

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

K. A. YEN

CHANTHA YOEURP

Représentation des martingales comme intégrales stochastiques des processus optionnels

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 422-431

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__422_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRESENTATION DES MARTINGALES
COMME INTEGRALES STOCHASTIQUES
DES PROCESSUS OPTIONNELS

par

K.A. YEN et Ch. YOEURP

On se place dans un espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une famille croissante de sous-tribus (\mathcal{F}_t) vérifiant les conditions habituelles.

Les références indiquées entre parenthèses se rapportent au "Cours sur les intégrales stochastiques" de P.A. Meyer, dans le même volume de Séminaire de Probabilités.

P.A. Meyer a défini l'intégrale stochastique $H.M$ d'un certain processus optionnel $H = (H_t)$ par rapport à une martingale locale $M = (M_t)$, par le fait qu'elle est l'unique martingale locale telle que le processus

$$[H.M, N] - H.[M, N] \text{ soit une martingale locale}$$

pour toute martingale bornée $N = (N_t)$ (Théorème 19, V).

Le lemme suivant généralise ce résultat en ce sens que l'on a $[H.M, N] = H.[M, N]$, et ceci pour toute martingale locale N , quand (\mathcal{F}_t) est quasi-continue à gauche.

LEMME 1.- Soient $M = (M_t)$ une martingale locale, $H = (H_t)$ un processus optionnel tel que $(\int_0^t H_s^2 d[M, M]_s)^{\frac{1}{2}}$ soit localement intégrable. On suppose que (\mathcal{F}_t)

est quasi-continue à gauche (ou que M est quasi-continue à gauche).

Alors, il existe une martingale locale et une seule $(H.M_t) =$

$(\int_0^t H_s dM_s)$ telle que l'on ait, pour toute martingale locale $N = (N_t)$:

$$[H.M, N] = H.[M, N] .$$

Démonstration. - Dans le cas où N est une martingale bornée, le lemme se réduit à (V 19). Comme une martingale locale est localement dans \underline{H}^1 , il suffit de démontrer le lemme pour N appartenant à \underline{H}^1 . Du fait que l'ensemble des martingales bornées est dense dans \underline{H}^1 (V 13), il existe une suite (N^n) de martingales bornées telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\sqrt{[N - N^n, N - N^n]_\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|N - N^n\|_{\underline{H}^1} = 0 .$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que $[N - N^n, N - N^n]_\infty$ converge presque sûrement vers 0 .

D'autre part, l'inégalité de Kunita-Watanabé nous permet d'écrire les deux inégalités suivantes (IV 10) :

$$|\int_0^t H_s d[M, N - N^n]_s| \leq (\int_0^t H_s^2 d[M, M]_s)^{\frac{1}{2}} ([N - N^n, N - N^n]_t)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\int_0^t d[H.M, N - N^n]_s| \leq ([H.M, H.M]_t)^{\frac{1}{2}} ([N - N^n, N - N^n]_t)^{\frac{1}{2}} .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H.[M, N^n] = H.[M, N] \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [H.M, N^n] = [H.M, N] .$$

Mais, comme pour tout n , on a :

$$[H.M, N^n] = H.[M, N^n] ,$$

on en conclut que $[H.M, N] = H.[M, N]$.

C.Q.F.D.

On a le théorème fondamental suivant :

THEOREME 2.- On suppose que (\mathcal{F}_t) est quasi-continue à gauche. Soit $M = (M_t)$ une martingale locale donnée.

Alors, pour toute martingale locale $N = (N_t)$, il existe un processus optionnel $f = (f_t)$ tel que $(\int_0^t f_s^2 d[M, M]_s)^{\frac{1}{2}}$ soit localement intégrable et que :

$$N = f.M + L$$

où $L = (L_t)$ est une martingale locale telle que $[M, L] = 0$.(*)

Cette décomposition est unique en $f.M$ et en L .

