

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURIZIO PRATELLI

## Espaces fortement stables de martingales de carré intégrable

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 10 (1976), p. 414-421

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1976\\_\\_10\\_\\_414\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__414_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESPACES FORTEMENT STABLES DE  
MARTINGALES DE CARRE INTEGRABLE

par

Maurizio PRATELLI

---

Le but de cette note est d'étudier les sous-espaces de  $\mathcal{M}^2$  qui sont stables pour l'intégration des processus optionnels.

La situation est analogue à celle des sous-espaces stables pour l'intégration des processus prévisibles, mais les démonstrations sont techniquement plus compliquées ; toutefois, elles deviennent extrêmement faciles si la famille de tribus  $(\mathcal{F}_t)$  est supposée quasi-continue à gauche.

---

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Les notions fondamentales de la théorie des intégrales stochastiques sont supposées connues (voir, par exemple, [1] ou [2]) ; les notations sont celles de [1].

L'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est muni d'une famille croissante de tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  satisfaisant aux conditions habituelles ; toutes les martingales sont supposées continues à droite.

La notation  $\mathcal{M}^2$  désigne l'espace des martingales  $M$ , nulles en 0, et de carré intégrable (c'est-à-dire telles que  $\sup_t E[(M_t)^2] < +\infty$ ).

Si  $M$  est une telle martingale,  $\langle M, M \rangle$  désigne le seul processus croissant prévisible tel que  $M^2 - \langle M, M \rangle$  soit une martingale ; on pose, en

outre,  $[M, M]_t = \langle M^C, M^C \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2$ . L'intégrale stochastique  $H.M$ , lorsque  $H$  est un processus optionnel satisfaisant à des conditions d'intégrabilité convenables, a été introduite très récemment par P.A. Meyer (voir [3]) : on va rappeler ici les définitions et les propriétés fondamentales, en se bornant au cas des martingales de carré intégrable, ce qui suffira pour la suite.

Si  $M$  est un élément de  $\mathcal{M}^2$  et si  $H$  est un processus optionnel tel que  $\int_0^{+\infty} H_s^2 d[M, M]_s$  soit intégrable, l'intégrale stochastique  $H.M$  est la seule martingale  $L$  de carré intégrable telle que l'on ait  $E[L_\infty N_\infty] = E[\int_0^{+\infty} H_s d[M, N]_s]$  pour tout élément  $N$  de  $\mathcal{M}^2$ .

On énonce ici les propriétés fondamentales de cette martingale :

- a) Si  $H$  est prévisible,  $H.M$  est l'intégrale stochastique usuelle.
- b) Pour toute martingale  $N$  de  $\mathcal{M}^2$ , le processus  $[H.M, N]_t - \int_0^t H_s d[M, N]_s$  est une martingale, nulle si  $H$  est prévisible ou si  $M$  ou  $N$  n'a que des discontinuités totalement inaccessibles.
- c) Si  $T$  est un temps d'arrêt totalement inaccessible (resp. prévisible), on a  $\Delta(H.M)_T = H_T \cdot \Delta M_T$  (resp.  $= H_T \Delta M_T - E[H_T \Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}]$ ).
- d) On a  $H \cdot (K.M) = (HK).M$  pour tout couple  $H, K$  de processus optionnels bornés, dont l'un au moins est prévisible.

Pour la démonstration de ces propriétés, on renvoie à la rédaction du cours de P.A. Meyer sur les intégrales stochastiques.

## 2. SOUS-ESPACES FORTEMENT STABLES.

DEFINITION 1. Un sous-espace  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{M}^2$  est appelé fortement stable s'il est fermé et si, pour tout élément  $M$  de  $\mathcal{H}$  et pour tout processus optionnel  $H$  tel que  $\int_0^{+\infty} H_s^2 d[M, M]_s$  soit intégrable, l'intégrale stochastique  $H.M$  est encore un élément de  $\mathcal{H}$ .

