martingales, Math. Scand. 24, 1969, p. 79-92.

[8] C. STRICKER — Mesure de Föllmer en théorie des quasi-martingales, Séminaire de Probabilités IX, Université de Strasbourg, Springer-Verlag, Berlin, 1975.