De plus, si N est une martingale de carré intégrable, il en est de même pour L , et, si N est bornée, L est localement bornée.

Démonstration :

a) L'inégalité de Kunita-Watanabé (IV 10) nous permet d'écrire pour tout t fini :

$$\int_0^t |d[M, N]_s| \leq (\int_0^t d[M, M]_s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^t d[N, N]_s)^{\frac{1}{2}} .$$

Ce qui montre que $d[M, N]_s$ est absolument continue par rapport à $d[M, M]_s$. Soit alors $f = (f_t)$ une version optionnelle de $\frac{d[M, N]_s}{d[M, M]_s}$.

Montrons que $(\int_0^t f_s^2 d[M, M]_s)^{\frac{1}{2}}$ est localement intégrable. En

posant $f^n = f \cdot 1_{\{|f| \leq n\}}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t (f_s^n)^2 d[M, M]_s &= \int_0^t f_s^n (f_s d[M, M]_s) \\ &= \int_0^t f_s^n d[M, N]_s . \end{aligned}$$

(*) On a $[M, L] = 0$ si et seulement si M et L sont orthogonales et sans sauts communs.

$$\leq \left(\int_0^t (f_s^n)^2 d[M, M]_s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t d[N, N]_s \right)^{\frac{1}{2}},$$

toujours d'après l'inégalité de Kunita-Watanabé.

Puisque $\int_0^t (f_s^n)^2 d[M, M]_s$ est fini, on en déduit que :

$$\left(\int_0^t (f_s^n)^2 d[M, M]_s \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t d[N, N]_s \right)^{\frac{1}{2}} = ([N, N]_t)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\left(\int_0^t f_s^2 d[M, M]_s \right)^{\frac{1}{2}} \leq ([N, N]_t)^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors le résultat désiré du fait que $([N, N]_t)^{\frac{1}{2}}$ est localement intégrable (IV 30) .

On peut alors parler de l'intégrale stochastique $f \cdot M$. Posons :

$L = N - f \cdot M$, on a alors :

$$\begin{aligned} [M, L] &= [M, N] - [M, f \cdot M] \\ &= f \cdot [M, M] - f \cdot [M, M] \quad (\text{lemme 1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le théorème de décomposition est ainsi démontré.

b) Supposons que N soit une martingale de carré intégrable, montrons que L aussi. On peut écrire :

$$\begin{aligned} [N, N] &= [f \cdot M + L, f \cdot M + L] \\ &= [f \cdot M, f \cdot M] + [L, L] + 2[f \cdot M, L] \\ &\geq [L, L] + 2f \cdot [M, L] = [L, L]. \end{aligned}$$

Or $[N, N]_\infty$ est intégrable, donc $[L, L]_\infty$ aussi. Ce qui équivaut à dire que L est une martingale de carré intégrable.

c) Supposons que N soit bornée par k , montrons que L est localement bornée. Considérons :

$$T_n = \inf\{t / |L_t| \geq n\}.$$

Ce sont des t.a. tendant en croissant vers $+\infty$.

On a :

$$|L_{t \wedge T_n}| \leq n + |\Delta L_{T_n}|.$$

Mais L et $f.M$ n'ont pas de sauts communs. Donc, si ΔL_{T_n} n'est pas nul, il est égal à ΔN_{T_n} qui est borné par $2k$. Donc :

$$|L_{t \wedge T_n}| \leq n + 2k.$$

C.Q.F.D.

d) Unicité.

Supposons que l'on ait deux décompositions du même type :

$$N = f.M + L = f'.M + L'.$$

Alors :

$$L - L' = (f' - f).M.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} [L - L', L - L'] &= [(f' - f).M, L - L'] \\ &= (f' - f).[M, L] - (f' - f).[M, L'] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent : $L = L'$ et $f.M = f'.M$.

C.Q.F.D.

Remarque : Cas particulier où M est continue.