Remarque 1 : Puisque la tribu optionnelle est engendrée par les intervalles stochastiques de la forme  $[[0, T]] = [[0, T]] \setminus [[T]]$ , il suffit, pour qu'un sous-espace fermé  $\mathcal{H}$  soit fortement stable, que  $H.M$  soit un élément de  $\mathcal{H}$  lorsque

$M$  appartient à  $\mathcal{H}$  et  $H$  est l'indicatrice d'un intervalle stochastique de la forme  $\llbracket 0, T \rrbracket$  ou  $\llbracket T \rrbracket$ .

On remarquera que dans le cas où  $H$  est l'indicatrice de  $\llbracket 0, T \rrbracket$ ,  $H.M$  coïncide avec la martingale arrêtée  $M^T$ . Dans l'autre cas, si l'on désigne par  $X$  le compensé du processus à variation intégrable  $\Delta M_T \cdot I_{\{t \geq T\}}$ , on a  $E[\int_0^{+\infty} H_s d[M, N]_s] = E[\Delta M_T \cdot \Delta N_T] = E[X_\infty N_\infty]$  pour tout élément  $N$  de  $\mathcal{M}^2$ , ce qui montre que  $H.M$  coïncide avec  $X$ .

En tenant compte des propriétés de l'intégrale stochastique énoncées ci-dessus, on peut donner les exemples suivants de sous-espaces fortement stables :

- 1) L'espace  $\mathcal{M}^c$  des martingales continues.
- 2) L'espace  $\mathcal{M}^d$  des "sommes compensées de sauts" (voir [1]).
- 3) Si  $T$  est un temps d'arrêt soit prévisible, soit totalement inaccessible, l'espace  $\mathcal{M}(T)$  des martingales continues hors de  $\llbracket T \rrbracket$ .

En revanche, si  $T$  est un temps d'arrêt quelconque,  $\mathcal{M}(T)$  peut ne pas être fortement stable.

Exemple : Soit  $\Omega$  un espace constitué par trois points  $x, y, z$  avec  $P(\{x\}) = P(\{y\}) = P(\{z\}) = \frac{1}{3}$ , et soit  $\mathcal{F}_t = (\emptyset, \Omega)$  si  $t < 1$ ,  $\mathcal{F}_t = P(\Omega)$  si  $t \geq 1$ .

Soit  $M$  la martingale ainsi définie :

$$M_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ I_{\{x\}} - I_{\{y\}} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

$M$  est continue hors de  $\llbracket T \rrbracket$ , avec

$$T(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = x \text{ ou } \omega = y, \\ +\infty & \text{si } \omega = z. \end{cases}$$

Par contre, en prenant

$$H(\omega, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = x \text{ et } t \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'intégrale  $H.M$  est donnée par

$$(H.M)_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{2}{3} I_{\{x\}} - \frac{1}{3} I_{\{y\}} - \frac{1}{3} I_{\{z\}} & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

et  $H.M$  n'appartient pas à  $\mathcal{M}(T)$ .

Le lemme suivant sera utile dans la suite.

LEMME 1. Soient  $M$  et  $N$  deux martingales de carré intégrable. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $[M, N] = 0$ .

b) Pour tout temps d'arrêt  $T$ , l'on a  $E[M_T N_T] = E[\Delta M_T \Delta N_T] = 0$   
(avec la convention  $\Delta M_T = 0$  sur  $\{T = +\infty\}$ ).

Démonstration : a)  $\Rightarrow$  b). Soit  $[M, N] = 0$  ;  $M$  et  $N$  sont alors orthogonales (voir [1]) et donc  $E[M_T N_T] = 0$  pour tout  $T$ . En outre,  $\Delta M_T \Delta N_T = \Delta_T([M, N])$ .

b)  $\Rightarrow$  a). En appliquant la relation  $E[\Delta M_T \Delta N_T] = 0$  aux t.d.a. de la forme  $T_A$  où  $A$  parcourt la tribu  $\mathcal{F}_T$ , on trouve la relation conditionnelle  $E[\Delta M_T \Delta N_T | \mathcal{F}_T] = \Delta M_T \Delta N_T = 0$  p.s., ce qui montre (d'après le théorème de section) que le processus optionnel  $\Delta M_s \Delta N_s$  est évanescent, de sorte que l'on a  $\sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s = 0$ .

Pour tout temps d'arrêt  $T$ , on a donc  $E[M_T^d N_T^d] = 0$  ; par conséquent,  $0 = E[M_T N_T] = E[M_T^C N_T^C]$ . Il en résulte que  $\langle M^C, N^C \rangle = 0$ .

Les théorèmes d'orthogonalité concernant les sous-espaces stables au sens faible (c'est-à-dire pour l'intégration des processus prévisibles) sont fondés sur la notion d'orthogonalité définie par la condition  $\langle M, N \rangle = 0$ . Pour obtenir des théorèmes analogues concernant les sous-espaces fortement stables, on pourrait penser à utiliser la notion d'orthogonalité définie par la condition  $[M, N] = 0$  ; mais, on s'aperçoit que la "bonne" définition est en fait

la suivante.

**DEFINITION 2.** Deux éléments  $M, N$  de  $\mathcal{M}^2$  sont dits fortement orthogonaux si, pour tout  $H, K$  optionnels bornés, on a  $[H.M, K.N] = 0$ .

**Remarque 2 :** Lorsque les discontinuités de  $M, N$  sont contenues dans des graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles (par exemple, si la famille  $\mathcal{F}_t$  est quasi-continue à gauche), la condition de la définition précédente se réduit à  $[M, N] = 0$  : il suffit de remarquer que, dans ce cas, on a  $H.[M, N] = [H.M, N]$  pour tout  $H$  optionnel borné.

**THEOREME 1.** Pour que les martingales  $M$  et  $N$  soient fortement orthogonales, (il faut et) il suffit que l'on ait  $[H.M, N] = 0$  pour tout processus  $H$  optionnel borné.

**Démonstration :** En vertu de la remarque précédente, il suffit de démontrer le théorème lorsque  $M$  et  $N$  sont deux sommes compensées de sauts contenus dans des graphes de temps d'arrêt prévisibles. Supposons d'abord  $M = \Delta M_T \cdot I_{\{t \geq T\}}$  et  $N = \Delta N_S \cdot I_{\{t \geq S\}}$  avec  $T$  et  $S$  prévisibles. Si  $\mathbb{P}\{T = S < +\infty\} = 0$ , il est très facile de voir que  $M$  et  $N$  sont fortement orthogonales : en effet,  $H$  et  $K$  étant optionnels bornés,  $H.M$  (resp.  $K.N$ ) est purement discontinue avec un seul saut contenu dans  $[[T]]$  (resp.  $[[S]]$ ), de sorte que  $[H.M, K.N] = 0$ .

Si  $\mathbb{P}\{T = S < +\infty\} > 0$ , l'ensemble  $A = \{T = S < +\infty\}$  appartient à  $\mathcal{F}_{T-} \cap \mathcal{F}_{S-}$  (voir [4], th. IV, 73) et l'on a  $M = M^1 + M^2$ ,  $N = N^1 + N^2$ , avec :

$$M^1 = \Delta M_T \cdot I_{\{t \geq T\}} \cdot I_{A^c}, \quad M^2 = \Delta M_T \cdot I_{\{t \geq T\}} \cdot I_A,$$

$$N^1 = \Delta N_S \cdot I_{\{t \geq S\}} \cdot I_{A^c}, \quad N^2 = \Delta N_S \cdot I_{\{t \geq S\}} \cdot I_A.$$