Si la martingale locale M est continue, dans le théorème 2, f peut être choisi prévisible. Alors, l'hypothèse de la quasi-continuité à gauche

de (\mathcal{F}_t) peut être supprimée.

En effet, dans le cas d'une martingale continue, l'intégrale stochastique des optionnels coïncide avec celle des prévisibles.

□

Pour simplifier, les martingales locales considérées dans la suite seront supposées nulles pour $t = 0$. Cela n'enlève rien quant à la généralité.

THEOREME 3.- Soit $M = (M_t)$ une martingale locale. On suppose que (\mathcal{F}_t) est quasi-continue à gauche (ou que M est quasi-continue à gauche). Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. toute martingale bornée admet une représentation comme intégrale stochastique d'un processus optionnel par rapport à M (on dira tout simplement "représentation optionnelle par rapport à M ").

2. toute martingale locale admet une représentation optionnelle par rapport à M .

3. toute martingale bornée L telle que $[M, L] = 0$ est nulle.

Démonstration :

a) Montrons l'implication 1. \Rightarrow 2. :

Soit $N = (N_t)$ une martingale locale. D'après le théorème 2, on peut écrire :

$$N = f \cdot M + L$$

où $f = (f_t)$ est un processus optionnel et L est une martingale locale telle que $[M, L] = 0$.

On va prouver que $L = 0$. Par arrêt, on peut supposer que L est dans H^1 . Il existe alors une suite de martingales bornées L^n qui convergent dans H^1 vers L .

Mais, d'après 1., on peut écrire :

$$L^n = f^n \cdot M$$

où $f^n = (f_t^n)$ est un processus optionnel. On a alors :

$$\begin{aligned} \|L^n - L\|_{\underline{H}}^2 &= E(\sqrt{[L^n - L, L^n - L]_\infty}) \\ &= E(\sqrt{[L^n, L^n]_\infty + [L, L]_\infty - 2[L^n, L]_\infty}) \\ &\geq E(\sqrt{[L, L]_\infty}) \end{aligned}$$

car $[L^n, L] = [f^n \cdot M, L] = f^n \cdot [M, L] = 0$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$[L, L]_\infty = 0.$$

Donc, $L = 0$.

b) Montrons que $2. \Rightarrow 3.$

Soit L une martingale bornée telle que $[M, L] = 0$. D'après 2., il existe $f = (f_t)$ optionnel tel que $L = f \cdot M$. On peut alors écrire :

$$[L, L] = [f \cdot M, L] = f \cdot [M, L] = 0.$$

Donc, $L = 0$.

c) Montrons que $3. \Rightarrow 1.$:

Soit $N = (N_t)$ une martingale bornée. Le théorème 2 permet d'écrire :

$$N = f \cdot M + L$$

où $f = (f_t)$ est optionnel et $L = (L_t)$ une martingale localement bornée telle que $[M, L] = 0$.

Pour prouver que $L = 0$, on peut supposer, par arrêt, que L est bornée. Alors, 3. permet de conclure.

C.Q.F.D.

□

Introduisons la classe des martingales locales suivantes :

DEFINITION 4.- Une martingale locale $M = (M_t)$ est dite standard si elle satisfait à la condition suivante :

si Q est une loi de probabilité équivalente à P telle que M soit encore une martingale locale sous la loi Q , alors $Q = P$ sur \mathcal{F}_∞ .

Exemples : Une martingale continue $M = (M_t)$ telle que $\langle M, M \rangle$ soit une fonction déterministe est standard par rapport à sa famille de tribu naturelle (suivre par exemple la démonstration de III Théorème 10) ; le mouvement brownien en est un cas particulier.

Une martingale locale somme compensée de sauts $M = (M_t)$ dont tous les sauts sont égaux à $+1$, telle que $\langle M, M \rangle^{(*)}$ soit une fonction déterministe continue est aussi standard par rapport à sa famille de tribu naturelle ; le processus de Poisson compensé en est un cas particulier.