Les couples  $(M^1, N^1)$ ,  $(M^2, N^2)$  et  $(M^2, N^1)$  sont alors fortement orthogonaux, ce qui permet de se réduire au cas de deux martingales  $M, N$  de la forme

$$M = \Delta M_T \cdot I_{\{t \geq T\}}, \quad N = \Delta N_T \cdot I_{\{t \geq T\}},$$

avec  $T$  prévisible. Supposons donc  $[H.M, N] = 0$  pour tout  $H$  optionnel borné, et en particulier (pour  $H = 1$ )  $[M, N] = 0$ , c'est-à-dire  $\Delta M_T \cdot \Delta N_T = 0$  p.s. Soit  $B = \{E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}] > 0\}$  et soit  $H = \text{sgn}(\Delta M_T) \cdot I_{\{t = T\}}$ . On a alors  $H.M = (|\Delta M_T| - E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}]) I_{\{t \geq T\}}$  et, puisque  $[H.M, N] = 0$ , on a  $(|\Delta M_T| - E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}]) \cdot \Delta N_T = -E[|\Delta M_T| | \mathcal{F}_{T-}] \cdot \Delta N_T = 0$  p.s. Le saut de  $M$  est donc contenu dans  $\llbracket T_B \rrbracket$  (qui est prévisible) et le saut de  $N$  dans  $\llbracket T_{B^c} \rrbracket$ :  $M$  et  $N$  sont alors **fortement orthogonaux**. Le même raisonnement est valable lorsque chacune des martingales  $M, N$  est la somme compensée d'un nombre fini de sauts.

Passons maintenant au cas général. Soient donc  $M = \sum_n \Delta M_{T_n} \cdot I_{\{t \geq T_n\}}$  et  $N = \sum_n \Delta N_{S_n} \cdot I_{\{t \geq S_n\}}$ , telles que l'on ait  $[L.M, N] = 0$  pour tout  $L$  optionnel borné. La somme  $M^h$  des  $h$  premiers sauts de  $M$  peut être mise sous la forme  $M^h = H.M$  avec  $H$  prévisible borné (par exemple,  $H = \sum_{n \leq h} I_{\llbracket T_n \rrbracket}$ ); de la même façon, la somme  $N^k$  des  $k$  premiers sauts peut s'écrire  $N^k = K.N$ .

En vertu des propriétés b) et d) de l'intégrale stochastique, on a  $[L.M^h, N^k] = [L.(H.M), K.N] = [(HKL).M, N] = 0$ , ce qui montre que  $M^h$  et  $N^k$  sont **fortement orthogonales** pour tout  $h$  et  $k$ . Il suffit alors de passer à la limite pour en déduire que les martingales  $M$  et  $N$  sont elles aussi **fortement orthogonales**.

Remarque 3 : On sait que pour que l'égalité  $[M, N] = 0$  ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait  $\langle M^C, N^C \rangle = 0$  et que les sauts de  $M$  et de  $N$  soient disjoints. La démonstration du théorème précédent montre que, pour que  $M$  et  $N$  soient fortement orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait  $\langle M^C, N^C \rangle = 0$  et que les sauts de  $M$  et de  $N$  soient "fortement disjoints", c'est-à-dire qu'ils soient contenus dans deux ensembles disjoints, dont chacun soit une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles ou totalement inaccessibles. On peut aussi remarquer que, pour que  $M$  et  $N$  soient **fortement orthogonales**, il suffit que  $[M, N] = 0$  et que  $[H.M, N] = 0$  lorsque  $H$  est l'indicatrice d'un intervalle stochastique de la forme  $\llbracket T \rrbracket$  (voir la remarque 1).

COROLLAIRE 1. Si  $G$  est une partie quelconque de  $\mathcal{M}^2$ , son orthogonal fort est fortement stable.

Démonstration : L'orthogonal forte de  $G$  est évidemment fermé. Soit  $M$  fortement orthogonal à tout élément  $A$  de  $G$ , et soit  $H$  optionnel borné : pour tout  $K$  optionnel borné, on a alors  $[H.M, K.A] = 0$ , et l'on peut conclure que  $[L.(H.M), K.A] = 0$  pour  $K$  et  $L$  optionnels bornés, c'est-à-dire que  $H.M$  est fortement orthogonal à  $A$ .

Le théorème de projection suivant est l'analogue, pour les sous-espaces fortement stables, du théorème de projection de Kunita-Watanabe (voir [5] ou [1]).

THEOREME 2. Soit  $\mathcal{H}$  un sous-espace fortement stable de  $\mathcal{M}^2$ , et soit  $\mathcal{H}^\perp$  son orthogonal ordinaire (au sens de  $L^2$ ) :  $\mathcal{H}^\perp$  est alors fortement stable et fortement orthogonal à  $\mathcal{H}$ .

Démonstration : Il résulte immédiatement de la définition de l'intégrale stochastique que l'égalité  $E[(H.M)_\infty N_\infty] = E[M_\infty (H.N)_\infty]$  a lieu pour tout couple  $M, N$  d'éléments de  $\mathcal{M}^2$  et pour tout  $H$  optionnel borné.

Si maintenant  $M \in \mathcal{H}$  et  $N \in \mathcal{H}^\perp$ ,  $H.M$  est encore dans  $\mathcal{H}$  et l'on a  $E[(H.M)_\infty N_\infty] = E[M_\infty (H.N)_\infty] = 0$ , de sorte que  $H.N \in \mathcal{H}^\perp$ . Cela prouve que  $\mathcal{H}^\perp$  est fortement stable. Si en particulier  $H$  est l'indicatrice de l'intervalle stochastique  $[[0, T]]$  (resp.  $[[T]]$ ), l'égalité précédente donne  $E[M_T N_T] = 0$  (resp.  $E[\Delta M_T \Delta N_T] = 0$ ), ce qui prouve que  $[M, N] = 0$ .

Si  $H, K$  sont optionnels bornés,  $H.M \in \mathcal{H}$  et  $K.N \in \mathcal{H}^\perp$  : on a alors  $[H.M, K.N] = 0$  et l'on peut conclure que  $M$  et  $N$  sont fortement orthogonaux.

Le corollaire suivant, dont la démonstration est presque évidente, donne une caractérisation du sous-espace fortement stable engendré par une partie quelconque de  $\mathcal{M}^2$ .

COROLLAIRE 2. Si  $G$  est une partie de  $\mathcal{M}^2$ , le sous-espace fortement stable engendré par  $G$  est le biorthogonal de  $G$ , l'orthogonalité étant prise au sens fort.



Remarque 4 : On sait que, pour tout élément  $M$  de  $\mathcal{M}^2$ , le sous-espace  $\mathcal{H}$  constitué par les processus de la forme  $H.M$ , où  $H$  est un processus prévisible tel que  $\int_0^{+\infty} H_s^2 d[M, M]_s$  soit intégrable, est stable, de sorte que tout élément de  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}^2$  admet une décomposition de la forme  $N = H.M + L$ , avec  $H$  prévisible et  $L$  orthogonale (au sens de [1]) à  $M$ .

Malheureusement une décomposition analogue, avec  $H$  optionnel et  $L$  fortement orthogonale à  $M$ , n'a pas lieu en général. Il suffit pour cela de remarquer que, si dans la définition de  $\mathcal{H}$  on remplace le mot "prévisible" par le mot "optionnel", on n'obtient pas un sous-espace fortement stable, sauf cas particuliers (par exemple, le cas où  $M$  est quasi-continue à gauche).

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] MEYER P.A.                      Intégrales stochastiques I.  
Séminaire de Probabilités de Strasbourg I,  
Lecture Notes in M., vol. 39, Springer-Verlag,  
Heidelberg (1967).
- [2] DOLEANS-DADE C.,              Intégrales stochastiques par rapport aux mar-  
MEYER P.A.                          tingales locales.  
Séminaire de Probabilités de Strasbourg IV,  
p. 77-107. Lecture Notes in M., vol. 124,  
Springer-Verlag, Heidelberg (1970).
- [3] MEYER P.A.                      Intégrales stochastiques de processus option-  
nels par rapport aux martingales locales.  
A paraître sur C.R.Acad. Sc. Paris.
- [4] DELLACHERIE C.,              Probabilités et Potentiels (nouvelle version  
MEYER P.A.                          refondue). A paraître.
- [5] KUNITA H.,                      On square integrable martingales.  
WATANABE S.                      Nagoya M.J., vol. 30, p. 209-245 (1967).

ISTITUTO di MATEMATICA

56100 PISA (ITALIE).