□

On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration est immédiate et est laissée au lecteur.

LEMME 5.- Soit Q une loi de probabilité équivalente à P . Posons :

$$\mu_t = E\left\{\frac{dQ}{dP} / \mathcal{F}_t\right\}, \text{ pour tout } t \text{ fini.}$$

Alors, $M = (M_t)$ est une martingale locale relativement à Q si et seulement si $(M_t \mu_t)$ est une martingale locale relativement à P .

THEOREME 6.-

1. On suppose que (\mathcal{F}_t) est quasi-continue à gauche. Si $M = (M_t)$ est standard, alors toute martingale locale admet une représentation optionnelle par rapport à M .

(*) En considérant $T_n = \inf\{t / |M_t| \geq n\}$, on voit que $|M_{t \wedge T_n}| \leq n+1$. Donc, en particulier, M est une martingale localement de carré intégrable, et $\langle M, M \rangle$ est bien défini.

2. Soit $M = (M_t)$ une martingale locale continue et soit (Q_t) sa famille de tribus naturelle, complétée et rendue continue à droite.

Alors, M est standard relativement à (Q_t) si et seulement si toute martingale locale de la famille (Q_t) admet une représentation prévisible par rapport à M .

Démonstration :

1. En vertu du théorème 3, il suffit de faire la démonstration pour une martingale bornée $N = (N_t)$. Le théorème 2 permet d'écrire :

$$N = f.M + L$$

où f est optionnel et L est une martingale localement bornée telle que $[M, L] = 0$.

Pour prouver que $L = 0$, on peut supposer, par arrêt que L est bornée par une constante k . Définissons alors une loi de probabilité Q équivalente à P , en posant :

$$Q = \left(1 + \frac{L_\infty}{2k}\right) P.$$

Puisque $[M, L] = 0$, ML est une martingale locale sous la loi P , donc $M + \frac{LM}{2k}$ aussi. Le lemme 5 permet alors de dire que M est une martingale locale sous la loi Q . Donc, du fait que M est standard, on a :

$$Q = P \text{ sur } \mathcal{F}_\infty.$$

$$\text{Donc, } L_\infty = 0.$$

C.Q.F.D.

2. La condition nécessaire résulte immédiatement de 1. et de la remarque suivant la démonstration du théorème 2.

Passons à la condition suffisante. Soit Q une loi de probabilité équivalente à P telle que M soit encore une martingale locale sous Q . Posons, pour tout t fini :

$$\mu_t = E\left\{\frac{dQ}{dP} / Q_t\right\}.$$

On va montrer que $\mu_t = 1$, pour tout t , ce qui entraînera alors que $Q = P$ sur \mathcal{G}_∞ .

Soit $N = (N_t) = (1 - \mu_t)$. C'est une martingale relativement à P , nulle pour $t = 0$, car $\mu_0 = E\{\frac{dQ}{dP} / \mathcal{G}_0\} = E(\frac{dQ}{dP}) = 1$. Il existe alors un processus prévisible $f = (f_t)$ tel que $N = f.M$. D'autre part, le lemme 5 permet de dire que $(\mu_t M_t)$ est une martingale locale sous la loi P , puisque M l'est sous Q . Par conséquent NM est aussi une martingale locale sous la loi P et on a, puisque M est continue : (*)

$$\langle N, M \rangle = 0.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \langle N, f.M \rangle \\ &= f. \langle N, M \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc, N est orthogonale à elle-même et vaut donc 0. Il en résulte que $\mu_t = 1$, pour tout t .

C.Q.F.D.

(*) Si M est continue, alors pour toute martingale locale N , $\langle M, N \rangle$ existe et est continu, et on a :

$$[M, N] = \langle M, N^C \rangle = \langle M, N \rangle$$

où N^C est la partie continue de N .